研 究 速 報
特 集 15
UDC 533.9:537.84:519.6

LESによる逆転磁場ピンチの数値計算

Numerical Simulation of a Reversed Field Pinch by Using LES

半 場 藤 弘*・吉 澤 徴*
Fujihiro HAMBA and Akira YOSHIZAWA

1. は じ め に

逆転磁場ピンチ[1] (Reversed Field Pinch; RFP) は核融合のプラズマ閉じ込め装置の1つで，トカマクと同じように軸対称トーラス系(図1)である．トーラスに沿ったトロイダル方向の磁束をかけることによって，ら旋状の磁力線を作りプラズマを閉じ込める．トカマクと異なる点は大きなプラズマ電流を流しポロイダル磁場がトロイダル磁場と同程度の大きさであることである．

図2は典型的な磁場の配位で，トロイダル磁場 (B_z) が壁付近 ($r>0.8$) で負になっていることから逆転磁場ピンチと呼ばれる．この分布はTaylor[2]によって理論的に導出され壁のごく付近を除けば実験値をよく説明する．すなわち，磁気ヘリシティー$\int \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}dV$ (Aはベクトルポテンシャル，Bは磁場) が一定の下で磁気エネルギー$\int B^2/2dV$が最小という変分原理から

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \varkappa \boldsymbol{B} \tag{1}$$

($\varkappa$は定数) が得られ，円柱近似をするとベッセル関数を用いて

$$B_z = B_0 J_0(\varkappa r), \quad B_\theta = B_0 J_1(\varkappa r) \tag{2}$$

と表される．$\varkappa a>2.4$ (aは中心から壁までの距離) のときB_zが反転する．

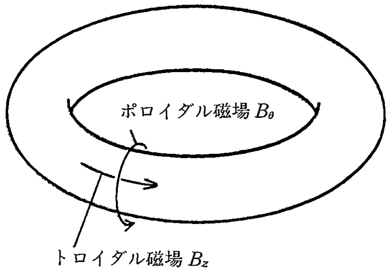

図1 RFPの磁場

*東京大学生産技術研究所 第1部

プラズマはイオンと電子から成り，粒子としての取り扱いももちろん必要であるが，磁場の配位などプラズマのマクロなふるまいに関しては，プラズマを流体として扱いMHD近似をしてもよく記述できることが明らかになってきた．上述した配位が形成される緩和過程や，抵抗があるにもかかわらず配位が保たれるための維持機構が3次元のMHD数値計算を使って研究されている．

Aydemir et al.[3]は流体を圧縮性または非圧縮性として扱った5つのコードの計算結果を比較し，反転が維持されるには圧縮性が重要であると結論した．また Kusano et al.[4]は圧縮性の数値計算で非線形駆動リコネクションモデルの妥当性を示した．Kirby[5]は非圧縮性のコードでも反転が維持されることを示し，磁場の拡散率の分布の実験値を用いてよい結果を得た．

本研究では非圧縮性として扱い，さらに乱流モデル (Large Eddy Simulation; LES)[6,7,8]を使い，計算を行った．磁気レイノルズ数が大きくなり磁場の擾乱が高波数成分を持つようになると，計算格子ではとらえ切れなくなるので，細かい擾乱の相関をα効果や渦拡散（異常拡

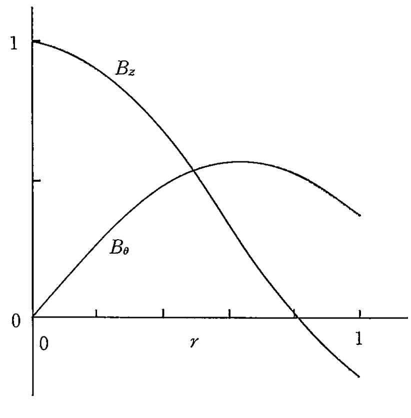

図2 磁場分布

散）としてモデル化する．平均磁場の分布を求め，乱流モデルを使わない場合と比較し考察する．

2．基礎方程式と計算方法

非圧縮性流体のNavier Stokes方程式と磁場の誘導方程式は，適当な無次元化を行うと

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}=-\nabla\cdot(\boldsymbol{uu}-\boldsymbol{bb})-\nabla\left(p_0+\frac{1}{2}|\boldsymbol{b}|^2\right)+\nu\Delta\boldsymbol{u} \quad (3)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial t}=\nabla\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{b}-\lambda\nabla\times\boldsymbol{b}) \quad (4)$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}=\nabla\cdot\boldsymbol{b}=0 \quad (5)$$

