研　究　速　報

特 集 5

UDC 532.517.4：533.6.011.1

k-εモデルによる円すいディフューザ内乱流の数値予測
——第2報 壁関数・BFC法および低レイノルズ数型モデル・BFC法——

NUMERICAL PREDICTION OF TURBULENT FLOW IN A CONICAL DIFFUSER USING k-ε MODEL
——2nd Rep. WF・BFC method and LRN model・BFC method——

小林敏雄*・何　永森*・森西洋平*
Toshio KOBAYASHI, Yong sen HE and Youhei MORINISHI

1．ま え が き

前報に引きつづき，円すいディフューザ内の乱流計算法を確立するために，$\theta=4°$の円すいディフューザ内乱流を対象とした数値計算を行う．前報においてすでに，1/7乗則・BFC法k-εモデルによる数値計算手法を構成し，その計算結果について報告した[1]．本報では，壁関数・BFC法および低Re数型・BFC法k-εモデルによる数値計算手法を構成し，両手法による流れ場の数値計算を実行する．また，以上3つのBFC計算手法による流れ場の予測結果を実測値と比較し，各手法の予測性能について検討を行う．

2．数値計算手法

2.1 基礎方程式

本研究は前報[1]と同様の仮定にする．乱流モデルとして次の2種類のものを用いる．

モデルI　円すいディフューザ用高Re数型k-εモデル

モデルII　円すいディフューザ用低Re数型k-εモデル

モデルIに用いる基礎方程式は前報[1]と同様のものである．モデルIIに用いる基礎方程式について，連続の式，運動方程式およびkの輸送方程式はモデルIと同様のものを用いる．εの式およびν_tについては，壁近傍の乱流特性を考慮して補正された次のものを用いる．

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}\varepsilon)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\bar{v}\varepsilon)=\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{1}{Re}+\frac{\nu_t}{\sigma_2}\right)\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}\right]+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\left(\frac{1}{Re}+\frac{\nu_t}{\sigma_2}\right)\frac{\partial\varepsilon}{\partial r}\right]+C_1\frac{\varepsilon}{k}G-C_2f_2\frac{\varepsilon^2}{k} \quad (1)$$

$$G=\nu_t\left[2\left\{\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\bar{v}}{r}\right)^2\right\}+\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial r}+\frac{\partial\bar{v}}{\partial x}\right)^2\right]$$

$$\nu_t=C_Df_\mu\frac{k^2}{\varepsilon} \quad (2)$$

$$f_\mu=[1-exp(-y^+/A_\mu)]^2(1+B_\mu/R_t^{3/4}) \quad (3)$$

$$f_2=[1-0.3\cdot exp\{-(R_t/A_u)^2\}][1-exp(-y^+/B_u)]^2 \quad (4)$$

上式中，$R_t=k^2/\nu\varepsilon$，$y^+=u_\tau y/\nu=R_\tau$，$A_\mu=26$，$B_\mu=4.1$，$A_u=6.5$，$B_u=6.0$．また，$\sigma_1=1.0$，$\sigma_2=1.3$，$C_1=1.44$，$C_2=1.92$，$C_D=0.09$．

2.2 壁関数を用いた高Re数型k-εモデル・BFC法（モデルI）

高Re数型k-εモデルを採用し，壁面境界条件には壁関数を用いる．ディフューザの傾斜面形状を表現するため，座標変換法によるBFC法を用いる．

壁面最近傍格子点Pにおいて，壁面に平行な速度成分$V_{/\!/P}$に対し次の対数速度分布の仮定が成立するものとする（図1参照）．

$$V_{/\!/P}^+=\frac{1}{\kappa}\ell n(Ey_P^+) \quad (\kappa=0.4,\ E=9.025) \quad (5)$$

上式中，$V_{/\!/P}^+$はP点の速度ベクトルの壁面に平行な方向の成分を壁摩擦速度u_τで無次元化した値，y_P^+はP点の壁座標である．壁面最近傍格子点Pにおいて乱流エネルギの局所平衡仮定を適用することにより，u_τおよびy_P^+は次

