研究速報
特集 4
UDC 533.6.01 : 532.517 : 532.526

主流が一方向流の乱流場の漸近解と境界条件

On the Boundary Condition for the Unidirectional Turbulent Flow

竹光信正*
Nobumasa TAKEMITSU

1．緒　　言

工学上対象となる自動車周辺の流れ[1]，建物内外の流れ[2]などの乱流計算においては，その境界条件は層流計算のように物体の壁面まで格子がきれないために，一般に困難な問題となっている．もちろんこうした境界条件は，本来境界の状況に応じて与えるべきものであるが，境界条件自体の解析的な性質がわかっていないこともあって，現在のところ試行錯誤的に与えているのが実情のようである．

以下，k-ε 2方程式モデルに話を限る．たとえばk-εモデルの代表的な境界条件の一つである壁関数の導出は対数速度分布の存在を前提としており，レイノルズ応力がほぼ一様になる領域（壁座標で40～100）で発生項と消滅項がバランスするという実験事実に基づいて導かれている[3),4)]．したがって，壁関数が境界条件として標準k-εモデル[5)]と適正であるか否かについては，いままで全くわかっていなかったように思われる．幸い，標準k-εモデルは壁関数を漸近解の初項としてもつことを著者が証明した[6)]．すなわち，標準k-εモデルの境界条件の一つの与え方として，壁関数は標準k-εモデルと適正である．ただし，標準k-εモデルは2次の漸近解が発散項をもつので，数学的に適正なモデルではない[6)]．本論文において，工学上の観点からk-εモデルの境界条件として壁関数にかわる適用性の広い境界条件を漸近解を使って提案する．

2．主流が一方向流の乱流場

座標系を図1のようにとり，流れ場の代表速度V，代表長さLを使って無次元化

$$\left.\begin{array}{l} x_a \to L x_a,\ \ U_a \to V U_a,\ \ P \to \rho V^2 P,\ \ \nu_e \to \nu \nu_e, \\ k \to V^2 k,\ \ \varepsilon \to (V^3/L)\varepsilon,\ \ R_{ab} \to V^2 R_{ab} \end{array}\right\} \quad (1)$$

x_a：位置ベクトル，　U_a：速度ベクトル，
P：主流の圧力，　ν_e：うず粘性率，
k：乱流エネルギー，　ε：エネルギー散逸率
R_{ab}：Reynolds応力，　ν：流体の動粘性係数

を施し，u_τを摩擦応力として変換

$$\left.\begin{array}{l} U = (u_\tau/\kappa)\, U^*,\ \ k = (u_\tau^2/\sqrt{C_\nu})\, k^*, \\ \varepsilon = (u_\tau^3/\kappa)\, \varepsilon^*, \\ \nu_e = R_e \kappa u_\tau \nu_e^*,\ \ R_{12} = u_\tau^2 R_{12}^*,\ \ R_e = VL/\nu \end{array}\right\} \quad (2)$$

を施すと，改定k-εモデル[13)]は

$$\nu_e^* \frac{\partial U^*}{\partial y} = 1 + \Pi y,\ \ \Pi = \frac{\partial P/\partial x}{u_\tau^2} \quad (3)$$

$$\nu_e^* \left(\frac{\partial U^*}{\partial y}\right)^2 - \varepsilon^* + \lambda \left\{ \frac{\partial}{\partial y}\left(C_{k1} \nu_e^* \frac{\partial k^*}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(C_{u1} \nu_e^* \frac{k^*}{\varepsilon^*} \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial y}\right) \right\} = 0 \quad (4)$$

$$C_{\varepsilon 1} \nu_e^* \frac{\varepsilon^*}{k^*} \left(\frac{\partial U^*}{\partial y}\right)^2 - C_{\varepsilon 3} \frac{{\varepsilon^*}^2}{k^*} + \lambda \left\{ \frac{\partial}{\partial y}\left(C_{\varepsilon 4} \nu_e^* \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial y}\right) - \frac{\varepsilon^*}{k^*} \frac{\partial}{\partial y}\left(C_{\varepsilon 5} \nu_e^* \frac{\partial k^*}{\partial y}\right) \right\} + \lambda \left\{ -C_{\varepsilon 6} \frac{{k^*}^2}{{\varepsilon^*}^2} \left(\frac{\partial \varepsilon^*}{\partial y}\right)^2 + C_{\varepsilon 7} \frac{k^*}{\varepsilon^*} \frac{\partial k^*}{\partial y} \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial y} - C_{\varepsilon 8} \left(\frac{\partial k^*}{\partial y}\right)^2 \right\} = 0 \quad (5)$$