と書ける．ここで$\boldsymbol{u}$は速度，$\boldsymbol{b}$は磁場，νは流体の動粘性係数，p_0は圧力，λは磁場の拡散係数である．

LESで速度，磁場などの物理量は

$$f=\bar{f}+f' \quad (6)$$

のように分けられる．$\bar{f}$はgrid scaleの物理量，f'は$\bar{f}$からのずれ（subgrid scaleの量）であり，$\bar{f}$はフィルター関数$G(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$を用いて

$$\bar{f}(\boldsymbol{x})=\iiint G(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})f(\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y} \quad (7)$$

と定義される．このフィルター平均を(3)～(5)式にほどこすとsubgrid scaleの相関が現れるので次のようにモデル化する．

$$\overline{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}'-\boldsymbol{b}'\boldsymbol{b}'}=\frac{1}{3}(\overline{|\boldsymbol{u}'|^2-|\boldsymbol{b}'|^2})\boldsymbol{I}-\nu_e\boldsymbol{S} \quad (8)$$

$$\overline{\boldsymbol{u}'\times\boldsymbol{b}'}=\alpha\bar{\boldsymbol{b}}-\lambda_e\nabla\times\bar{\boldsymbol{b}} \quad (9)$$

$$I_{ij}=\delta_{ij},\quad S_{ij}=\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\bar{u}_j}{\partial x_i} \quad (10)$$

（ただし，δ_{ij}はクロネッカーのδ記号．）(8)式は乱流の数値計算で用いられているSmagorinskyモデル[6]で，渦粘性を表す．(9)式はダイナモ効果を表すα項と渦拡散[8]の項から成る．結局grid scaleの速度と磁場の発展方程式は以下のようになる．

$$\frac{\partial\bar{\boldsymbol{u}}}{\partial t}=-\nabla\cdot(\bar{\boldsymbol{u}}\bar{\boldsymbol{u}}-\bar{\boldsymbol{b}}\bar{\boldsymbol{b}})-\nabla\bar{p}+\nabla\cdot\{(\nu+\nu_e)\boldsymbol{S}\} \quad (11)$$

$$\frac{\partial\bar{\boldsymbol{b}}}{\partial t}=\nabla\times\{\bar{\boldsymbol{u}}\times\bar{\boldsymbol{b}}-(\lambda+\lambda_e)\nabla\times\bar{\boldsymbol{b}}+\alpha\bar{\boldsymbol{b}}\} \quad (12)$$

$$\nabla\cdot\bar{\boldsymbol{u}}=\nabla\cdot\bar{\boldsymbol{b}}=0 \quad (13)$$

$$\bar{p}=\bar{p}_0+\frac{1}{2}(|\bar{\boldsymbol{b}}|^2+\overline{|\boldsymbol{b}'|^2})+\frac{1}{3}(\overline{|\boldsymbol{u}'|^2-|\boldsymbol{b}'|^2}) \quad (14)$$

$$\nu_e=C_V\Delta^2\Big[\frac{1}{2}C_V S_{ij}S_{ij}+C_B\{|\nabla\times\bar{\boldsymbol{b}}|^2-C_{B2}(\bar{\boldsymbol{b}}\cdot\nabla\times\bar{\boldsymbol{b}})^2/|\bar{\boldsymbol{b}}|^2\}\Big]^{\frac{1}{2}} \quad (15)$$

