

改良非等方 $k-\epsilon$ モデルによる矩形管内乱流の数値解析

A Numerical Study of Turbulent Square-Duct Flow by an Improved Anisotropic $k-\epsilon$ Model

西島 勝一*
Shoiti NISIZIMA

1. はじめに

乱流の数値シミュレーションにおいて、工学的問題では $k-\epsilon$ モデルが非常によく用られている。しかし、 $k-\epsilon$ モデルはレイノルズ応力の等方的渦粘性表現を基礎としているため、溝乱流では乱流強度の非等方性を評価できない。この欠点は矩形管内乱流では、その特徴の一つである主流方向と垂直な面に誘発される二次流を再現することができない。なぜなら、2次流の発生は乱流強度の非等方性に起因しているからである。このことは $k-\epsilon$ モデルが工学的に重要とされている乱流の解析に適当でないことを示している。

この困難を救うために応力モデルや代数モデルが工夫されてきており、それらは矩形管内乱流の数値解析にも多く適用されている。しかし、これらのモデルはたとえ矩形管内乱流の解析において、より複雑な形状の流れの解析に欠かすことのできない壁上での滑り無し境界条件の適用が、ほとんどなされていない。

このような各乱流モデルの特徴を考慮すれば、比較的単純である $k-\epsilon$ モデルの性質を保ちつつ、それに乱流強度の非等方性と滑り無し境界条件を課せられるように改良を加えることは有益であろう。著者と吉澤は最近、非等方 $k-\epsilon$ モデルを提起し、溝乱流やクエット乱流・矩形管内乱流に適用して妥当な結果が得られることを示した¹⁻⁴⁾。このモデルは吉澤により統計理論的に導出されたものであり、レイノルズ応力の非等方性渦粘性表現に大きな特徴をもっている⁵⁾。さらに最近、これと類似なモデルがSpezialeによっても提起されている⁶⁾。

本論文では、上述の非等方 $k-\epsilon$ モデルに一層の改良を施し²⁻⁴⁾矩形管内乱流の数値解析に適用する。得られた結果を実験値や他の数値解析結果と比較し、妥当であることを示す。

2. 非等方 $k-\epsilon$ モデル

速度、圧力(密度で割ったもの)の平均部分とそれからのずれを示す擾乱部分をそれぞれ (\bar{v}, \bar{p}) と (v', p')

で表すと三次元非圧縮・粘性流体に対する平均部分の基本方程式は、

$$\frac{D\bar{v}_\alpha}{Dt} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{v}_a \frac{\partial}{\partial x_a} \right) \bar{v}_\alpha = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(R_{\alpha\alpha} + \nu \frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial x_\alpha} \right), \quad \frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0 \quad (1)$$

で与えられる(アルファベットの下つき添字については1から3まで和をとることにする)。ここで、 ν は動粘性率、 $R_{\alpha\beta}$ はいわゆるレイノルズ応力で、非等方 $k-\epsilon$ モデルでは擾乱場の基本的統計量として乱流エネルギー k とエネルギー散逸率 ϵ を選び、前論文²⁻⁵⁾に基づき次のとおり表す。

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta} &= -\frac{2}{3} k \delta_{\alpha\beta} + \nu_e \left(\frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \bar{v}_\beta}{\partial x_\alpha} \right) \\ &\quad + \frac{1}{3} \left(\sum_{m=1}^3 \tau_m S_{m\alpha\alpha} \right) \delta_{\alpha\beta} + R'_{\alpha\beta} \quad (2) \\ \nu_e &= C_\nu \frac{k^2}{\epsilon}, \quad \tau_m = C_{\tau m} \frac{k^3}{\epsilon^2}, \quad R'_{\alpha\beta} = -\sum_{m=1}^3 \tau_m S_{m\alpha\beta}, \\ S_{1\alpha\beta} &= \frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \bar{v}_\beta}{\partial x_\alpha}, \\ S_{2\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \bar{v}_\beta}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial x_\alpha} \right), \\ S_{3\alpha\beta} &= \frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial x_\beta} \quad (3) \end{aligned}$$

