

LESデータ・ベースによる $k-\varepsilon-k_\theta-\varepsilon_\theta$ モデリングModeling of $k-\varepsilon-k_\theta-\varepsilon_\theta$ type via LES data base

堀 内 潔*

Kiyosi HORIUTI

1. は じ め に

スーパー・コンピュータの登場は、FTS (Full Turbulence Simulation) からLES (Large Eddy Simulation), RAS (Reynolds Averaged Simulation) に及ぶ広範囲の数値シミュレーションを可能にしたが、当面、高レイノルズ数では、LES, RASのみが可能であり、特にRASは、工学上、利用価値が高い。しかし、そのモデリングでは、多くの仮定がなされているうちに、含まれている定数の設定が容易でない場合も多い。その設定には、実験データもしばしば用いられているが測定困難な場合もある。特に、温度場については、解明されていない点も多く、その検証は重要であると思われる。そこで、本報告では、チャンネル流のLESデータ・ベースを用いて、RASの代表例である $k-\varepsilon$ モデル、特に $k-\varepsilon-k_\theta-\varepsilon_\theta$ タイプのモデルにおけるモデル化の検証、および、定数の評価を行った。同様な報告¹⁾は、昨年度の特集号にも掲載したが、本報告では、

- (1) LESデータ・ベースの計算において、従来取り入れられていなかったCross項のモデリングを新たに導入し、より正確なデータを生成した。
 - (2) Passiveなscalar場を同時に計算し、近年提案されている $k-\varepsilon-k_\theta-\varepsilon_\theta$ モデルの検証を行った。
- の2点に重点が置かれている。

2. LESデータ・ベースの生成法

LESでは、Navier-Stokes(N.S.)方程式にフィルターを施す²⁾が、非線形項より、次の3項が生じる。

$$\begin{aligned} u_i u_j - \bar{u}_i \bar{u}_j = & (\bar{u}_i \bar{u}_j - \bar{u}_i \bar{u}_j) \\ & + (\bar{u}_i' \bar{u}_j' + \bar{u}_i \bar{u}_j') + u_i' u_j' \end{aligned} \quad (1)$$

右辺は順に、Leonard項(以下 L_{ij})、Cross項(C_{ij})、Sub-grid scale (SGS) Reynolds stress (R_{ij}) と呼ばれる。ここに、 u_i ($i=1, 2, 3$) は、 i 方向の速度成分を示し、 $i=1, 2, 3$ は、順に、下流方向(x)、チャンネル

の壁に垂直な方向(y)、横断方向(z)を示し、 u_1, u_2, u_3 は、しばしば、 u, v, w と表されている。上つきの一は、フィルターのなかった変数であることを示し、本報告では、 x および z 方向に、Gaussian型フィルター、

$$G_i(x_i, x_i') = (\pi/6)^{1/2} \exp[-6(x_i - x_i')^2 / \Delta_i^2] / \Delta_i \quad (2)$$

がexplicitに施されている。ここに、 Δ_i ($i=1, 3$) は、 x および z 方向の格子間隔の2倍に設定されている。従来のチャンネル流のLES^{2,3)}では、 L_{ij} は直接計算し、 C_{ij} は無視、 R_{ij} はSmagorinskyモデル

$$\overline{u_i' u_j'} = \frac{1}{3} \delta_{ij} \overline{u_e' u_e'} - \nu_e \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (3)$$

$$\nu_e = (C\Delta)^2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)^2 \right]^{1/2}$$

を用いて近似してきた。しかし、最近のFTSデータ・ベースを用いたこれらのモデルの検証^{4,5)}により、 C_{ij} は無視できない大きさをもっていて、重要な役割をになっており、この項の無視は計算精度を落とすことが明らかになった。したがって、本報告で用いたデータ・ベースでは、

$$C_{ij} + R_{ij} = \overline{\bar{u}_i \bar{u}_j - u_i u_j} \quad (4)$$

+ Smagorinsky model

と近似するBardinaモデル^{4,5)}を計算にとりこんでいる。同様な近似はpassive scalarの方程式中の移流項にも用いられている。したがって、LESの基礎方程式は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{u}_i \bar{u}_j = & - \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j - \bar{u}_i \bar{u}_j) \\ & - \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j - \bar{u}_i \bar{u}_j) - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} \\ & - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \nu_e) \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] + 2\delta_{ij} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_j \bar{\theta}) = & - \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_j \bar{\theta} - \bar{u}_j \bar{\theta}) \\ & - \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_j \bar{\theta} - \bar{u}_j \bar{\theta}) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\kappa + \kappa_e) \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} \right] + \dot{Q} \end{aligned} \quad (6)$$