$$\lambda_e=(C_B/C_V)\nu_e \quad (16)$$

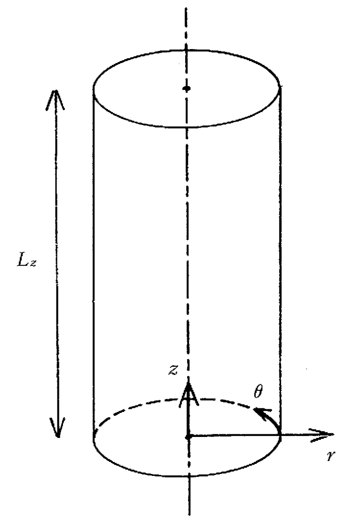

図3　座標系

$$\alpha=C_{B2}\lambda_e(\bar{\boldsymbol{b}}\cdot\nabla\times\bar{\boldsymbol{b}})/|\bar{\boldsymbol{b}}|^2 \quad (17)$$

$$\Delta=\sqrt{(\Delta_x{}^2+\Delta_y{}^2+\Delta_z{}^2)/3} \quad (18)$$

ここで，C_V，C_B，C_{B2}はモデル定数，$\Delta_{x,(y,z)}$は各方向の格子間隔である．

実際の計算は図3のような円柱座標系で行った．半径の長さと，b_zの円柱断面での平均とで規格化し，円柱のz方向の長さは6.4である．格子点はr,θ,zの順に16×32×32である．時間についてはθ方向の拡散項にCrank-Nicolson法を，それ以外にAdams-Bashforth法を使い，空間については2次精度の中心差分を用いた．また，z方向の空間振動をおさえるため，時間ステップの2回に1回uとbをFourier変換して高波数成分を除去した．z方向の境界では周期境界条件を，壁（$r=1$）では次の条件を課した．

$$\bar{u}_r=0,\quad r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\bar{u}_\theta\right)=0,\quad \frac{\partial\bar{u}_z}{\partial r}=0 \quad (19)$$

$$\bar{b}_r=0,\quad E_z=\lambda\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\bar{b}_\theta)=const.,$$

$$E_\theta=\lambda\frac{\partial\bar{b}_z}{\partial r}=0 \quad (20)$$

つまり，速度に対してfree slip，磁場に対して導体壁と近似し，ただしz方向に弱い一定の電場をかけた．計算はFACOM VP-100を用いた．

3．計算結果と考察

速度，磁場などの物理量はθとz方向に統計的に一様であるので次のような平均を考える．

$$\bar{\boldsymbol{b}}=\langle\bar{\boldsymbol{b}}\rangle+\bar{\boldsymbol{b}}'' \quad (21)$$

$$\langle\bar{\boldsymbol{b}}\rangle(\equiv\boldsymbol{B})=\frac{1}{2\pi L_z}\iint\bar{\boldsymbol{b}}(r,\ \theta,\ z)\,d\theta dz \tag{22}$$

計算の初期条件は平均値を

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\kappa\boldsymbol{B},\ \ \kappa=\kappa_0\cos^2\left(\frac{\pi}{2}r\right) \tag{23}$$

$$\boldsymbol{U}=0 \tag{24}$$

で与えた．擾乱は乱数で作り，乱流強度を

$$\sqrt{\langle|\bar{\boldsymbol{b}}''|^2\rangle}=\sqrt{\langle|\bar{\boldsymbol{u}}''|^2\rangle}=10^{-3} \tag{25}$$

とした．

まず，LESモデルを使わない場合の平均磁場の分布を図4に示す．B_zは壁付近で反転しているが値は小さい．B_θは壁付近で急に値が大きくなっている．電流分布を見ると大きなJ_zが流れていることがわかる．すなわち，拡散係数λが一定で非圧縮性の計算では，十分な電場をかければ反転はするがB_θの分布が実験値と異なる．