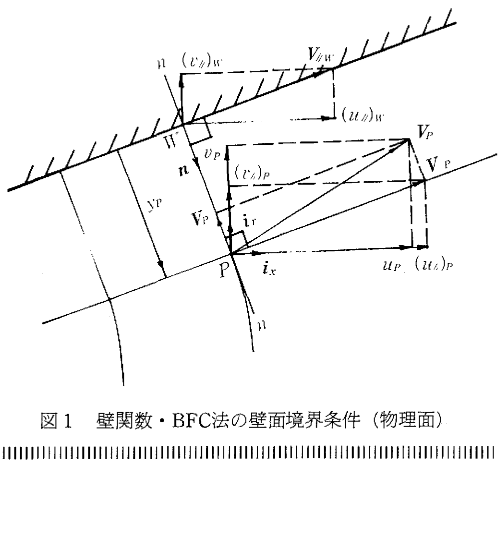

図1　壁関数・BFC法の壁面境界条件（物理面）

*東京大学生産技術研究所　第2部

のように与えられる．

$$u_\tau \fallingdotseq (C_D{}^{1/2} k_P)^{1/2} \tag{6}$$

$$y_P^+ = u_\tau y_P / \nu \tag{7}$$

式(5)より，P点上における$V_{/\!/P}$のn方向(壁面の法線方向）速度勾配が次のように与えられる．

$$\left.\frac{dV_{/\!/}}{dn}\right|_{y=y_P} = \frac{U_\tau}{\kappa y_P} = \frac{1}{\ell n(E y_P^+)} \frac{V_{/\!/P}}{y_P}$$

$$\fallingdotseq \frac{V_{/\!/P} - V_{/\!/W}}{y_P} \tag{8}$$

上式中，$V_{/\!/}$は壁面に平行な方向の速度ベクトル，$V_{/\!/P}$はP点上の$V_{/\!/}$，$V_{/\!/W}$は壁面上のすべり速度ベクトル，y_Pは壁面から格子点Pまでの法線方向距離である．式(8)より壁面上のすべり速度ベクトル$V_{/\!/W}$が次のように与えられる．

$$V_{/\!/W} = \left\{ 1 - \frac{1}{\ell n(E y_P^+)} \right\} V_{/\!/P} \tag{9}$$

式(9)を円筒座標でのx，r方向速度成分に適用するため，以下に示すベクトルの関係式を導入する（図1参照）．

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{n} &= n_x \boldsymbol{i}_x + n_r \boldsymbol{i}_r \\ \boldsymbol{V}_P &= u_P \boldsymbol{i}_x + v_P \boldsymbol{i}_r \\ \boldsymbol{V}_{/\!/P} &= \boldsymbol{V}_P - \boldsymbol{V}_{\perp P} \\ \boldsymbol{V}_{\perp P} &= V_{\perp P} n_x \boldsymbol{i}_x + V_{\perp P} n_r \boldsymbol{i}_r \\ V_{\perp P} &= \boldsymbol{n} \boldsymbol{V}_P = n_x u_P + n_r v_P \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

$\boldsymbol{n}$は壁面Wにおけける単位法線ベクトルである（x，r方向成分がn_x，n_r）．これらを用い，式(9)の$V_{/\!/W}$をx，r方向成分（$u_{/\!/}$)$_W$と（$v_{/\!/}$)$_W$で表現すると次のようになる．

$$(u_{/\!/})_W = \left\{ 1 - \frac{1}{\ell n(E y_P^+)} \right\} (u_P - V_{\perp P} n_x) \tag{11a}$$

$$(v_{/\!/})_W = \left\{ 1 - \frac{1}{\ell n(E y_P^+)} \right\} (v_P - V_{\perp P} n_r) \tag{11b}$$

