



研究速報

$$\nabla_j A^{ij} \equiv \frac{\Delta A^{ij}}{\Delta x^j} + A^{mj} \left\{ \begin{matrix} i \\ m j \end{matrix} \right\} \quad (9)$$

ただし,

$$\frac{\Delta}{\Delta x^j} \equiv \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^j} \sqrt{g} \quad (10)$$

を表す。また、クリストッフエルの記号は次のように定義される。

$$\left\{ \begin{matrix} i \\ m j \end{matrix} \right\} \equiv \frac{1}{2} g^{ic} \left( \frac{\partial g_{cm}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{ci}}{\partial x^m} - \frac{\partial g_{mj}}{\partial x^c} \right) \quad (11)$$

さらに、 $\sigma_\phi$ 、 $S_\phi$ の表現や $v_i$ の定義については従来の $k-\epsilon$ モデルのものと全く同じである。乱流輸送式中の生成項 $G$ は次のようになる。

$$G = g_{im} \tau_i^{jm} \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \quad (12)$$

### 3. 物理反変成分

簡単のため2次元で議論をすすめる。数学的な反変速度 ( $v^1, v^2$ ) の定義式は、よく知られた次式である。

$$\begin{cases} v^1 = \xi_x u + \xi_y v \\ v^2 = \eta_x u + \eta_y v \end{cases} \quad (13)$$

$(\xi_x, \xi_y)$  と  $(\eta_x, \eta_y)$  なるベクトルがそれぞれ物理空間において $\xi$ 一定、 $\eta$ 一定曲線の法線ベクトルであることを、および $v^i$ がそれらと  $(u, v)$  との内積になっていることを考えると、その法線ベクトル (局所基本ベクトル) の大きさが必ずしも1でないということから、反変成分 $v^i$ は「物理的」な意味をもたない仮想のものであることがわかる。しかるにコントロールボリューム界面ではその法線方向のfluxを考えるのであるから、(13)式に局所基本ベクトルの長さをかけてスケールの補正をすれば、界面に垂直な方向の物理的速度成分に比例する成分を表すことができる。ここではこれを物理反変成分とよぶことにする。

補正はさほど難しくはなく、スカラー、ベクトル、テンソルについて次のように変換すればよい。

- スカラー  $\phi = \phi$
- ベクトル  $v^{(i)} = \sqrt{g_{ii}} v^i$
- テンソル  $A^{(ij)} = \sqrt{g_{ii} g_{jj}} A^{ij}$  (14)

ここで $g$ は  $(x, y)$  から  $(\xi, \eta)$  への変換メトリックであり、2次元では次のようである。

$$\begin{aligned} g_{11} &= x_\xi^2 + y_\xi^2 & g_{22} &= x_\eta^2 + y_\eta^2 \\ g_{12} &= g_{21} = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta \\ g &= \det(g_{ij}) \\ (g^{ij}) &= (g_{ij})^{-1} \end{aligned} \quad (15)$$

長さのスケールについても次のように補正する。

$$x^{(i)} = \sqrt{g_{ij}} x^j \quad (16)$$

すなわち、微分演算子は次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial x^j} \Rightarrow \sqrt{g_{jj}} \frac{\partial}{\partial x^{(j)}} \quad (17)$$

(14)式を(1)~(4)式に代入し、微分演算子を(17)式のように表すと、物理反変成分を従属変数とした次式を得る。

$$\frac{\Delta v^{(i)}}{\Delta x^{(i)}} = 0 \quad (18)$$

$$\frac{\partial v^{(i)}}{\partial t} + \nabla_{(i)} (v^{(i)} v^{(i)} - \tau^{(i)}) = -g^{(jm)} \frac{\partial \phi}{\partial x^{(m)}} \quad (19)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla_{(i)} (\phi v^{(i)} - \Gamma_\phi g^{(jm)} \frac{\partial \phi}{\partial x^{(m)}}) = S_\phi \quad (20)$$

ここで、 $\nabla_{(i)}$ で表される物理絶対微分の定義式は次のように変わってくる。

- ベクトル  $\nabla_{(i)} v^{(i)} \equiv \frac{\partial v^{(i)}}{\partial x^{(i)}} + U^{(m)} \left( \begin{matrix} i \\ m j \end{matrix} \right) \quad (21)$

- 発散  $\nabla_{(i)} v^{(i)} \equiv \frac{\Delta v^{(i)}}{\Delta x^{(i)}} \quad (22)$