この式は以下の k と ϵ の方程式^{7,8)}を連立させることにより解くことができる。

$$\begin{aligned} \frac{Dk}{Dt} &= R_{ab} \frac{\partial \bar{v}_b}{\partial x_a} - \epsilon + \frac{\partial}{\partial x_a} \left(C_{k\epsilon} \frac{k^2}{\epsilon} \frac{\partial k}{\partial x_a} \right) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x_a} \left(C_{k\epsilon} \frac{k^3}{\epsilon^2} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_a} \right) + \nu \frac{\partial^2 k}{\partial x_a^2} \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{D\epsilon}{Dt} &= C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} R_{ab} \frac{\partial \bar{v}_b}{\partial x_a} - C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_a} \left(C_{\epsilon\epsilon} \frac{k^3}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_a} \right) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x_a} \left(C_{\epsilon k} k \frac{\partial k}{\partial x_a} \right) - C_{\epsilon 3} k \left(\frac{\partial \bar{v}_b}{\partial x_a} \frac{\partial \bar{v}_a}{\partial x_b} \right)^2 \\ &\quad + \nu \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial x_a^2} \quad (5) \end{aligned}$$

(4), (5)は通常の $k-\epsilon$ モデル方程式におのおの右辺第

*東京大学生産技術研究所 第1部

4項が付加されており、その上、(5)の第5項も加えられている^{4,9,10)}。

モデル定数は、すでに溝乱流の解析で次のとおり最適化されている^{2,3)}。

$$\begin{aligned} C_\nu &= 0.09, C_{kk} = 0.08, C_{k\varepsilon} = -0.03, \\ (C_{\varepsilon_1} C_\nu - 2 C_{\varepsilon_3}) &= 0.072, C_{\varepsilon_2} = 1.9, C_{\varepsilon\varepsilon} = 0.1, \\ C_{\varepsilon k} &= -0.1, C_{\tau_1} = 0.057, C_{\tau_3} = -0.0067 \end{aligned} \quad (6)$$

なお、溝乱流の解析で未定であった定数は本矩形管内乱流の解析計算のなかで、実験値と比較し以下のように最適化した。

$$C_{\varepsilon_1} = 1.022, C_{\varepsilon_3} = 0.01, C_{\tau_2} = -0.33 \quad (7)$$

なお、このモデル定数の内で、たとえば溝乱流において、幾つかの値を零としてもその結果にほとんど影響を与えないことも確認している。しかし、今後より多くの形状の流れへの適用を考慮して、ここではすべての定数値を零とせずに最適化された値をそのまま使用した。

3. 壁上での滑り無し境界条件の適用

通常の $k-\varepsilon$ モデルでは(3)の ν_e 、非等方モデルではさらに τ_m がモデルの重要な基礎となっているが、これは壁のごく近くでは成立しない。そのままでは壁上で滑り無し境界条件を課することができないので、壁減衰関数を導入してこの困難を解決する²⁻⁴⁾。ここでは、渦粘性にかかわる各項のみに壁減衰関数を導入する。すなわち、

$$\begin{aligned} f_d &= [1 - \exp(-y^+/23)][1 - \exp(-z^+/23)], \\ y^+ &= \nu^* x_2' / \nu, \nu^* = \sqrt{\nu \left(\frac{d\bar{v}_1}{dx_2} \right)_{x_2 = \pm D}}, \\ z^+ &= w^* x_3' / \nu, w^* = \sqrt{\nu \left(\frac{d\bar{v}_1}{dx_3} \right)_{x_3 = \pm D}}. \end{aligned} \quad (8)$$

ただし、 x_2', x_3' はそれぞれ図1の $x_2 = \pm D, x_3 = \pm D$ (壁)からの最短距離であり、 y^+, z^+ はそれぞれ壁座標、さらに ν^*, w^* は摩擦速度である。

以上の関数を導入して整理すると変化する方程式は次のようになる。

$$\nu_e = C_\nu f_d \frac{k^2}{\varepsilon}, \tau_m = C_{\tau m} f_d \frac{k^3}{\varepsilon^2} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{Dk}{Dt} &= R_{ab} \frac{\partial \bar{v}_b}{\partial x_a} - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_a} \left(C_{kk} f_d \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial k}{\partial x_a} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_a} \left(C_{k\varepsilon} f_d \frac{k^3}{\varepsilon^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_a} \right) + \nu \frac{\partial^2 k}{\partial x_a^2} \end{aligned} \quad (10)$$