式(11)を用い格子点P上の速度成分u_Pおよびv_Pを与えれば，対数則速度分布に対応する壁面上のすべり速度$(u_{/\!/})_W$および$(v_{/\!/})_W$を壁面境界条件として与えることができる．

kの壁面境界条件として$\partial k/\partial n = 0$を用いる．また，$P$点での$\varepsilon$の値について次の補助式を用いる．

$$\varepsilon_P = C_D^{3/4} k_P^{3/2} / (\kappa y_P) \tag{12}$$

以上の壁関数を適用するためには，格子点Pが壁座標y_P^+に対し$30 < y_P^+ < 300$の条件を満足することが必要とされている[2]．圧力の壁面境界条件としては$\partial P/\partial n = 0$を用いる．

2.3　低Re数型k-εモデル・BFC法（モデルII）

壁面のごく近傍では分子粘性が支配的となるために乱れのRe数は小さくなる．また壁の存在により壁方向の運動は抑制され，非等方性が増大する．この領域で先の高Re数型k-εモデル（モデルI）は適用できない．モデルIIの低Re数型k-εモデルはこの2つの影響を考慮したもので，壁面近傍に補正関数を導入する．つまり，ν_tのモデル化には式(2)を用いる[3]．これは壁乱流の漸近挙動のモデル化のために式(3)の補正関数f_μを導入したものである．またε輸送方程式中には式(4)の補正関数f_2を導入する[4]．

ディフューザの形状表現にはBFC法を用いる．ただし，壁面でno-slip条件を課せるように壁面近傍でより細い格子を生成する必要がある．壁面境界条件として速度およびkに対しno-slip条件を課す．εについては壁面近傍の理論的挙動に近づくよう壁面で有限な値を与える．ここでは次の3種類のものを用いている．

(a) $\varepsilon_W^+ = \nu \varepsilon_W / u_\tau^4 = 0.1$，(b) $\varepsilon_W^+ = \nu \varepsilon_W / u_\tau^4 = 0.2$[5]，
(c) $\varepsilon_W = \nu (\partial^2 k / \partial y^2)_W$[3]．

3．ディフューザ内乱流の数値計算

本研究で計算対象とする流れ場は前報[1]と同様，図2に示す$\theta = 4°$の軸対称円すいディフューザ内乱流である．このような流れ場について，モデルIおよびモデルIIによる数値計算を実行する．各数値計算例の境界条件および計算条件を表1にまとめて示す．比較のために前報[1]

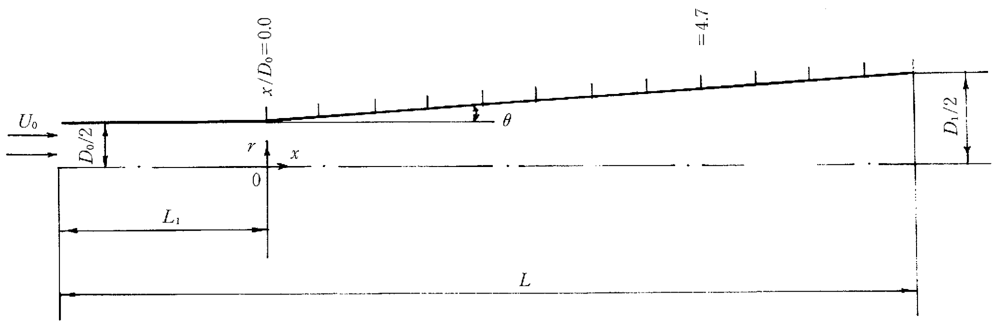

図2　円すいディフューザのモデル流路

表1　計算条件と境界条件

ケース			A−1	B−1	A−2	B−2	C−2	B−3a	B−3b	B−3c
計算手法			1／7乗則・BFC法		壁関数・BFC法			LRNモデル・BFC法		
モデル			ディフューザ用高Re数型k-εモデル					ディフューザ用低Re数型k-εモデル		
境界条件	壁面	$\bar{u}$	1／7乗則		壁関数			no-slip		
		k	$\partial k/\partial n=0$（n：法線方向）					no-slip		
		ε	補助式					$\varepsilon_w^+=0.1$	$\varepsilon^+=0.2$	$\varepsilon_w=\nu\left(\frac{\partial^2 k}{\partial y^2}\right)_w$
	入口	$\bar{u}$	$\bar{u}_{in}=\bar{u}(r)$（実験値）				一様流入	$\bar{u}_{in}=\bar{u}(r)$（実験値）		
		k	$k_{in}=3.2\times10^{-3}$	$k_{in}=k(r)$	$k_{in}=3.2\times10^{-3}$	$k_{in}=k(r)$	$k_{in}=3.2\times10^{-3}$	$k_{in}=k(r)$		
		ε	$\varepsilon_{in}=7.2\times10^{-4}$	$\varepsilon_{in}=\varepsilon(r)$	$\varepsilon_{in}=7.2\times10^{-4}$	$\varepsilon_{in}=\varepsilon(r)$	$\varepsilon_{in}=7.2\times10^{-4}$	$\varepsilon_{in}=\varepsilon(r)$		
格子数			150×50							
時間刻み			1/200	1/100	1/100	1/1000				

