研 究 速 報
特 集 16
UDC 533.6.01:532.517:532.526

壁法則(二層モデル)を用いたLES構成

Development of LES using Law of the Wall (Two-Layer Model)

森 西 洋 平*・小 林 敏 雄*
Youhei MORINISHI and Toshio KOBAYASHI

1. は じ め に

壁を含む複雑な流れ場についてLES (Large Eddy Simulation) を適用しようとする場合，理想的な壁面境界条件として壁面近傍の差分格子を十分に細かく取りno-slip条件[1),2)]を課すのが望ましい．しかし計算機性能や格子生成との関連もあり実用的にそのような細かい格子は取り難い．可能性としては粗い格子においても壁面の存在を正確に表現する何らかの人工的壁面境界条件の適用が考えられる．壁面境界条件に人工的境界条件を与えたLESの計算例としてはDeadorff[3)]やSchumannら[4),5)]のように対数則を用いたものが知られている．しかし，前者は平行平板間乱流に対し壁面摩擦応力を既知として壁面近傍の平均速度勾配を対数則が与えたもの，後者は壁面近傍の平均速度分布に対数則をあてはめ，壁面摩擦応力を与えたものであり，そのまま複雑な流れ場に用いることは困難である．またこれらは高Reynolds数流れにおいてのみ適用可能で，格子が非常に細かくなった場合no-slip条件に帰着しない等の問題点もある．

本報ではLES実用化のため，より一般的な人工的壁面境界条件として壁法則（二層モデル）に基づき，壁座標を評価して壁面境界条件を与える手法をLESに適用することを試みる．このとき人工的壁面境界条件の取り扱いやすさから体積平均化の概念[4)]によるLESを用いる．そのために体積平均化LESの離散化式を導出した後，壁面摩擦応力を与えることにより壁面境界を表現する手法を構成する．

2. 体積平均化LESの基礎概念

非圧縮粘性流体の基礎方程式として質量および運動量の保存則を用いる．

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+\frac{\partial u_j u_i}{\partial x_j}=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{1}{Re}\cdot\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j{}^2} \tag{2}$$

差分格子を十分に細かく取ることが可能ならば式(1)，(2)を直接離散化して解くことにより流れ場を記述できると信じられている．しかしながらRe数の高い乱流領域で流れの最小スケールの渦まで捕らえることは現在のスーパーコンピュータを用いたとしてもほとんど不可能である．そこでLESでは格子平均操作を行い，流れ場をGS (Grid Scale) とSGS (Sub Grid Scale) とに分離し，前者については直接計算(DS)，後者については何らかのモデル化を行う．SGS乱れの構造は等方的であると見なせることが多く，普遍的なモデルを構成しやすいことがこれまでのLESの成功と結び付いている．LESに用いられる格子平均化操作の概念としてフィルタリングおよび体積平均化の二通りのものが用いられている．前者はフィルター関数を導入することにより，後者は注目しているコントロール・ボリューム内の体積平均を操作することにより，それぞれ流れ場をGSとSGS成分とに分離する．体積平均操作による場合，離散化式は体積平均量と面平均量が入り交じり複雑なものとなる．しかし速度場の壁面境界条件として壁面摩擦応力のみを与えればよい．このことは人工的壁面境界条件の適用によりLESの実用化を計る場合非常に有利であると考えられる．よって，ここでは体積平均化の概念により基礎方程式系を離散化する．

まず物理量の定義点を図1のように定める．速度成分はセル界面に，また圧力はセルの中心に配置する．基礎方程式系より離散化式を構成するため注目する体積V＝$\Delta x_1\Delta x_2\Delta x_3$のコントロール・ボリュームについて，物理量fの体積平均値${}^V\bar{f}$を次のように定義する．

$${}^V\bar{f}=\frac{\int_{\Delta x_3}\int_{\Delta x_2}\int_{\Delta x_1} f(y_1,y_2,y_3)\,dy_1dy_2dy_3}{\Delta x_1\Delta x_2\Delta x_3} \tag{3}$$