$$\lambda = k^2/\sqrt{C_\nu}$$

$$\nu_e^* = \frac{{k^*}^2}{\varepsilon^*} \quad (6)$$

$$R_{12}^* = \nu_e^* \frac{\partial U^*}{\partial y} \quad (7)$$

と書ける[14)]．ここで，C_ν，κ，C_{k1}，C_{k2}，$C_{\varepsilon n}(n=1 \sim 8)$はモデル定数である．

3．漸近解の初項

いま，yが小さく$1 \gg \Pi y \mid (u_\tau = const.)$として，方程式系(3)～(6)の初項を

$$\partial U^*/\partial y = U_0 y^p,\ \nu_e^* = \nu_0 y^q,\ k^* = k_0 y^r,\ \varepsilon^* = \varepsilon_0 y^s \quad (8)$$

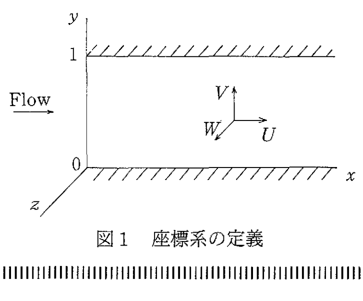


図1　座標系の定義

*東京大学生産技術研究所　第1部

の形に仮定して代入すると，それぞれ

$$\nu_0 U_0 y^{P+q} = 1 \tag{9}$$

$$\underset{\text{(発生項)}}{\nu_0 U_0^2 y^{2P+q}} - \underset{\text{(消滅項)}}{\varepsilon_0 y^s} + \underset{\text{(拡散項)}}{\lambda \nu_0 k_0 (q+r-1)(rC_{k1} - sC_{k2})} y^{q+r-2} = 0 \tag{10}$$

$$\underset{\text{(発生項)}}{C_{\varepsilon1} \nu_0 \frac{\varepsilon_0}{k_0} U_0^2 y^{2P+q-r+s}} - \underset{\text{(消滅項)}}{C_{\varepsilon3} \frac{\varepsilon_0^2}{k_0} y^{2s-r}} + \underset{\text{(拡散項)}}{\lambda \nu_0 \varepsilon_0 \{s(q+s-1)C_{\varepsilon4} - r(q+r-1)C_{\varepsilon5}\} y^{q+s-2}} + \underset{\text{(非線形相互作用項)}}{\lambda k_0^2 (-s^2 C_{\varepsilon6} + rsC_{\varepsilon7} - r^2 C_{\varepsilon8})} y^{2r-2} = 0 \tag{11}$$

$$\nu_0 y^q = \frac{k_0^2}{\varepsilon_0} y^{2r-s} \tag{12}$$

が得られる．

式(9)，(12)から

$$\nu_0 U_0 = 1, \quad p+q = 0 \tag{13a,b}$$

$$\nu_0 = k_0^2 \varepsilon_0, \quad q = 2r-s \tag{14a,b}$$

が得られる．また，式(10)からは

(1)　$2p+q=s$，$\nu_0 U_0^2 - \varepsilon_0 = 0$　(15a, b)

(2)　$2p+q=q+r-2$，$\nu_0 U_0^2 + \lambda \nu_0 k_0 (q+r-1)(rC_{k1} - sC_{k2}) = 0$　(16a, b)

(3)　$s=q+r-2$，$-\varepsilon_0 + \lambda \nu_0 k_0 (q+r-1)(rC_{k1} - sC_{k2}) = 0$　(17a, b)

(4)　$2p+q=s=q+r-2$，$\nu_0 U_0^2 - \varepsilon_0 + \lambda \nu_0 k_0 (q+r-1)(rC_{k1} - sC_{k2}) = 0$　(18a, b)

の4通りの可能性が得られ，式(11)からは

(a)　$2p+q-r+s=2s-r$,
　$C_{\varepsilon1} \nu_0 (\varepsilon_0/k_0) U_0^2 - C_{\varepsilon3} (\varepsilon_0^2 - k_0) = 0$　(19a, b)