の1／7乗則・BFC法を併記する．計算スキームについては前報のBFC法と同様である．入口断面において次の3種類の境界条件を設定する．(A) $u_{in}=u(r)$，k_{in}=一定，ε_{in}=一定．(B) $u_{in}=u(r)$，$k_{in}=k(r)$，$\varepsilon_{in}=\varepsilon(r)$．(C) $u_{in}=1.0$（一様流入），k_{in}=一定，ε_{in}=一定．上記中のu，k，εの分布にはLauferによる発達円管内乱流の実測値[6]を用いる．またkとεの一定値には実測値の断面内平均値を用いている．出口断面では自由流出条件を用いる．中心軸上では軸対称条件を課している．なお，格子生成手法としては文献7)の手法を用い，壁面上での差分格子を直交化させている．

4．計算結果と考察

各計算法による計算結果とOkwuobi[8]およびSingh[9]による実験結果と比較する．

4.1　流入条件の影響

図3および図4に，壁関数・BFC法による3種の流入

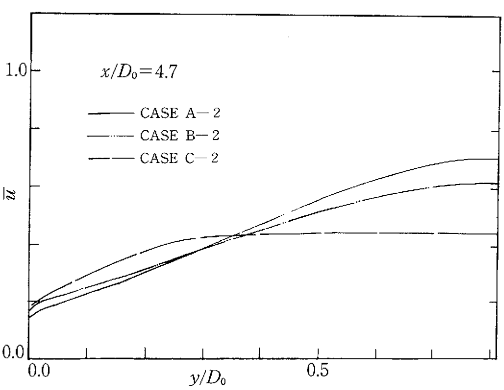

図3　主流方向速度分布（流入条件の影響）

条件を用いた$\bar{u}$，kの分布の計算結果を示す．図より流入条件の差の影響は単にディフューザ入口近くの流れのみならず，計算対象領域の後流部にまで及ぶことが図に示されている．

以下，$\bar{u}$，k，εともBの流入条件について比較する．

4.2　壁関数・BFC法と1／7乗則・BFC法の比較

図5および図6より壁関数・BFC法（ケースB−2）と1／7乗則・BFC法（ケースB−1）による$\bar{u}$およびkの計算結果はほぼ一致していることがわかる．前者の計算例において，式(9)中の係数$D_\ell=\{1-1/\ell n(Ey_p^+)\}=0.85077\sim0.85402$であった．一方，これに対応する1／7乗則・BFC法での$V_{/\!/w}$式中の係数$D_n=6/7=0.85714$である．これらにより，今回の計算例において，速度場の両境界条件の差異がわずかであることがわかる．なお，ケースB−2で壁面最近傍格子における壁座標y_p^+は100前後の値となっており，対数則が適用可能な領域となっている．