また，${}^j\bar{f}$ (j＝1，2，3) を物理量fのコントロール・ボリューム界面${}^jF=\Delta x_1\Delta x_2\Delta x_3/\Delta x_j$上での面平均値と

*東京大学生産技術研究所　第2部

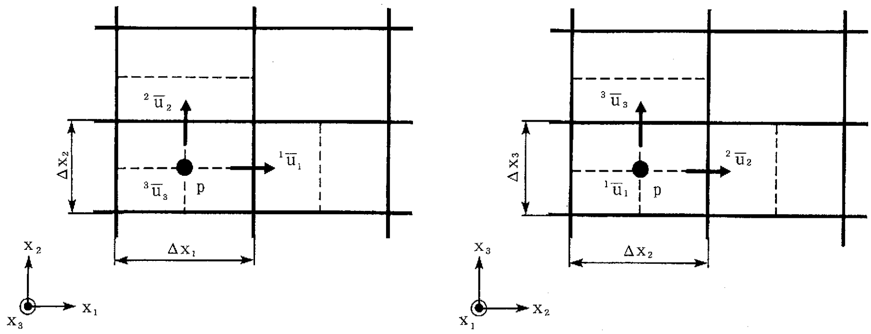

図1　物理量の定義点

する．たとえば

$$
{}^1\bar{f}=\frac{1}{\Delta x_2\Delta x_3}\int_{\Delta x_3}\int_{\Delta x_2} f(x_1 y_2 y_3 dy_2 dy_3) \qquad (4)
$$

微分オペレータの体積平均値はベクトル解析の関係式を用いて次のように体積積分値から面積分値による表現へと変換される．たとえば

$$
\frac{{}^{V}\overline{\partial f}}{\partial x_1}=\frac{1}{\Delta x_1}\left[{}^1\bar{f}\left(x_1+\frac{\Delta x_1}{2}\right)-{}^1\bar{f}\left(x_1-\frac{\Delta x_1}{2}\right)\right]
$$

$$
=\frac{\delta\,{}^1\bar{f}}{\delta x_1} \qquad (5)
$$

上式中の$\delta/\delta x_j$は通常の差分オペレーターに一致する．基礎式（1），（2）に対して式（3）を操作する．このとき質量保存則については圧力の定義点まわりのコントロール・ボリュームV，運動量保存則についてはそれぞれの速度成分u_iまわりのコントロール・ボリュームV_iについて体積平均化操作を行う．

$$
\frac{\delta\,{}^i\bar{u}_i}{\delta x_i}=0 \qquad (6)
$$

$$
\frac{\partial\,{}^{V_i}\bar{u}_i}{\partial t}+\frac{\delta\,{}^j\bar{u}_j\,{}^j\bar{u}_i}{\delta x_j}=-\frac{\delta\,{}^i\bar{p}}{\delta x_i}
$$

$$
+\frac{\delta}{\delta x_j}\left(-{}^j\overline{u'_j u'_i}+\frac{1}{Re}\cdot{}^j\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}}\right) \qquad (7)
$$

式（7）中${}^j\overline{u'_j u'_i}$は，アンサンブル平均におけるReynolds応力に相当する項で格子スケール以下の運動の影響によるSGS Reynolds応力であり，以下のように定義される．

$$
{}^j\overline{u'_j u'_i}={}^j\overline{u_j u_i}-{}^j\bar{u}_j\cdot{}^j\bar{u}_i \qquad (8)
$$

体積平均化による概念の場合，フィルター化操作で現れるLeonard・cross応力に相当する項は現れない．上式（6），（7）は近似を含まない厳密な式である．これらの式を離散的に定義された物理量を用いて表現する必要がある．連続の式（6）中の速度は先にコントロール・ボリューム界面に定義した速度成分と一致するので何の近似も必要としない．しかし式（7）中の運動量フラックスに対しては多くの近似もしくはモデルを必要とする．粘性フラックスに対しては近傍の面平均速度により差分近似を行う．SGS Reynolds応力に対しては何らかのモデルを用いる．対流フラックスに対しては近傍の面平均速度により線形補間近似を行う．たとえば図2中で物理量fのx_1点におけるx_1方向の補間値$\bar{f}^1$を求める際，以下のものが考えられる．