(b)　$2p+q-r+s=q+s-2$,
　$C_{\varepsilon1} \nu_0 (\varepsilon_0/k_0) U_0^2 + \chi_1 = 0$　(20a, b)
　$\chi_1 = \lambda \nu_0 \varepsilon_0 \{s(q+s-1)C_{\varepsilon4} - r(q+r-1)C_{\varepsilon5}\}$

(c)　$2p+q-r+s=q+s-2$,
　$C_{\varepsilon1} \nu_0 (\varepsilon_0/k_0) U_0^2 + \chi_2 = 0$　(21a, b)
　$\chi_2 = \lambda k_0^2 (-s^2 C_{\varepsilon6} + rsC_{\varepsilon7} - r^2 C_{\varepsilon8})$

(d)　$2s-r=q+s-2$, $-C_{\varepsilon3}(\varepsilon_0^2 k_0) + \chi_1 = 0$　(22a, b)

(e)　$2s-r=2r-2$, $-C_{\varepsilon3}(\varepsilon_0^2 k_0) + \chi_2 = 0$　(23a, b)

(f)　$q+s-2=2r-2$,　$\chi_1 + \chi_2 = 0$　(24a, b)

(g)　$2p+q-r+s=2s-r=q+s-2$,
　$C_{\varepsilon1} \nu_0 (\varepsilon_0/k_0) U_0^2 - C_{\varepsilon3} (\varepsilon_0^2/k_0) + \chi_1 = 0$　(25a, b)

(h)　$2p+q-r+s=2s-r=2r-2$,
　$C_{\varepsilon1} \nu_0 (\varepsilon_0/k_0) U_0^2 - C_{\varepsilon3} (\varepsilon_0^2/k_0) + \chi_2 = 0$　(26a, b)

(i)　$2p+q-r+s=q+s-2=2r-2$,
　$C_{\varepsilon1} \nu_0 (\varepsilon_0/k_0) U_0^2 + \chi_1 + \chi_2 = 0$　(27a, b)

(j)　$2s-r=q+s-2=2r-2$,
　$-C_{\varepsilon3} (\varepsilon_0^2/k_0) + \chi_1 + \chi_2 = 0$　(28a, b)

(k)　$2p+q-r+s=2s-r=q+s-2=2r-2$　(29a, b)
　$C_{\varepsilon1} \nu_0 (\varepsilon_0/k_0) U_0^2 - C_{\varepsilon3} (\varepsilon_0^2/k_0) + \chi_1 + \chi_2 = 0$

の11通りの可能性が得られる．

実際に，式(13)～(29)を連立させて解くと，壁関数のべき

$$P=-1, \quad q=1, \quad r=0, \quad s=-1 \tag{30}$$

を解としてもつのは，(15)～(18)，(19)～(29)の組み合わせで言うと，

(15)と(21)～(23)，(15)と(25)～(29)，
(18)と(19)，(18)と(39)～(48)　(31)

の18通りである．ただし，

（i）　乱流解が得られない場合．

（ii）　方程式が独立でない場合．

は除外した．また，式(30)が得られるとき，たとえば式(18)の係数$q+r-1$が0になることを注意しておく．さらに，組み合わせ(31)にはε方程式の係数$C_{\varepsilon n}$（$n=1$～8）が0となる場合も許している．

この結果から，k方程式に発生項と消滅項があれば，ε方程式には発生項，あるいは消滅項がなくても壁関数を解にもつ（see also (10)，(11)）．標準k-εモデルはそれらのうちの一つの選択になっており，改定k-εモデルは最も一般的な選択になっている．

