

# いわゆる納まりの問題について

On the Shape of a Plane Elastic Bending Beam

中 桐 滋\*

Shigeru NAKAGIRI

## 1. 緒 言

従来、固体力学においては外力を受ける固体の変形が取り扱われてきた。最近では、宇宙構造物に関連して展開可能構造、柔軟構造という概念に対処する構造力学が発達し始めている。宇宙構造物以外でも膜構造などのインフレーションに関してその形状決定の解析も行われている<sup>1)</sup>。このような構造物の特徴のひとつは、その材料は堅い固体であっても、ひとつの代表寸法（たとえば断面半径）が他の代表寸法（たとえば全長）に比較して非常に小さいので、全体としては軟体となっていることである。軟体の身近な例としてはピアノ線、ゴムホース類が挙げられる。流体、気体の移送に用いられるパイプは一般には金属製であるので、その設計においては位相と配置のみが問題となり、パイプ経路という意味での形状決定はあまり問題にならない。一方、ゴムホースについてはその自由長、取付位置、取付角をさだめても空間内でのような形状に納まるかは直感的にはわからず、納まりの形状を解析する必要がある。この解析は、形状と境界条件をあたえて外力にたいする変形をもとめる従来の固体力学の解析とは異なる。

自動車設計の各段階においてはCADが導入されており、ブレーキ・ホース等の配置も計算機利用による数値解析の対象となっている。振動する車体という狭い空間内にケーブル、ホース、ダクト等を他のコンポーネントと干渉せず、また自身の損傷を避けるように配置するためには設計段階における検討が必要なためである。軟体の経路形状を検討することは納まりの問題と俗称されている。納まりの問題の数値解析に用いられる手法のひとつは有限要素法である。大変形解析が可能なプログラムを用いて、自由長と初期形状を与えて取付位置までの大変形を追跡し、得られた最終形状を納まりの形状とするものである。この方法では、一端を取付位置の片方に押さえて他端を他方の取付位置に持ち来たらす経路に最終

形状が依存する。経路依存性があるという問題点に加えて、有限要素大変形解析では演算費用が過大となる難点が残る。他の手法は、紡績機械まわりの紡糸の形状決定のために開発された非線形微分方程式の初期値問題の数値解析に基づくものである<sup>2)</sup>。この手法においても初期形状の設定が必要であり、非線形微分方程式の数値積分に工夫が凝らされている。

本稿においては、納まり形状を離散化モデルを用いて簡単に推定する手法がひずみエネルギー最小の原理により構成しうることが判明したので、その定式を示し、二次元問題の数値計算例により結果を検証するものである。

## 2. 問題 の 設 定

ここでは自由全長が $L$ の線形弾性体からなる細棒が無重力状態の $x, y$ 平面内にあり、 $x$ 方向に距離 $B$ 、 $y$ 方向に距離 $H$ だけ離れた二点で指定された取付角 $\theta_0$ 、 $\theta_f$ を保って取り付けられているとする。ただし、二点間の距離は $L$ より十分小さいものとする。また、細棒横断面は細棒軸線にそって一定であり、横断面は変化しないものと仮定する。問題を二次元に限定するので、細棒の変形には内の曲げと伸縮のみを考慮し、せん断変形を無視する。この細棒を $N$ 個の等長棒要素に分割し、棒要素は一定伸縮剛性 $EA$ に基づく伸縮によりひずみエネルギーを吸収しうるものとする。細棒の曲げひずみエネルギーを吸収するメカニズムとしては一定ばね定数を有するつる巻ばねを想定し、このつる巻ばねで棒要素を連結する。問題は、上述の指定された二点取付位置に対して棒要素の連結点である節点の $x, y$ 座標を定めることである。

## 3. ひずみエネルギー最小の原理に基づく定式化

一般の細棒の納まり形状が物理的には一体いかなる原理に従って定まっているかは不明である。無重力の空間に自由状態にある細棒のひずみエネルギーは自由状態の定義から零である。自由長 $L$ より短い距離にある二点間