$$
\bar{f}^1=a_1 f(x_1-\Delta_1)+a_2 f(x_1+\Delta_{+1}) \qquad (9)
$$

$$
\bar{f}^1=b_1 f(x_1-\Delta_{-1})+b_2 f(x_1+\Delta_{+1})+b_3 f(x_1+\Delta_{+2}) \qquad (10a)
$$

$$
\bar{f}^1=c_1 f(x_1-\Delta_{-2})+c_2 f(x_1-\Delta_{-1})+c_3 f(x_1+\Delta_{+1}) \qquad (10b)
$$

$$
\bar{f}^1=d_1 f(x_1-\Delta_{-2})+d_2 f(x_1-\Delta_{-1})+d_3 f(x_1+\Delta_{+1})+d_4 f(x_1+\Delta_{+2}) \qquad (11)
$$

それぞれの係数は変数のTaylor展開により決定される．同様に誤差の評価も行える．式（9）は2次精度の2点補間でこれにより対流フラックスの近似を行うとフィルター化でのLeonard・cross応力に相当するような誤差を加えることになる．式(10)は3次精度の3点補間，式(11)は4次精度の4点補間である．以上の近似またはモデル化を行ったのち適当な境界条件を与え，式（6），（7）をカップリングしながら時間進行計算を行うことにより${}^{V_i}\bar{u}_i$を求めることができる．最後にそれぞれの速度成分について次の近似を行う．

$$
{}^i\bar{u}_i={}^{V_i}\bar{u}_i \qquad (12)
$$

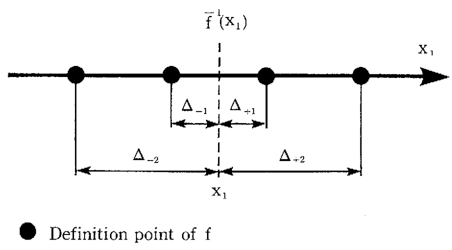

図2　x_1方向の補間

研　究　速　報

壁面境界の近似については次章で示す.

3．二層モデルによる人工的壁面境界条件

まず壁面上に定義される，壁面に垂直方向の速度成分は零とおく．このように与えることにより壁面上の境界条件としては粘性応力つまり壁面摩擦応力のみが必要となる．粘性底層を表現できるほど壁面近傍の格子を細かく取ることができれば理想的な壁面境界条件としてno-slip条件[1),2)]を適用できる．しかし現実的な問題に対しそのような細かい格子を取ることは難しい．実用的には粗い格子においても壁面を正確に表現できる境界条件が望まれる．ここでは壁法則として二層モデルを用い，より一般的な人工的境界条件を与える方法を構築し，これをLESに適用してみる．

壁法則に関連する諸量としてτ_w，u_τ，y_p^+およびu_p^+を

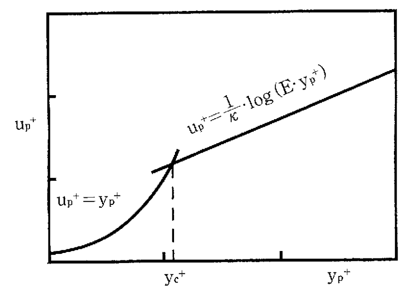

図3　二層モデルによる速度分布

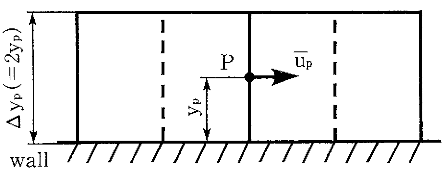

図4　壁面に接するセル

それぞれ壁面摩擦応力，壁摩擦速度，P点の壁座標およびu_τで無次元化された速度とし，次のように定義する．これらはそれぞれ代表速度，代表長さおよび流体の密度を用いて無次元化されている．

$$\tau_w = \frac{1}{Re}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{WALL} \tag{13}$$