*東京大学生産技術研究所 第1部

ここに、 θ は温度場、 \dot{Q} はheat sourceを示し、 $\bar{\theta}$ の境界条件は以下のように与えられている。

$$\bar{\theta} = 0 \quad \text{at walls}, \quad \dot{Q} = 2 \quad (7)$$

なお、 κ , κ_e は、おのおの、温度場の拡散係数、渦拡散係数を示し、プラントル数 (Pr) は0.7に設定されている。数値計算法の詳細はHoriuti³⁾を参照されたい。

3. 諸統計量の分布

2節で述べたBardinaモデルの導入によるLESデータの改善を含め、本節では、本報告に用いた諸統計量を紹介する。

以下、 U は平均速度、 Θ は平均温度、 k は速度場の乱流

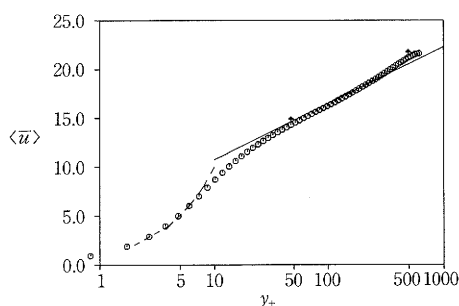


図1 平均速度分布, ○: 本計算,: $U = y_+$,
——: $U = \frac{1}{0.4} \log y_+ + 5.0$

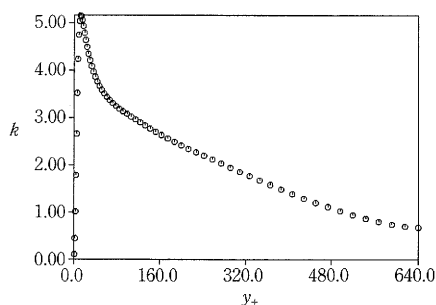


図2 乱流エネルギー k の分布 (ケースLB)

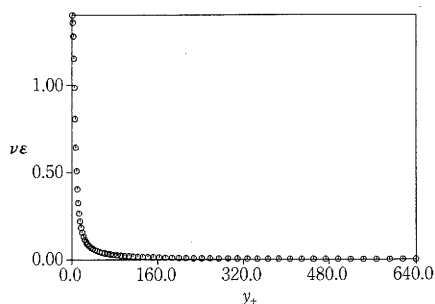


図3 エネルギー散逸率 ε の分布 (ケースLB)

エネルギー、 ε は速度場のエネルギー散逸率、 k_θ , ε_θ はおのおの、温度場の乱流エネルギー、エネルギー散逸率を示し、アンサンブル・アベレージをとった量になっている。本報告では、以上の量は、LESのデータ・ベースから以下のように算出されている。

$$\begin{aligned} U &= \langle \bar{u} \rangle, \\ \Theta &= \langle \bar{\theta} \rangle, \\ k &= \left\langle \sum_{i=1}^3 \{ (\bar{u}_i'')^2 + (\bar{u}_i^2 - \bar{u}_i'^2) \} \right\rangle / 2 \quad (8) \\ \varepsilon &= \frac{1}{2} \left\langle (\nu + \nu_e) \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)^2 \right\rangle \\ &\quad + (L_{ij} \text{および } C_{ij} \text{ による項}) \end{aligned}$$

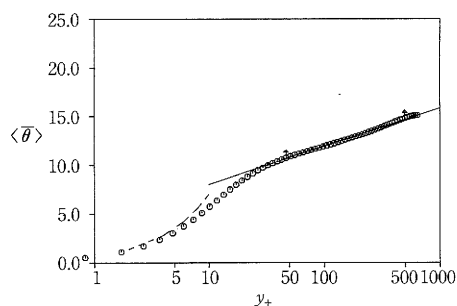


図4 平均温度分布, ○: ケースLN,: $\Theta = Pr y_+$,
——: $\Theta = \frac{1}{0.58} \log y_+ + 4.1$