これにより、壁上での境界条件は、

$$\begin{aligned} \bar{v}_1 = \bar{v}_2 = \bar{v}_3 &= 0, k = 0, \\ \varepsilon &= \nu \frac{\partial^2 k}{\partial x_2^2} \text{ or } \varepsilon = \nu \frac{\partial^2 k}{\partial x_3^2} \end{aligned} \quad (11)$$

となる。

4. 正方形管内乱流への適用

A. 流れ関数の導入

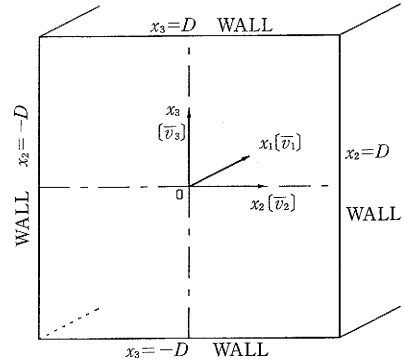


図1 座標

図1のような正方形管内乱流では、

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} &= 0 \quad (f = \bar{v}, k, \varepsilon), \quad \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1} = \text{constant}, \\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_2} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_3} &= 0, \end{aligned} \quad (12)$$

が成り立つ。ここで、連続の式(1)を恒等的に満たし、圧力項を省くために、次のように流れ関数を導入する。

$$\bar{v}_2 = \frac{\partial \Psi}{\partial x_3}, \bar{v}_3 = -\frac{\partial \Psi}{\partial x_2}, \omega \equiv -\left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \Psi \quad (13)$$

以上の各式を、速度 $\sqrt{-(d\bar{p}/dx_1)D}$ と長さ D を基本量として無次元化して整理し連立させることにより解が得られる。

壁上での境界条件は、(11)の内での式が変化する。

$$\Psi = 0, \omega = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_2^2} \text{ or } -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_3^2} \quad (14)$$

B. 数値計算法

差分方法は空間に関しては不等間隔¹⁻⁴⁾を、時間差分には *Adams-Bashforth* を用いた。時間刻み幅は等間隔、空間に関しては x_2, x_3 を、

$$x_2 = \tanh(Y), x_3 = \tanh(Y), (-3.3 < Y < 3.3) \quad (15)$$

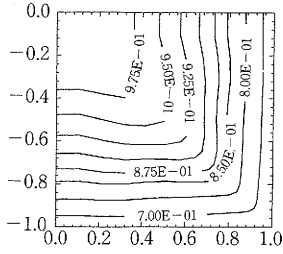
のように表し、 Y を等間隔に60分割した。(13)は逐次緩和法(SOR)を用いて解いた。

初期値は等方的な $k-\varepsilon$ モデルで得られたものを用い、2次流れについてはただ1格子点上の Ψ を最初の1時間ステップだけ少し変化させて、擾乱を起こさせ発展を促進させた。

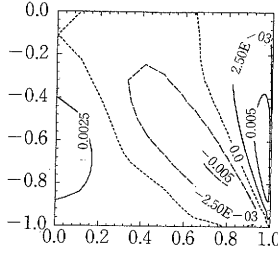
5. 結果

図2-8に、 $R_e = 43379$ (*Bulk* 速度 \bar{v}_0 と *Hydraulic Diameter* $= 2D$ に基づくレイノルズ数)の発達した乱流の解析結果と実験ならびに他の数値解析結果を示す。このレイノルズ数の計算を選んだ理由は *Melling and Whitelaw* の $R_e = 42000$ の実験値¹¹⁾ との比較を考慮した

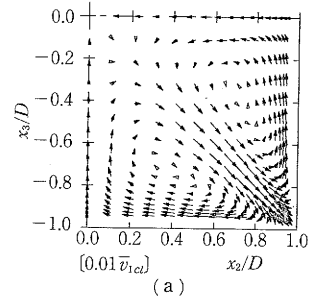
研 究 速 報



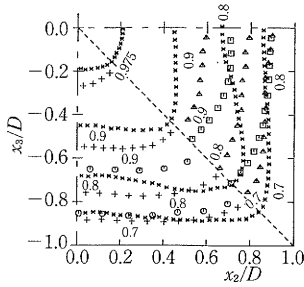
(a) 本数値解析



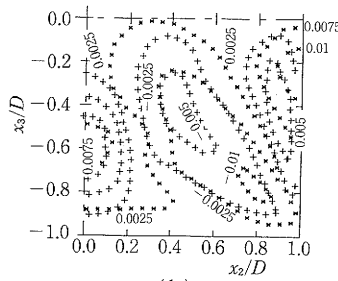
(a)