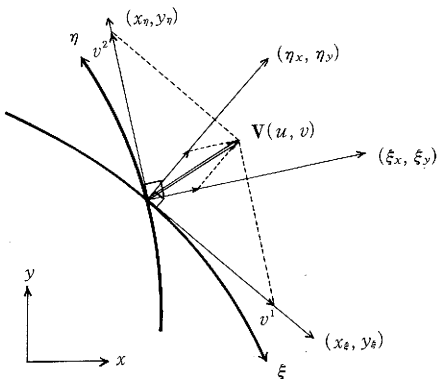


図1 反変成分の説明図

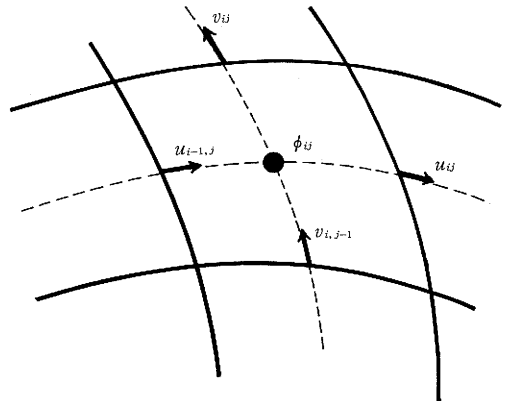


図2 スタガード格子

研究速報

研 究 速 報

表1 計算条件

差分格子	スタガード
時間スキーム	単段階陽解法
空間スキーム	2次中心 (乱流量はQUICK)
圧力解法	HSMAC法
格子数	66×20 (2次元)
レイノルズ数	10,000 (入口幅, 入口流速)
時間刻み	2 / 1000
divergence収束基準	2 / 1000

表2 境界条件

入 口	発達乱流
出 口	自由流出
上下固定壁面	壁法則 $u^+ = \begin{cases} y^+ & (y^+ \leq y_c^+) \\ (1/\kappa) \ln(Ey^+) & (y^+ > y_c^+) \end{cases}$ $y^+ = (C_\mu^{1/2} k)^{1/2} (y/\nu)$ $\tau_\omega / \rho = (C_\mu^{1/2} k)^{1/2} (u/u^+)$ $k$ : free slip $\epsilon = C_\mu^{3/4} k^{3/2} / (\kappa y)$ $k$ の輸送方程式中の $G$ と $\epsilon$ $G = (\tau_\omega / \rho) (u/y)$ $\epsilon = C_\mu k^2 (\rho / \tau_\omega) (u/y)$
$k$ - $\epsilon$ モデル定数	$C_\mu = 0.09, C_1 = 1.44, C_2 = 1.92$ $\sigma_k = 1.00, \sigma_\epsilon = 1.3$

○テンソル

$$\nabla_{(i)} A^{(ij)} \equiv \frac{\Delta A^{(ij)}}{\Delta x^{(j)}} + A^{(mn)} \left( \frac{i}{m j} \right) \quad (23)$$

ただし, (10)式は次のようになる.

$$\frac{\Delta}{\Delta x^{(j)}} \equiv \sqrt{\frac{g_{ii}}{g}} \frac{\partial}{\partial x^{(j)}} \sqrt{\frac{g}{g_{jj}}} \quad (24)$$

また, 物理的クリストッフェルは(18)~(20)式の導出過程から, 数学的クリストッフェルとの関係が次式のようになっていることがわかる.

$$\left( \frac{i}{m j} \right) = \sqrt{\frac{g_{ii}}{g_{mm}g_{jj}}} \left\{ \left( \frac{i}{m j} \right) \right\} - \delta_n^i \frac{g_{mk}}{g_{mm}} \left\{ \frac{k}{m j} \right\} \quad (25)$$

ただし $\delta_n^i$ はクロネッカのデルタである.

4. 計 算 例

はじめに述べたように, 圧力解法にはHSMAC法を用いる. 圧力補正, 速度補正式はたとえ文献4)などと同様な過程で導出する. 計算対象は図3に示すような2次元Chamber内の流れであり, 計算条件を表1に示す. 境界条件については表2に示すように壁法則を用いた. 本手法ではコントロールボリューム法による離散化を行っていることとあわせて, 図3に示すような壁面で直交かつ壁近傍第1メッシュの厚さが一定となるような格子を使用したことにより, 壁面せん断応力の計算および式

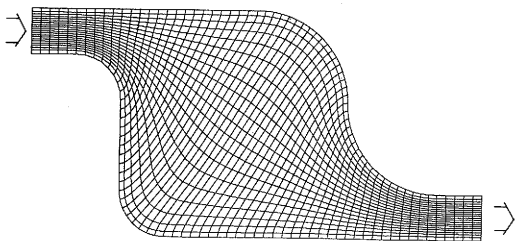


図3 計算対象および格子分割

(19)への算入が正規直交座標系での計算と同様に直接できるということに特長がある. また, 図4~8にそれぞれ速度ベクトル, 流線, 等圧力, 乱流エネルギー, 渦粘性の等値線図を示す. 流入直後の急拡大時の主流下部に生じたはくり渦が十分発達するだけの空間がなく, 逆に右上部に大きな渦が発達していることが図4~6に見られる. また流れが壁に当たるよみ点の部分(出口付近の凸面や主流が下に向かって当たる所など)で乱れの促進がおこなわれている様子が図7, 8からわかる. さらに, 従来の曲線座標非スタガード格子では問題であった解の振動も, 図6~8を見るかぎりではおこっていないようである.