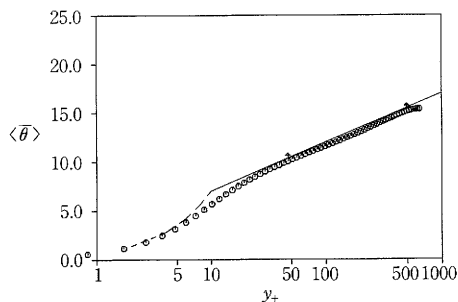


図5 平均温度分布, ○: ケースLB,: $\Theta = Pr y_+$,
——: $\Theta = \frac{1}{0.46} \log y_+ + 2.5$

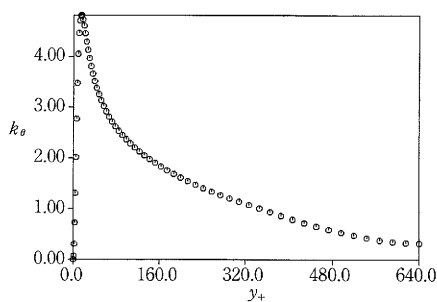
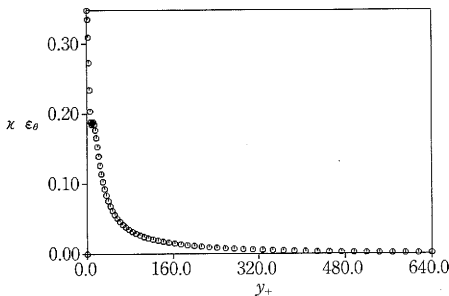


図6 温度乱れの分散 k_θ の分布 (ケースLB)

研究速報

図7 k_θ の散逸率 ϵ_θ の分布 (ケースLB)

$$k_\theta = \langle \bar{\theta}''^2 + (\bar{\theta}^2 - \bar{\theta}^2) \rangle$$

$$\epsilon_\theta = 2 \langle (\chi + \chi_e) \left(\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} \right)^2 \rangle$$

+ (Scalar場の L_{ij} および C_{ij} による項),

$$\langle u'v' \rangle = \langle \bar{u}''\bar{v}'' + (\bar{u}\bar{v} - \bar{u}\bar{v}) \rangle,$$

$$\langle v'\theta' \rangle = \langle \bar{v}''\bar{\theta}'' + (\bar{v}\bar{\theta} - \bar{v}\bar{\theta}) \rangle$$

ここに、 $\langle \rangle$ は x - z 平面における面平均と共に時間平均をとった平均を、 \bar{u}_i'' は、 \bar{u}_i の面平均からのずれを表す。

図1, 2, 3は順に、 U , k , ϵ の分布を示す。Bardinaモデルを導入しない場合 (ケースLN) の計算結果は、前報¹⁾を参照されたいが、主要な相違は、 U の対数則の定数 B が、LNの5.2にたいし、本計算 (ケースLB) では5.0となっている点、および、 k の最大値が、LBで下がっている点にある。これらは、いずれも、より実験値⁹⁾に近くなっている。図4, 5, 6, 7は、おのおの、ケースLNの Θ 、本計算における Θ 、LBの k_θ , ϵ_θ を示す。LNとLBの最も顕著な相違は、 Θ の対数則にあらわれており、LNの対数則が、

$$\Theta = \frac{1}{0.58} \log y_+ + 4.1 \quad (9)$$

であるのにたいし、LBでは、

$$\Theta = \frac{1}{0.46} \log y_+ + 2.5 \quad (10)$$

となり、実験⁹⁾とはLBのほうがよく一致する。特にカルマン定数の相違は、乱流プラントル数 (Pr_t) に与える影響が大きいため、重要な改善と考えられる。この改善は、主に、LNでは、 U がbuffer layerに大きなbumpをもっていることに起因していると考えられる。なお、次節で用いるデータは、図1の U のグラフ中↑印ではさまれた対数則にしたがう領域のみを対象としているので、壁付近のdamping関数を考慮しなくてよい領域となっている。