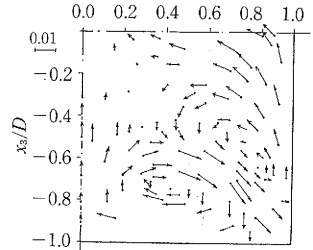
(a)



(b) 実験値と他の数値解析結果



(b)

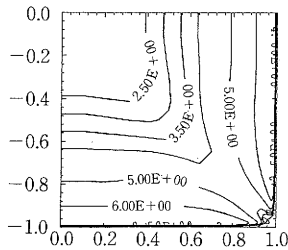


(b)

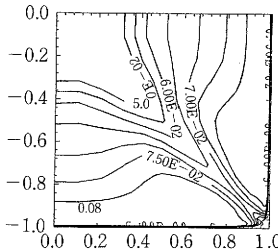
図 2 主流速度 \bar{v}_1/\bar{v}_{1cl}

図 3 2次流 \bar{v}_2/\bar{v}_{1cl}

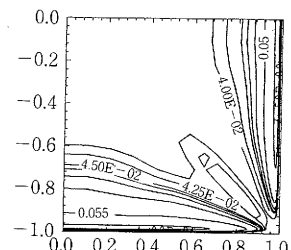
図 4 2次流 $\sqrt{\bar{v}_2^2 + \bar{v}_3^2}/\bar{v}_{1cl}$



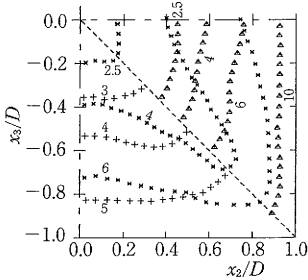
(a)



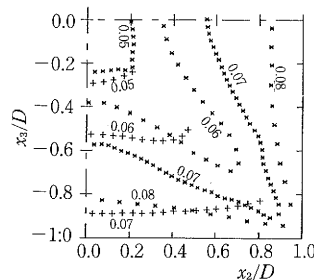
(a)



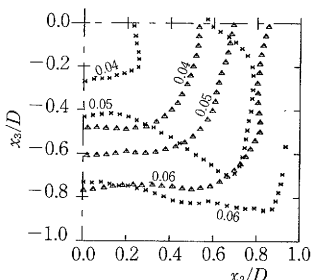
(a)



(b)



(b)



(b)

図 5 乱流エネルギー $(k/\bar{v}_{1cl}^2) \times 10^3$

図 6 乱流強度 v'_1/\bar{v}_{1cl}

図 7 乱流強度 v'_2/\bar{v}_{1cl}

* : Melling and Whitlaw¹¹⁾ ($Re=42000$),
 □ : Isotropic $k-\epsilon$ Model from Demuren and Rodi¹²⁾ ($Re=83000$),
 ○ : Demuren and Rodi¹²⁾ ($Re=83000$),
 + : Nakayama et al¹³⁻¹⁵⁾ ($Re=83000$),
 △ : Baker and Orzechowski¹⁶⁾.
 (2-8 図 同記号)

ためである。

図 2 は主流方向の流速分布図であるが、実験値に比べて少し大き目の値となっている。しかし、2次流により等高線が角 (corner) へ引き込まれる現象が、他の数値

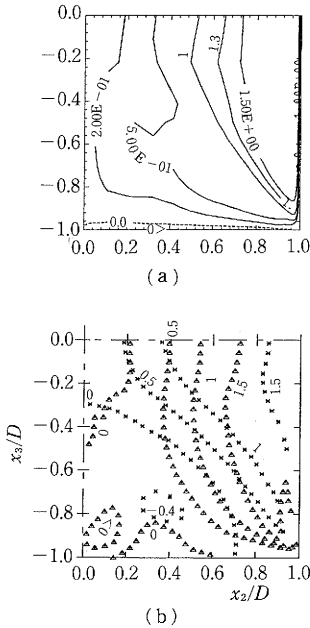


図 8 レイノルズ応力 $(-\langle v_1'v_3' \rangle / \bar{v}_{1c}^2) \times 10^3$.