\*東京大学生産技術研究所 第1部

に細棒が曲げと伸縮を伴って押し込められているときは、細棒はひずんでいるので有限のひずみエネルギーを蓄積していることになる。細棒の軸線がある位置を取る、すなわち、納まり形状に落ち着いているときには、そのひずみエネルギーが最小になっていると仮定するのは妥当であろう。ただし、取付角とともに取付位置が指定されているので、細棒の両端が取付位置の座標点にあるという制約条件のもとでのひずみエネルギー最小となる。このように簡単化すれば、納まりの問題は等式制約条件のもとでの最小化問題に還元される。

前述の離散化モデルによる変数と座標系を図1に示す。ただし、基本的には $N$ 個の等長要素分割を用いるが、両端における取付角設定のために左始点と右終点に極く短い長さ $l_s, l_f$ の2要素を別に配している。納まり形状を表す変数には各節点の $x, y$ 座標値も取りうるが、後述する未知変数決定方程式の非線形性が強くなるので、第 $i$ 節点における要素傾きの $x$ 軸に対する角度 $\theta_i$ を変数に取る。また納まり形状にある第 $i$ 要素の長さを $l_i$ とし、自由状態にある要素の長さを $l_0$ とする。このとき、等式制約条件下でのひずみエネルギー最小化のための汎関数として式(1)の $\Pi'$ を構成する。

$$\begin{aligned} \Pi' = & \frac{1}{2} k [(\theta_s - \theta_1)^2 + \dots + (\theta_N - \theta_f)^2] \\ & + \frac{1}{2} \frac{EA}{l_0^2} [l_1(l_1 - l_0)^2 + \dots + l_N(l_N - l_0)^2] \\ & + \mu_1 EA [l_1 \cos \theta_1 + \dots + l_N \cos \theta_N - B'] \\ & + \mu_2 EA [l_1 \sin \theta_1 + \dots + l_N \sin \theta_N - H'] \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、

$$\begin{aligned} B' &= B - l_f \cos \theta_f - l_s \sin \theta_s \\ H' &= H - l_f \sin \theta_f - l_s \sin \theta_s \end{aligned} \quad (2)$$

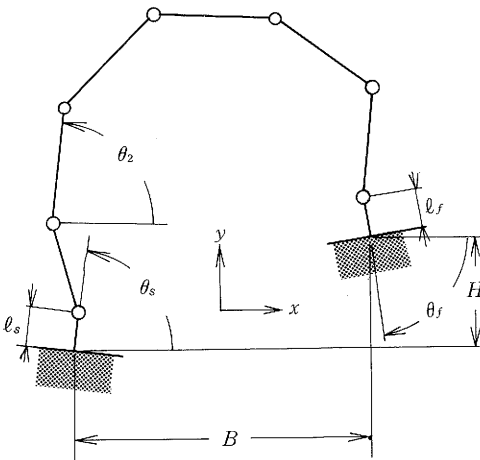


図1 要素分割と座標系

また $E$ は線形弾性体の縦弾性係数、 $A$ は細棒の断面積、 $\gamma$ は断面2次半径、 $\mu_1$ と $\mu_2$ は無次元Lagrange乗数である。曲げ変形を表すためのつる巻ばねのばね定数 $k$ は曲げモーメント $dM$ 、回転角 $d\theta$ 、自由要素長 $l_0$ と曲げ剛性 $E\gamma^2 A$ から式(3)により仮に算定しておく。

$$k = \frac{dM}{d\theta} = \frac{E\gamma^2 A}{l_0} \quad (3)$$

式(1)右辺の第一項は曲げひずみエネルギー、第二項は伸縮ひずみエネルギーを表している。この汎関数を $EAl_0$ で無次元化すると式(4)の汎関数 $\Pi$ を得る。