4. k - ϵ - k_θ - ϵ_θ モデリング

本節では、前節のデータをもとに、passive scalarの k

- ϵ タイプモデリングの検証を行う。

工学上、伝熱解析が必要な場合は非常に多く、過去にも数多くのモデリングがなされている。最も単純なものは、乱流プラントル数の分布を適当に仮定する0方程式タイプである⁸⁾が、速度場と温度場の相似性が低い場合への適用は難かしいと思われる。また、このモデルでは、 Pr_t の変化を普遍的に再現するのは難しく、熱拡散係数 (κ_θ) を温度場に関する乱流統計量から決定する方法が必要になる。こうしたモデルの一つは、吉澤⁹⁾により導出された k_θ にたいするモデルであり、西島・吉澤¹⁰⁾による適用例はすでに報告されている。しかし、このモデルは、平均場 Θ の方程式と k_θ に関する方程式が全く相関していないうえ、 Pr_t が Pr に独立に決定してしまう欠点をもつ。こうした事情を考慮して、より Pr_t の決定法の適用範囲を拡大したモデルとしては、 ϵ に対応する ϵ_θ を導入した温度場2方程式モデルがある。これは、永野¹¹⁾により最初に提案されたが、以下のように書き下せる。

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \langle u'_i u'_j \rangle \right),$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_e}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right]$$

$$- \langle u'_i u'_j \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \epsilon,$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + U_j \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_e}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right]$$

$$- C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} \langle u'_i u'_j \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k},$$

$$\langle u'_i u'_j \rangle = \frac{2}{3} \delta_{ij} k - \nu_e \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right),$$

$$\nu_e = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon}$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + U_j \frac{\partial \Theta}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\chi \frac{\partial \Theta}{\partial x_j} - \langle u'_j \theta' \rangle \right)$$

$$\frac{\partial k_\theta}{\partial t} + U_j \frac{\partial k_\theta}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\chi + \frac{\chi_e}{\sigma_{k_\theta}} \right) \frac{\partial k_\theta}{\partial x_j} \right]$$

$$- 2 \langle u'_j \theta' \rangle \frac{\partial \Theta}{\partial x_j} - \epsilon_\theta$$

$$\frac{\partial \epsilon_\theta}{\partial t} + U_j \frac{\partial \epsilon_\theta}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\chi + \frac{\chi_e}{\sigma_{\epsilon_\theta}} \right) \frac{\partial \epsilon_\theta}{\partial x_j} \right]$$

$$- C_{p1} \frac{\epsilon_\theta}{k_\theta^2} \langle u'_j \theta' \rangle \frac{\partial \Theta}{\partial x_j} - C_{p2} \frac{\epsilon_\theta}{k} \langle u'_i u'_j \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$$

$$- C_{D1} \frac{\epsilon_\theta^2}{k_\theta} - C_{D2} \frac{\epsilon \epsilon_\theta}{k},$$

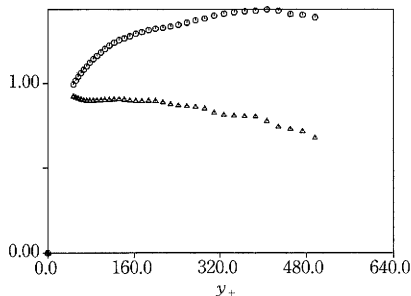


図 8 時間スケール比 r と乱流プラントル数 Pr_t の分布, $\circ: r$, $\triangle: Pr_t$

$$\langle u_i' \theta' \rangle = -\kappa_e \frac{\partial \Theta}{\partial x_i},$$

$$\kappa_e = C_\lambda \frac{k^2}{\varepsilon} r^p, \quad r = \frac{\frac{k}{\varepsilon}}{\frac{k_\theta}{\varepsilon_\theta}}$$

永野らは、温度場の時間スケールとして、速度場の時間スケールと、温度場のその相乗平均を採用したため、 $p = -1/2$ と設定した。これにたいし、吉澤¹²⁾による統計理論的導出は、 $p = -2$ としている。ここに、単に次元解析からは、 p の値は任意に選べる。本研究の主題は、LESデータ・ベースを用いて、 p を決定する点にある。