結局，べき(30)は壁関数

$$U^* = ln y^+ + A^+, \quad \nu_e^* = y, \quad k^* = 1, \quad \varepsilon^* = 1/y \tag{32}$$

$$y^+ = R_e u_\tau y, \quad A^+ = const,$$

を与える．ここで，係数U_0，ν_0，k_0，ε_0，$R_e u_\tau$は実験[10),15)]により定まるものである．

なお，このときReynolds応力は

$$R_{12}^* = 1 \tag{33}$$

である．

次に，もう一つの漸近解の可能性として，u_τが小さくyも小さい場合（したがって，$1 \ll |\Pi y|$となる）が考えられる．このとき，式(3)は

$$\nu_e^* \frac{\partial U^*}{\partial y} = \Pi y \tag{34}$$

となるから，方程式系(34)，(4)～(6)の初項を式(8)の形に仮定して代入すると，(9)のかわりに

$$\nu_0 U_0 = \Pi, \quad p+q = 1 \tag{35}$$

が得られる．式(10)～(29)は同じである．

方程式(35)，(15)～(29)を連立させて解くと，解

$$p=-1/2, \quad q=3/2, \quad r=1, \quad s=1/2 \tag{36}$$

をもつのは(15)～(29)の組み合わせで言うと，たとえば

(15)と(20)～(23)，etc,　(37)

のような35通りである[14)]．これらのうち，最も一般性のあるのは改定k-εモデルで，モデル定数の間に

$$\nu_0 U_0^2 - \varepsilon_0 + (3/2) \lambda \nu_0 k_0 (C_{k1} C_{k2}/2) = 0 \tag{38}$$

$$C_{\varepsilon1} \nu_0 (\varepsilon_0/k_0) U_0^2 - C_{\varepsilon3} (\varepsilon_0^2/k_0) + \lambda \nu_0 \varepsilon_0 (C_{\varepsilon4}/2 - 3C_{\varepsilon5}/2) + \lambda k_0^2 (-C_{\varepsilon6}/4 + C_{\varepsilon7}/2 - C_{\varepsilon8}) = 0 \tag{39}$$

の関係がある．

研　究　速　報

解(36)を使うと，U^*，ν_e^*，k^*，ε^*初項は

$$U^*=2U_0y^{1/2}+B^+,\quad \nu_e^*=\nu_0y^{3/2},\quad k^*=k_0y,$$
$$\varepsilon^*=\varepsilon_0y^{1/2} \tag{40}$$
$$B^+;\ const,\quad \nu_0U_0=\Pi,\quad \nu_0=k_0^2/\varepsilon_0$$

となる．このような速度分布は，はく離点近傍の境界層において，実験的に確認されており[16),17)]，また，理論的にもいくつかの仮定を設けて導かれている[17),18)]．したがって，この解析は，k-εモデルははく離点近傍においても流れの状態を正しく記述できる可能性を示している．なお，この場合のReynolds応力は(7)，(40)から

$$R_{12}^*=\nu_0U_0y$$

となる．

4．漸近解とその存在領域

以上の解析から，k-εモデルは摩擦応力u_τの大きさにより，その漸近解の初項として壁の近くで2つの解の形の可能性があることが明らかになった．既報の論文[6),13)]において論じたのは，壁関数を初項としてもつ場合である．これは，Reynolds応力で言えばこれが一定の層が支配的である場合で，2次元平行平板間の乱流場で圧力勾配がx方向に一定である場合，平板上の乱流境界層で$\partial p/\partial x=0$などの場合に相当する．本節では，既報の論文で得た解を使って，2次元平行平板間の実験データ，およびHoriutiによるLESのデータベース[12)]を使って漸近解の存在領域を調べることにする．

さて，既報の論文において得られた漸近解は，yが小さいとき

$$\left.\begin{aligned}&U^*=lny^+-(a_1+2)y+A^+,\quad \nu_e^*=(a_0+a_1y)y\\&k^*=b_0+b_1y,\quad \varepsilon^*=(C_0+C_1y)/y\end{aligned}\right\}\tag{41}$$

の形に展開でき，yが大きいとき（Channelの中央）

$$\left.\begin{aligned}&U^*=U_0+U_2Y^2,\quad \nu_e^*=A_0+A_2Y^2\\&k^*=B_0+B_2Y^2,\quad \varepsilon^*=C_0+C_2Y^2\end{aligned}\right\}\tag{42}$$
$$Y=y-1/2,\quad U_2=-1/A_0$$