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \frac{\gamma^2}{l_0^2} [(\theta_s - \theta_1)^2 + \dots + (\theta_N - \theta_f)^2] \\ & + \frac{1}{2} [z_1(z_1 - 1)^2 + \dots + z_N(z_N - 1)^2] \\ & + \mu_1 [z_1 \cos \theta_1 + \dots + z_N \cos \theta_N - B'/l_0] \\ & + \mu_2 [z_1 \sin \theta_1 + \dots + z_N \sin \theta_N - H'/l_0] \end{aligned} \quad (4)$$

ここで、 $z_i = l_i/l_0$ は要素長を初期長さ $l_0$ で無次元化したもので、 $z_i - 1$ が各要素の変形前の状態について定義された伸縮ひずみに対応するものである。ただし、ひずみエネルギーは変形後の体積について計算している。式(4)を未知変数 $\theta_i, z_i, \mu_1$ および $\mu_2$ について微分して、 $\Pi$ を最小にする未知変数の決定方程式が下式のように得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial \theta_i} = & \frac{\gamma^2}{l_0^2} (-\theta_{i-1} + 2\theta_i - \theta_{i+1}) \\ & - \mu_1 z_i \sin \theta_i + \mu_2 z_i \cos \theta_i = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial z_i} = & \frac{1}{2} (3z_i^2 - 4z_i + 1) \\ & + \mu_1 \cos \theta_i + \mu_2 \sin \theta_i = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mu_1} = \sum_{i=1}^N z_i \cos \theta_i - B'/l_0 = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mu_2} = \sum_{i=1}^N z_i \sin \theta_i - H'/l_0 = 0 \quad (8)$$

式(5)、(6)は $i = 1$ から $N$ について成立する。ただし、両端末の取付角の処理については少々修正を要する。上式は未知変数についての非線形連立方程式である。

#### 4. 非線形連立方程式の逐次解法

3節で得られた非線形連立方程式の解は、未知変数を式(9)、(10)、(11)のように初期推定値(上つき棒記号で表す)と微小未知変数( $\Delta$ を付けて表す)の和とし、微小変数に関する線形連立方程式を導入することにより求められる。

$$\theta_i = \bar{\theta}_i + \Delta \theta_i \quad (9)$$

$$z_i = \bar{z}_i + \Delta z_i \quad (10)$$

$$\mu_j = \bar{\mu}_j + \Delta \mu_j \quad j = 1, 2 \quad (11)$$

たとえば、 $i$ 番目の角度に関する式(5)は式(12)のように

研 究 速 報  
 変形され、すべての微小未知変数についてかかる式を並べると連立一次方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma^2}{l_0^2} \left[ -\Delta\theta_{i-1} + \left\{ 2 - \frac{l_0^2}{\gamma^2} \bar{z}_i (\bar{\mu}_1 \cos \bar{\theta}_i + \bar{\mu}_2 \sin \bar{\theta}_i) \right\} \Delta\theta_i \right. \\ & \quad \left. - \Delta\theta_{i+1} \right] + \Delta z_i (\bar{\mu}_1 \sin \bar{\theta}_i - \bar{\mu}_2 \cos \bar{\theta}_i) \\ & \quad - \Delta \mu_1 \bar{z}_i \sin \bar{\theta}_i + \Delta \mu_2 \bar{z}_i \cos \bar{\theta}_i \\ & = -\frac{\gamma^2}{l_0^2} (-\bar{\theta}_{i-1} + 2\bar{\theta}_i - \bar{\theta}_{i+1}) + \bar{\mu}_1 \bar{z}_i \sin \bar{\theta}_i \\ & \quad - \bar{\mu}_2 \bar{z}_i \cos \bar{\theta}_i \end{aligned} \tag{12}$$