上記のように、2方程式モデルでは、速度場と温度場の時間スケールの比 r が重要な役割を果たし、 p の値により、 Pr_t と r の関係

$$Pr_t = \frac{\nu_e}{\kappa_e} = \frac{C_\mu}{C_\lambda} r^{-p} \quad (12)$$

が大きく変わることになる。図8は、LESデータ・ベースより得られた r と Pr_t の関係を示すグラフである。これより、 Pr_t は壁付近から次第に減少するのにたいし、 r は増加する傾向を示し、 p の符号が正であることがわかる。実際、heat fluxの表現

$$\langle v' \theta' \rangle = -C_\lambda \frac{k^2}{\varepsilon} r^p \frac{\partial \Theta}{\partial y} \quad (13)$$

より、 p の値を最小二乗法¹⁾を用いて決定すると、 p は約0.86、 C_λ は、約0.067となる。同じデータ・ベースより、 p を-2、および、 $-\frac{1}{2}$ に固定して、定数 C_λ を決定すると、それらは、おのおの、 $C_\lambda = 0.108, 0.0835$ となる。吉澤¹²⁾は、 $C_\lambda = 0.446$ と推定しているので、少し大きめに出ているが、永野ら¹¹⁾によって採用された $C_\lambda = 0.14$ と本報告で得られた値とは、比較的近くになっている。しかし、この多少小さめに出る傾向は、 C_μ の評価においても見いだされている¹⁾。以上の C_λ の値を用いて、 κ_e の分布を比較すると、図9のようになる。図より、 κ_e の $y_+ = 100 \sim 300$ における急激な変化には、 $p = 0.86$ が最もよく追従でき、他

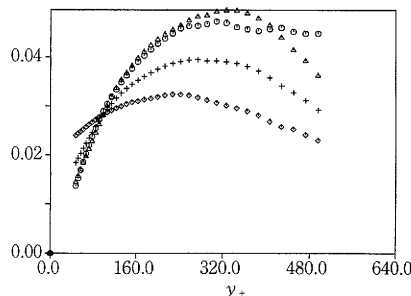


図 9 乱流熱流束 $\langle v' \theta' \rangle$ の分布,
 \circ : LESデータ・ベース
 \triangle : 永野らによる理論式 ($p = -1/2$)
 \times : 吉澤による理論式 ($p = -2$)
 \diamond : $p = 0.86$ と設定したモデル式

の2つはやや劣ることがわかる。したがって、ここでは、特に $y_+ = 100 \sim 300$ に注目する限り、 p を1/2から1の間としたモデルを提示したい。

5. お わ り に

Cross項の評価をBardinaモデルを用いて導入した新たなLESデータ・ベースを生成し、特に温度場において、こうしたモデルが有効であることを示した。次に、このデータ・ベースを用いて、温度場2方程式モデル、特に、そこに含まれるexponentの検証を行った。本報告は、いわゆる“a priori”なテストをしたのみであり、ここで導出されたモデルの“a posteriori”なテスト、すなわち、実際に $k - \varepsilon - k_\theta - \varepsilon_\theta$ モデルを用いたシミュレーションに適用した結果についての報告は別の機会にゆずる。

(1988年10月13日受理)

参 考 文 献

- 堀内 潔, 生産研究, 40, 1 (1988) 51
- P. Moin and J. Kim, J. Fluid Mech., 118 (1982) 341
- K. Horiuti, J. Comp. Phys., 71 (1987) 343
- U. Piomelli, P. Moin and J.H. Ferziger, Phys. Fluids, 31 (1988) 1984
- K. Horiuti, Phys. Fluids A, 32, no.2 (1989)
- A.K.M.F. Hussain and W.C. Reynolds, J. Fluids Eng., 97 (1975) 568
- M. Hishida and Y. Nagano, Proc. 6th Int. Heat Transfer Conf., Toronto, 2 (1978) 531
- W.P. Jones and B.E. Launder, Int. J. Heat Mass Transfer, 15 (1972) 301
- A. Yoshizawa, J. Phys. Soc. Jpn., 55 (1986) 3066
- 西島勝一, 吉澤 徹, 生産研究, 38, 12 (1986) 82
- 長野靖尚, 金 哲晃, 機械学会論文集, 53-490, B (1987), 1773
- A. Yoshizawa, J. Fluids Mech., 195 (1988) 541