4.3　低Re数型k-εモデル・BFC法と壁関数・BFC法の比較

図5より両方法による$\bar{u}$の計算結果については前者（ケースB−3c）が後者（ケースB−2）より実験結果

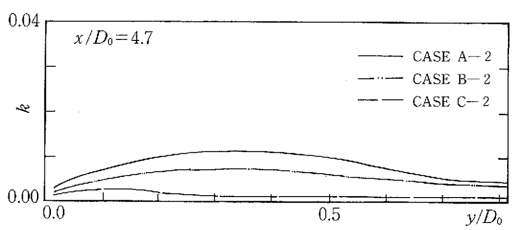

図4　乱流エネルギの分布（流入条件の影響）

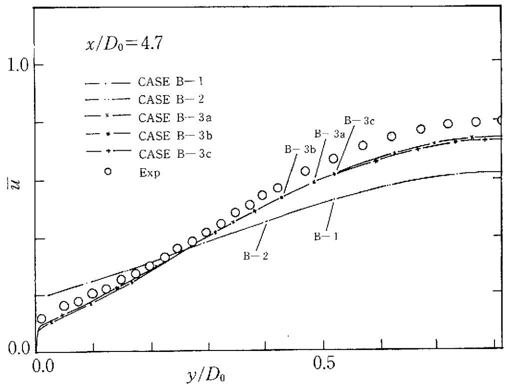

図5　主流方向速度分布（計算結果と実験結果の比較）

に近づくこと，後者は壁近傍で，すでに実験結果との差異を生じること，また，壁近傍の差異が連続の式を通し，管中心部まで及ぶことがわかる．

図6に両者のk分布はお互いに比較的似た傾向を示す．両者ともk分布のピーク点付近において実験結果との差異が大きくなる．その原因としては流入条件の与え方や，格子解像度の影響等が考えられる．

4.4　乱流散逸の境界条件の影響

ケースB−3a，B−3bおよびB−3cはそれぞれ(a)，(b)および(c)のε壁面境界条件による計算結果に対応している．図5より3者の$\bar{u}$分布の計算結果はほぼ同じ傾向をもつこと，3者とも実験結果と比較的よく一致していることがわかる．図6よりk分布については実験結果とは定量的に異なるものの，ε壁面境界条件による差異は小さいことがわかる．これらにより，今回の計算対象において，低Re数型モデルに対し用いた3種類のε壁面境界条件の違いによる流れ場への影響は小さいものと思われる．

5．ま　と　め

壁関数・BFC法および低Re数型・BFC法k-εモデルによる数値計算手法を構成し，両手法によるディフューザ内乱流の数値計算を実行した．また前報[1)]での1/7乗則・

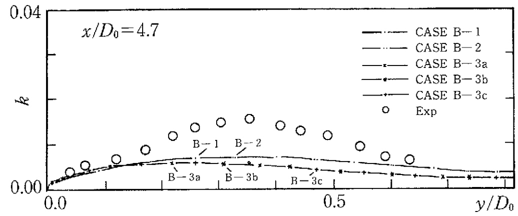

図6　乱流エネルギの分布（計算結果と実験結果の比較）

BFC法および本報での計算手法によるディフューザ流れ場の予測結果を実験結果と比較し，以下の結論を得た．

流入条件の違いによって，$\bar{u}$，kの計算結果は後流部まで影響を受ける．

今回の計算例において速度場の壁面境界条件（壁関数と1/7乗則）の差はわずかであった．kの計算結果に及ぶ影響も小さい．

低Re数型モデル・BFC法による$\bar{u}$の分布の計算結果は壁関数・BFC法によるものより実験結果に近い分布を示す．

低Re数型モデルに対し用いた3種類のε壁面境界条件の違いによる$\bar{u}$，kの計算結果の差異はわずかであった．

（1988年10月28日受理）

参　考　文　献

1) 何，森西，小林，生産研究，40-1（1988），39
2) 河村，第1回生研NSTシンポジウム講演論文集，（1986），63
3) Patel. V.C., Rodi. W, Scheuerer. G, AIAA, J. 23-9 (1982), 1308
4) 長野，新美，田川，第3回生研NSTシンポジウム講演論文集，(1988)，31
5) Rodi.　W，第10回NSTオープンセミナー，東大生研（NST研究グループ），(1988)，5
6) Laufer. J, NACA. Rep. 1174 (1953), 1
7) Steger. Sorenson, J. Comp. Phys., 33, (1979), pp. 405
8) Okwuobi. P.A.C, Azad. R.S., J. Fluid Mech., 57, part 3 (1973), 603
9) Singh. D., Azad. R.S., Proc. of Turbulence, (1981), 21