解析結果より良く再現されている。

図 3 は 2 次流 \bar{v}_3 / \bar{v}_{1c} (\bar{v}_{1c} は矩形管中心線上の主流速) を示しているが、最大値と最小値の位置等矩形管内乱流の特徴をよく表している。しかし、その値 (絶対値) は多少小さく表現されている。 \bar{v}_2 と \bar{v}_3 のベクトルを図 4 に示してあるが、流れの状況は実験のそれと良く一致している。

図 5 は乱流エネルギーで、その各成分を知るために図 6, 7 に乱流強度の分布を示してあるが、全体的な分布は実験のそれとよく対応している。たとえば、 v_1' の等高線の角への張り出しが顕著に表現されており、他の数値解析の結果に比べてより明瞭である。

図 8 のレイノルズ応力の分布は、閉じた等高線の部分を除いて実験値をよく再現している。閉じた等高線の部分は他に比べて値が小さいとはいえ再現されておらず、今後改良が必要であろう。

最後に、応力モデルや代数モデルによる数値解析との比較を行ってみる。図 2-8 から、これらのモデルは矩形管内乱流解析に有効であることが実証される。しかし、3 次元乱流への適用を考えた場合、応力モデルや代数モデルは方程式の数とモデル定数が多くなり、この点では非等方 $k-\epsilon$ モデルのほうが扱いやすいであろう。さらに、応力モデル等による数値解析では、壁上の境界条件としては経験則の使用が一般的であり、滑り無し境界条件の使用はほとんどなされていない。

6. 結 論

非等方 $k-\epsilon$ による本研究は、溝乱流のシミュレーションにおいて最適化されたモデル定数、壁減衰関数を修正させることなく、2 次流を伴うより複雑な乱流場をシミュレートできることを示した。特に、等方 $k-\epsilon$ モデルでは再現できない 2 次流の諸特性、また、それより生じる主流への影響等が定量的にも明らかにされた。本非等方 $k-\epsilon$ モデルが 2 次流および乱流強度の非等方性を再現できることを考えると、このモデルは剥離を伴う乱流、噴流等の、等方 $k-\epsilon$ モデルが必ずしもよい結果を与えない流れに有効に適用できる可能性がある。

謝 辞

この研究を進めるにあたり吉澤徹、竹光信正、堀内潔の各博士に有益な討論と助言を、数値計算に当たっては電子計算機室の各氏から多大な援助と協力をいただきました。ここに報告するとともに、感謝の意を表明します。

(1988年10月11日受理)

参 考 文 献

- 1) S. Nisizima. and A. Yoshizawa., AIAA Journal, Vol. 25, 1987, pp. 414-420.
- 2) 西島, 機論, 53-495, B (昭62), 3166.
- 3) 西島, 生産研究, 40 (昭和63), 59.
- 4) 西島, 機論講演抜刷, No. 88-0307A.
- 5) Yoshizawa, A., The Physics of Fluids, Vol. 27, 1984, pp. 1377-1387.
- 6) Speziale, C.G., Journal of Fluid Mechanics, Vol. 178, 1987, pp. 459-475.
- 7) Yoshizawa, A., The Physics of Fluids, Vol. 28, 1985, pp. 59-63.
- 8) Yoshizawa, A., The Physics of Fluids, Vol. 30, 1987, pp. 628-631.
- 9) Takemitsu, N., "Revised $k-\epsilon$ Model," (submitted to Journal of Fluid Engineering).
- 10) Hamba, F., Journal of the Physical Society of Japan, Vol. 56, No. 11, 1987, pp. 3771-3774.
- 11) Melling, A. and Whitelaw, J.H., Journal of Fluid Mechanics, Vol. 78, 1976, pp. 289-315.
- 12) Demuren, A.O. and Rodi, W., Journal of Fluid Mechanics, Vol. 140, 1984, pp. 189-222.
- 13) Nakayama, A., Chow, W.L., and Sharma. D., Journal of Fluid Mechanics, Vol. 128, 1983, pp. 199-217.
- 14) Nakayama, A., Chow, W.L., and Sharma. D., Bulletin of JSME, Vol. 27, No. 229, 1984, pp. 1438-1445.
- 15) Nakayama, A. and Chow, W.L., Encyclopedia, of Fluid Mechanics, Gulf Publishing Company, Houston, 1986, Vol. 1, pp. 638-674.
- 16) Baker, A.J. and Orzechowski, J.A., AIAA Journal, Vol. 21, 1983, pp. 524-533.