の形に展開できる．ここで，式(41)におけるa_0，b_0，c_0は漸近解からは1であるが，データや計算の信頼性を考慮して未知数として計算する．

実際に，(41)，(42)の形に実験データ[7)~11)]とLESのデータベース[12)]を最小二乗近似すると，

$$\left.\begin{aligned}&a_0=1.0017\pm0.1960,\\&a_1=-(2.9603\pm1.3211)\\&A_0=0.0824\pm0.0034,\quad A_2=0.4844\pm0.3206\end{aligned}\right\}\tag{43}$$
$$\left.\begin{aligned}&b_0=1.0676\pm0.2982,\\&b_1=-(2.7668\pm1.5836)\\&B_0=0.1972\pm0.0295,\quad B_2=5.0383\pm1.4459\end{aligned}\right\}\tag{44}$$
$$\left.\begin{aligned}&c_0=0.9000\pm0.1000,\\&c_1=-(2.9661\pm4.0954)\\&C_0=0.4194\pm0.2189,\quad C_2=22.367\pm13.302\end{aligned}\right\}\tag{45}$$
$$U_0=8.7552\sim8.7903,\quad U_2=-10.819\sim-9.7021 \tag{46}$$

が得られる[14)]．

次に，0次の解(壁関数：式(41)で初項のみ考慮する)と実験データ[9)]を使ってモデル定数C_νを評価すると図2のようになる．この図の意味するところは，モデル定数C_νは通常流れ場全体で一定と考えられているが，境界条件として壁関数を与えるのであれば，モデル定数C_νの分布もまたこの図のように与えないと方程式系として正しい解が得られないことを意味している．たとえば，計算の都合上壁に最も近い格子点が$y=0.05$（ただし，$y^+\gtrsim30$)の位置にあれば，境界条件を壁関数で与えて$C_\nu\fallingdotseq0.1$としてよいが，もし壁に最も近い格子点が$y=0.15$の位置にあれば，境界条件を壁関数で与えることも，$C_\nu\fallingdotseq0.1$とすることも許されない（図2からは，$C_\nu\fallingdotseq0.17$である)．この事情は，モデル定数κについても同じである．

そこで，式(2)と漸近解(41)，(42)，(43)～(46)を使ってモデル定数C_νを評価すると図3が得られる．この図から明らかなように，漸近解を使うとモデル定数一定の領域は図2に比べて大きく広がる．

さらに，実験データ[8)~10)]やLESの結果[12)]と壁関数，漸近解を比較すると図4のようになる．これらの図からわかるように，境界条件として壁関数と漸近解と，どちらが適切であるかは一目瞭然であろう．

すなわち，従来境界条件として使っていた壁関数の存

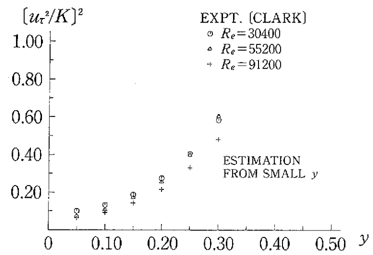


図2　壁関数を使ったモデル定数C_νの分布

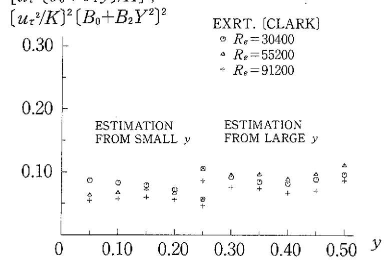
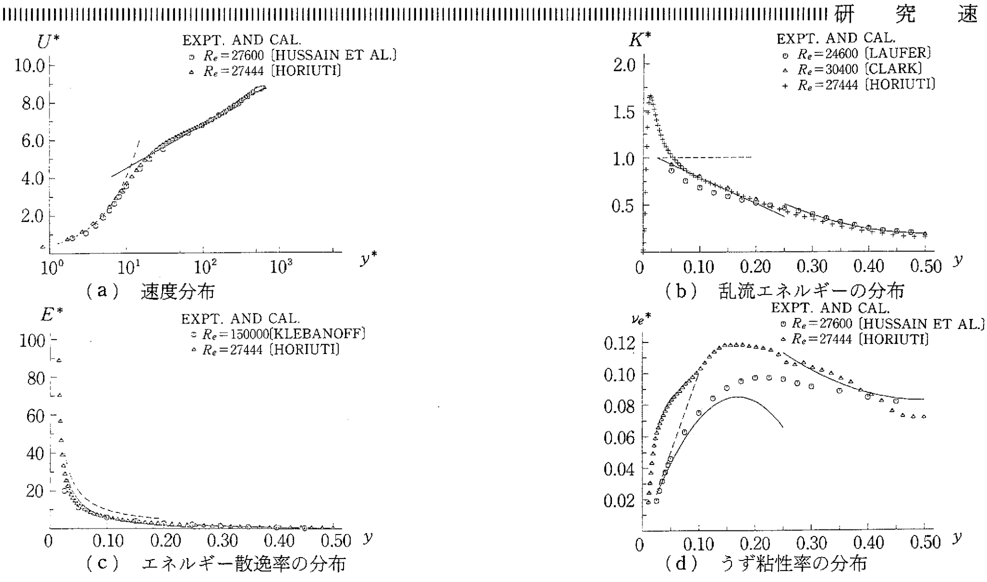