その係数マトリックスは対称であり、Lagrange乗数項の部分を除き基本的には5項対角マトリックスとなっているので、Croutの方法により迅速に解ける<sup>3)</sup>。したがって、未知変数の初期値を推定して微小未知変数を求め、それにより変数値を更新するとの過程を反復し、微小未知変数が零との解が得られれば、納まりの形状が求められたことになる。また、このようにして得られた係数マトリックスを見ると、納まりの形状は前述の仮定のもとでは断面には依存するが、縦弾性係数には依存しないことがわかる。縦弾性係数はLagrange乗数、すなわち、取付点の拘束力に影響している。

5. 数 値 計 算 例

自由長が300mm、外径が10.5mm、内径が5.25mmのゴムホースを想定する。このホースが左右に153.8mm、上下に65.9mmほど離れた2点で左端は垂直に、右端は垂直より17度傾いて取り付けられているとする。数値計算においては取付角度設定のための端部要素長を $l_s = l_r = 1.5\text{mm}$ とした。図2は変形要素数18による計算結果を示す。非線形連立方程式を解く際に用いた初期値による形状は破線、4節で述べた反復解法の4、5、6回目の形状をそれぞれ一点鎖線、二点鎖線、実線で示す。この諸線は初期形状から納まり形状への変形過程を示しているものではなく、非線形連立方程式の解の変化を示しているに過ぎない。この反復は6回で収束しているので、図2の実線が納まりの形状である。変形する要素の自由長は16.50mmであり、納まり形状での要素長はいずれもこれより小さく、最短のものでは16.4808mmとなっていた。8の字形のように極端に変な初期値を入力しない限り、本定式は初期推定値にほとんど依存しない。

本定式においては連立一次方程式(その一部が式(12))の右辺が零になれば、微小未知変数は零となり、反復は収束する。したがって、右辺項の絶対値の和は反復収束の目安となる。図3は、初期値によりこの値を規準化した量を縦軸にとって、収束状況を変形要素数36の場合について示したものである。変形要素数を増加させても、大体9回の反復で十分収束した解が得られる。図4は変

形要素数を18, 36, 72として得られた納まり形状を示し、一本の曲線とみなせるほど3例の計算結果は一致している。一方、無次元Lagrange乗数 $\mu_1$ (x方向)、 $\mu_2$ (y方向)は上記要素数についてそれぞれ $0.1150 \times 10^{-2}$ から $0.1154 \times 10^{-2}$ 、 $0.1765 \times 10^{-3}$ から $0.1544 \times 10^{-3}$ へと収束している。この値にEAを乗じたものが拘束力となる。したがって、本定式による計算結果は使用要素数に敏感でないと言える。

図5は変形要素数72による計算結果と前記と同じ諸元を有する2種類のゴム・ホースの納まり形状を比較したものである。図中の白丸は繊維異方性の少ないゴム・ホースの実測値、黒丸は繊維異方性の顕著なゴム・ホースの