図5はLESモデルを入れた計算結果である．B_zの反転の割合が大きくなり，B_θは$r\sim0.5$でピークをもち，壁に向かってなだらかに下がっている．つまり，非圧縮性の計算でもLESモデルを使うことによって実験値に近い磁場分布を得ることができた．

そこでB_θの発展方程式の各項のバランスを調べてみる．

$$\frac{\partial B_\theta}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial r}\langle\bar{u}_r''\bar{b}_\theta''-\bar{u}_\theta''\bar{b}_r''\rangle:\text{grid scale}$$
$$-\frac{\partial}{\partial r}\langle\overline{u_r'b_\theta'-u_\theta'b_r'}\rangle:\text{subgrid scale}$$
$$+\frac{\partial}{\partial r}\lambda\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}rB_\theta:\text{diffusion} \tag{26}$$

$\nabla\times\langle u\times b\rangle$のgrid scaleの項，subgrid scaleの項（モデル化されている），B_θのdiffusion項の3つに分けられる．図6はモデルなしの場合である．$r<0.8$でB_θの分布は上に凸であるのでdiffusion項は負であり，grid scaleの項

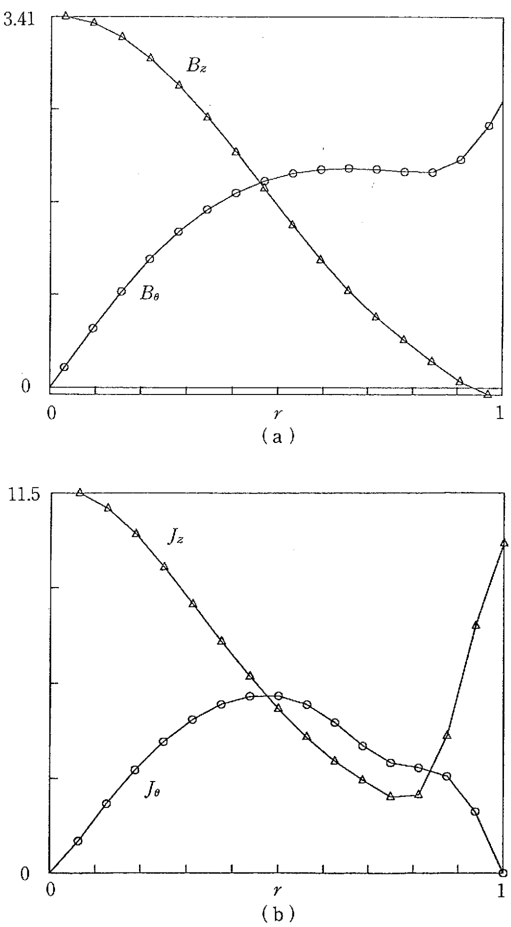

図4　(a)平均磁場分布　(b)平均電流分布
($\nu=0.04$, $\lambda=0.002$, $C_V=C_B=C_{B2}=0$, $t=48$)