図3　漸近解によるモデル定数C_νの分布



（a）速度分布　（b）乱流エネルギーの分布　（c）エネルギー散逸率の分布　（d）うず粘性率の分布

図4　実験データと壁関数（…），漸解解（—）の比較

在領域はきわめて狭く，対数速度分布の存在領域の広さとつじつまをあわせるために，たとえば乱流エネルギーkの分布はy^+の座標でひきのばして説明されてきた．すでに示したように，また本論文の解析で示したように，壁関数はk-εモデルの初項として確かに存在する．しかし，kの分布をy^+の座標でひきのばしてみているのに，たとえばエネルギー散逸率εの分布をyの座標でみるのは明らかにおかしい．

5．結　　言

以上の解析から次のことが結論できる．

（1）主流が一方向流の場合，k-εモデルは摩擦応力u_τの大きさにより，その漸近解の初項として2つの解の形の可能性がある．一つはu_τが大きくReynolds応力が一定の平衡層が支配的な場合で，他の一つはu_τが小さくReynolds応力も小さい場合である．

（2）k-εモデルの境界条件として壁関数は一つの適正な境界条件になっている．しかし，壁関数の存在領域は，速度分布を除ききわめて狭いので一般的な境界条件として(43)～(46)を係数にもつ漸近解(41)を境界条件とすることを提案する．

謝　　辞

本研究をすすめるにあたり，本所NSTグループの御支持と御討論を戴きました．とくに，本所吉澤徹教授，堀内潔助手には貴重な御討論，およびLESのデータベースを利用させて戴きました．ここに記して厚く感謝致します．

(1988年10月11日受理)

参考文献

1) Kitoh, K., Kobayashi, T and Morooka, H., Proc. Int. Conf. Comput. Mech., 1986, Tokyo, Springer-Verlag
2) Murakami, S., Kato, S. and Suyama, Y., ASHRAE Trans., 1987, Vol. 93, pt. 2, 621.
3) Launder, B.E. and Spalding, D.B., Mathematical Models of Turbulence, (1972), Academic Press, London and New York, p. 102
4) Patel, V.C.ほか2名, AIAAJ., 23-9 (1985), 1308
5) Jones, W.P. and Launder, B.E., Int. J. Heat Mass Transt., 15 (1972), 301
6) 竹光, 機論, 59—494, B(昭62), 2921, Takemitsu, N., J. Fluids Eng., submitted
7) Lauter, J., NACA TN2123 (1950)
8) Klebanoff, P.S., NACA TN3178 (1954)
9) Clark, J.A., J. Basic Eng., 90 (1968), 455
10) Hussain, A.K.M.F. and Reynolds, W.C., J. Fluid Eng., 97(1975), 568
11) Kreplin; H-P and Eckelmann, H., Phys. Fluids, 22-7 (1979), 1233
12) Horiuti, K., 2nd Int. Symp. on Transport Phenomera in Turbulent Flows, Tokyo, Oct., 1987, 735
13) 竹光, 機論, 53—496, (昭62), 3629., Takemitsu, N., J. Fluids Eng., submitted
14) 竹光, 機論, 投稿中, Takemitsu, N., J. Fluids Eng., submitted
15) Hinze, J.O., Turbulence, Second Edition (1975), Mc Graw Hill Book company, pp. 626-629
16) Schbauer, G.B. and Klebanoff, P.S., NACA Rep. No. 1030 (1951)
17) Townsend, A.A., J. Fluid Mech., 11-1(1961), 97
18) Stratford, B.S., J. Fluid Mech., 5-1(1959), 1