$$u_\tau = (\tau_w)^{1/2} \tag{14}$$

$$y_p^+ = Re\cdot u_\tau\cdot y_p \tag{15}$$

$$u_p^+ = \frac{u_p}{u_\tau} \tag{16}$$

固定壁近傍において図3に見られるような壁法則（二層モデル）に従う速度u_p^+の分布を次のように仮定する．

$$u_p^+ = y_p^+ \qquad (y_p^+ \leqq y_c^+)$$

$$= \frac{1}{\kappa}\log(E\cdot y_p^+) \qquad (y_p^+ > y_c^+) \tag{17}$$

壁法則での定数としてここでは$\kappa=0.4$，$E=9.025$（$y_c^+ \fallingdotseq 11.635$）を選ぶ．上式を用いることにより壁面摩擦応力および壁からy_p離れたP点(図4参照)での速度勾配が次式のように求められる．

$$\tau_w = \frac{y_p^+}{Re\cdot u_p^+}\cdot\frac{u_p}{y_p} \tag{18}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_p = \frac{u_p}{y_p} \qquad (y_p^+ \leqq y_c^+)$$

$$= \frac{1}{\kappa\cdot u_p^+}\cdot\frac{u_p}{y_p} \qquad (y_p^+ > y_c^+) \tag{19}$$

本手法では，式(18)を用いて壁面摩擦応力を与えることを考える．ここで，式(18)を次のように書き換えておく．

$$\tau_w = \frac{y_p^+}{Re\cdot u_p^+}\cdot\frac{u_p}{\bar{u}_p}\cdot\frac{\bar{u}_p}{y_p} \tag{20}$$

式(20)中，$\bar{u}_p$は壁面近傍セル中心に配置されるセル平均速度（数値計算によって求まるGS速度）である．壁座標y_p^+および，二層モデルに従う速度とGS速度との比$u_p/\bar{u}_p$が求まれば式(20)により壁面摩擦応力を与えることがで

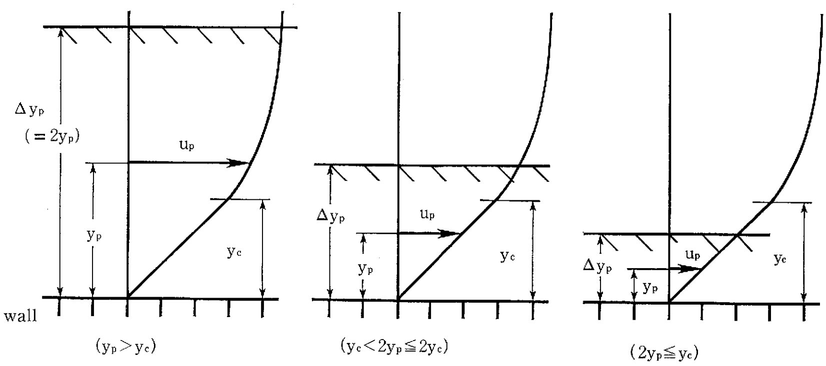

図5　格子幅と速度分布の関数

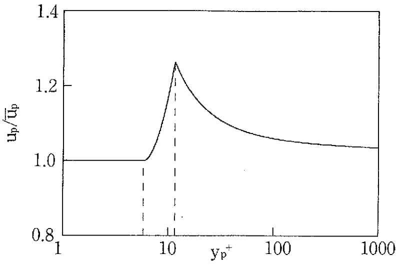

図6　壁座標y_p^+と$u_p/\bar{u}_p$との関係

きる．以下で，y_p^+および$u_p/\bar{u}_p$を求める手法について考える．

まず，二層モデルによる速度分布式(17)および壁座標の定義式(15)，(16)とを組み合わせることにより，壁座標y_p^+に関する式を得ることができる．

$$u_p=\frac{y_p^{+2}}{\mathrm{Re}\cdot y_p}\qquad (y_p^+\leqq y_C^+)\qquad (21\mathrm{a})$$

$$=\frac{y_p^+}{\mathrm{Re}\cdot y_p\cdot\kappa}\cdot\log(E\cdot y_p^+)\ (y_p^+>y_C^+)\qquad (21\mathrm{b})$$