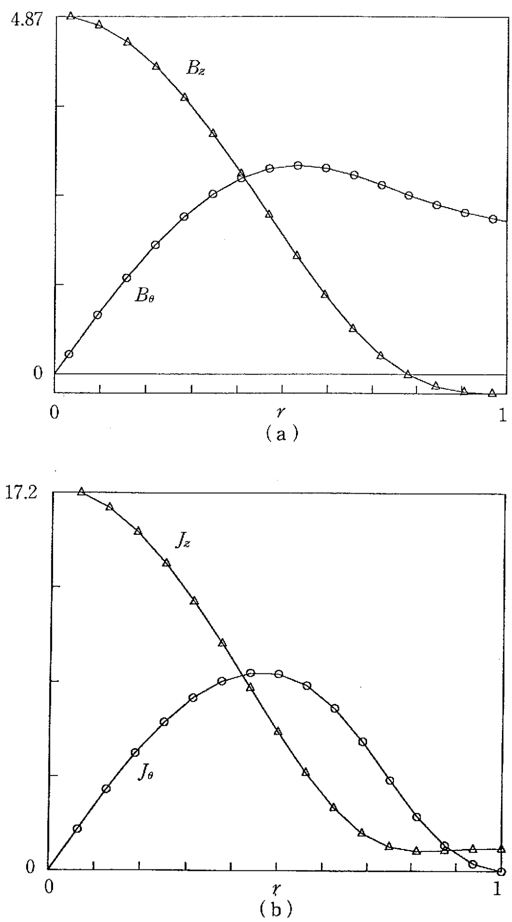

図5　(a)平均磁場分布　(b)平均電流分布
($\nu=\lambda=0$, $C_V=2$, $C_B=0.5$, $C_{B2}=0.97$, $t=240$)

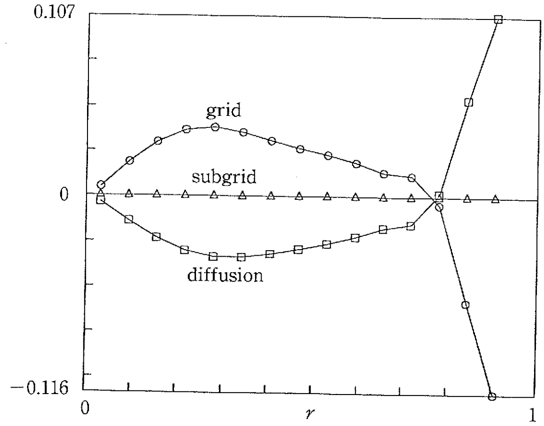

図6　B_θのバランス
($\nu=0.04$, $\lambda=0.002$, $C_V=C_B=C_{B2}=0$, $t=48$)

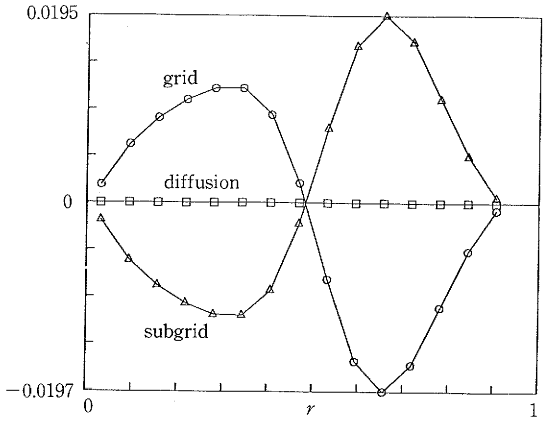

図7　B_θのバランス
($\nu=\lambda=0$, $C_V=2$, $C_B=0.5$, $C_{B2}=0.97$, $t=240$)

がそれを補っている．ところがgrid scaleの項は$r>0.8$で大きく負となり，それにつりあうためdiffusion項が正でB_θの分布が右上がりになっている．一方，モデルを入れた図7では$r>0.5$でsubgrid scaleの項が正となっている．ダイナモ効果をモデル化した第1項の影響と考えられる．

4．ま　と　め

MHD方程式のLESモデルを用いて逆転磁場ピンチの数値計算を行い，平均磁場の分布を求めた．非圧縮性の計算でもモデルを入れることで平均磁場分布を改善することができた．

(1988年10月11日受理)

参考文献

1) H.A.B. Bodin and A.A. Newton: Nucl. Fusion **20** (1980) 1255
2) J.B. Taylor: Phys. Rev. Lett. **33** (1974) 1139
3) A.Y. Aydemir, D.C. Barnes, E.J. Caramana, A. A. Mirin, R.A. Nebel, D.D. Schnack, and A.G. Sgro: Phys. Fluids **28** (1985) 898
4) K. Kusano and T. Sato: Nucl. Fusion **26** (1986) 1051
5) P. Kirby: Phys. Fluids **31** (1988) 625
6) J.W. Deardorff: J. Fluid Mech. **41** (1970) 453
7) P. Moin and J. Kim: J. Fluid Mech. **118** (1982) 341
8) A. Yoshizawa: Phys. Fluids **30** (1987) 1089