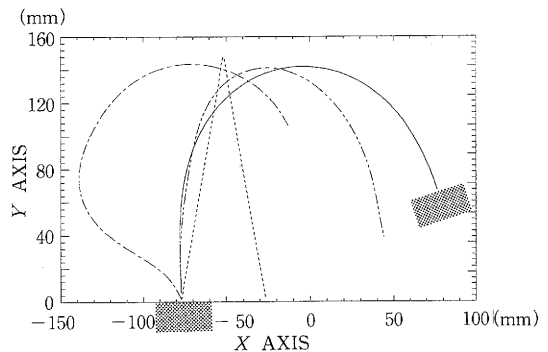


図2 推定納まり形状の収束状況

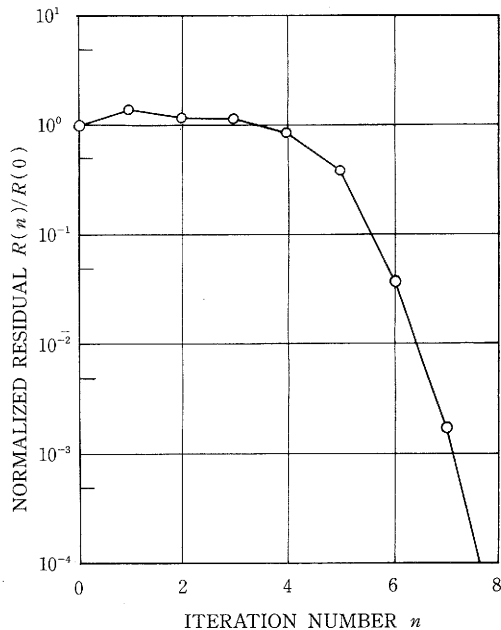


図3 残差表示による解の収束状況

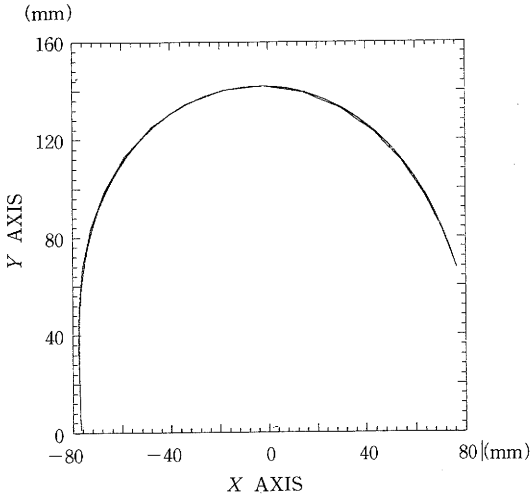


図4 要素数18, 36, 72による納まり形状

実測値である。本定式は単純化したモデルを取り扱っているにもかかわらず、実測値にかなり近い納まり形状を推定している。

## 5. 結 言

実際のゴム・ホースをまっすぐな自由状態から納まり形状まで変形させるとき、ホース円形断面は扁平化し、曲げ変形のほかにせん断変形も生じ、変形状態に応じて曲げ剛性も変化する。本定式では、このような要因をすべて無視している。しかしながら、ひずみエネルギー最小の仮定で簡単に納まり形状をかなりの精度で推定できることが判明した。実用上重要な三次元空間内の納ま

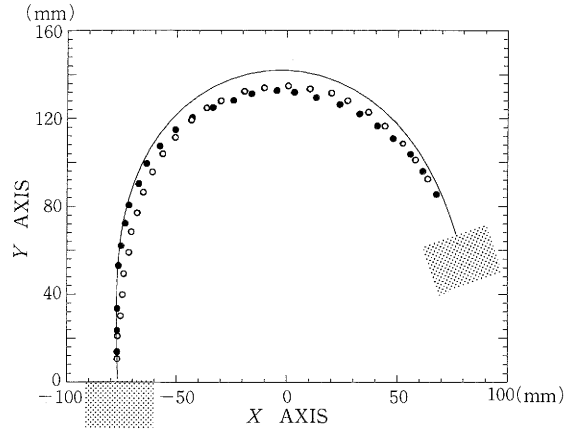


図5 数値計算と実測によるゴム・ホース納まり形状の比較

り形状を推定するプログラムを今後作成する際には、上記の要因を加味して精度を向上させる予定である。末尾ながら、ゴム・ホースの実測値を比較のため御提供下さった日産自動車(株)の萩原一郎氏に謝意を表する。

(1988年10月14日受理)

## 参 考 文 献

- 1) 半谷裕彦, 川口健一; 不安定リンク構造の安定化移行過程と形状決定解析, 生産研究, 40巻, 6号(1988), pp. 282-285.
- 2) Konopasek, M. and Hearle, J. W. S.; Computational Theory of Bending Curves—part I: The Initial Value Problem for the Three-dimensional Elastic Bending Curve, Fibre Science and Technology, Vol. 1, No. 5 (1972), pp. 1-28.
- 3) 赤坂 隆; 数値計算, コロナ社, (1974).