5. ま と め

ここで示した計算例は本報のために特に計算を行ったものであり, 形状の特殊性ゆえに実験データは見当たらない. が当初の目的であった乱流モデル(ここでは標準 $k$ - $\epsilon$ モデル)の曲線座標への組み込み, 特に境界条件については壁法則を有効に取り込むことができた. さらにスカラーの等値線を見てもわかるとおり解の振動もおこし

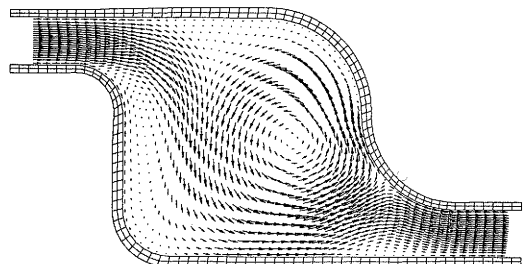


図4 速度ベクトル

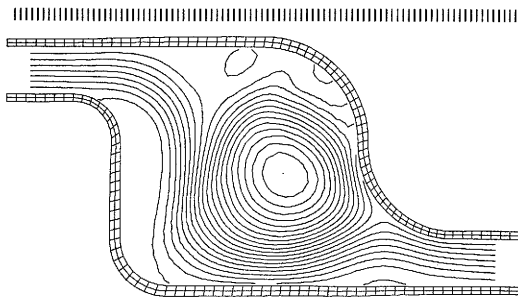


図 5 流線

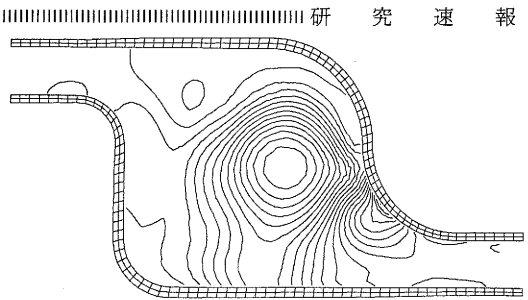


図 6 等圧力線図

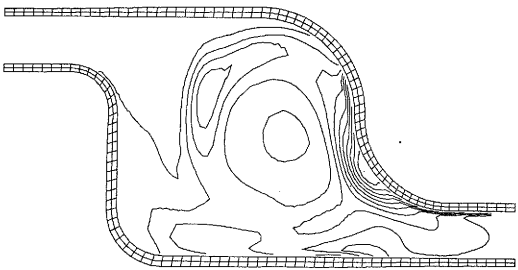


図 7 等k線図

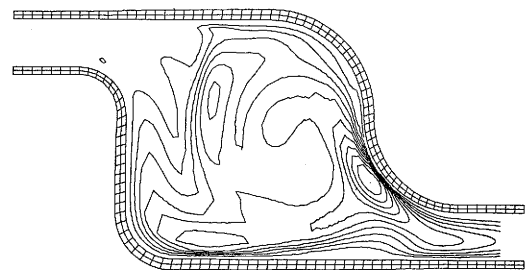


図 8 等nu\_t線図

ていないなど、従来の曲線座標による差分計算の困難点は克服したと言える。また、HSMAC法を用いたことにより解に対する収束性も良く、本計算例では1時間loop当たり約0.16秒であった(富士通VP-100使用、ベクトル化率約95%)。

今後、複雑な形状に対する詳細な実験データとの比較を行い、さまざまな乱流モデルを容易に組み込みうる手法として更なる改良を加えてゆきたい。

(1988年10月24日受理)

#### 参 考 文 献

- 1) たとえば、川原陸人：有限要素法流体解析，日科技連
- 2) たとえば、谷口，荒川，小林，田古里：一般座標系有限体積法による自動車まわり流れの数値シミュレーション；生産研究，Vol. 40，No. 1，460号，(1988)
- 3) たとえば，加藤：一般座標系によるシミュレーションと格子生成例— $k-\epsilon$ モデルによる室内気流解析—；第28回生研講習会テキスト，pp. 127~147
- 4) たとえば，P. J. Roache：コンピュータによる流体力学(上)
- 5) I. Demirdzicら：A Calculation Procedure for Turbulent Flow in Complex Geometries；Computers & Fluids Vol. 15，No. 3，pp. 251-273 (1987)
- 6) Seiich Koshizukaら：Absolute Staggered Differencing Technique On a Curvilinear Grid；L.S.C.セミナー資料 (1988. 9. 29)