また，図5に示されるような格子幅と二層モデルによる速度分布との関係を考え，壁面最近傍セルにおけるセル平均GS速度$\bar{u}_p$を式(22)のように与えることにより，$u_p/\bar{u}_p$はy_p^+の関数として次のように表現できる．

$$\bar{u}_p=\frac{1}{\Delta y_p}\int_0^{\Delta y_p}u_p dy\qquad (22)$$

$$\frac{u_p}{\bar{u}_p}=1\qquad (y_p^+\leqq\frac{1}{2}y_C^+)\qquad (23\mathrm{a})$$

$$=\frac{(y_p^+)^2}{\frac{y_p^+}{\kappa}[\log(2E\cdot y_p^+)-1]-\frac{y_C^{+2}}{4}+\frac{1}{\kappa}\cdot\frac{y_C^+}{2}}$$
$$(\frac{1}{2}y_C^+<y_p^+\leqq y_C^+)\qquad (23\mathrm{b})$$

$$=\frac{\frac{y_p^+}{\kappa}\cdot\log(E\cdot y_p^+)}{\frac{y_p^+}{\kappa}[\log(2E\cdot y_p^+)-1]-\frac{y_C^{+2}}{4}+\frac{1}{\kappa}\cdot\frac{y_C^+}{2}}$$
$$(y_p^+>y_C^+)\qquad (23\mathrm{c})$$

式(23)を式(21)に代入すると，y_p^+について（$y_p^+\leqq y_C^{+/2}$），（$y_C^{+/2}<y_p^+\leqq y_C^+$），（$y_p^+>y_C^+$）の三つの領域における$y_p^+$の関係式が導かれる．壁面最近傍セルの格子幅$\Delta y_p$（$=2y_p$）とGS速度$\bar{u}_p$が与えられれば，それに対応する壁座標$y_p^+$はいずれかの領域に存在する．$y_p^+$に関係して非線形方程式となるものは，Newton法等の繰り返し法を用いて解く必要がある．求まった壁座標y_p^+を式(17)，(23)にも適用し，式(20)を用いることにより，壁面摩擦応力が得られる．なお，$u_p/\bar{u}_p$の値をy_p^+の関数として示したものが図6である．$u_p/\bar{u}_p$の値は$y_p^+=y_C^+$において極値をもち，$(u_p/\bar{u}_p)_{MAX}\fallingdotseq 1.263$である．$u_p=\bar{u}_p$のように近似して式(21)のみを解けばより簡単に壁座標y_p^+を求めることができるが，しかし特に$y_p^+=y_C^+$付近で二層モデルに対する近似の悪くなることがわかるであろう．

表1　計算手順

壁面境界条件計算手順

κ，Eを与える．	①　二層モデルの仮定．
Re数を与える．	②　流れ場の情報．
GS速度格子幅を与える．	③　壁面に接するセルの情報．
壁座標の算出	④　繰り返し法により壁座標に関する式を解く．
壁面境界条件	⑤　壁面摩擦応力を与える．

ここで構成した壁面境界条件は壁に接するセルのセル幅（正確には壁座標）が小さくなるとno-slip条件に帰着し，セルが大きくなると対数則に近づく．また逆流域に対しても適用可能であるので，LESにおけるより実用的な人工的壁面境界条件である．計算手順を表1に示しておく．

4．ま　と　め

LES実用化のため，人工的壁面境界条件の取り扱いやすい体積平均化LESの離散化式を導出した後，より一般的な人工的壁面境界条件として壁法則（二層モデル）に基づき，壁座標を評価して壁面境界条件を与える手法を構成した．本手法の手順は以下のとおりである．

1）流れ場のレイノルズ数Re，壁法則に用いる定数κ，Eおよび臨界壁座標y_C^+を与える．

2）壁面に接するセルについて，壁面に平行なGS速度$\bar{u}_p$およびその定義点の壁からの距離y_pを与える．

3）式(21)，(23)を解き壁座標y_p^+を求める．

4）求まった壁座標y_p^+を式(17)，(23)にも適用し，式(20)に代入することにより壁面摩擦応力を得る．

（1988年10月7日受理）

参　考　文　献

1) P. Moin and J. Kim, J. Fluid Mech. 118, 341 (1982)
2) K. Horiuti, J. Compt. Phys. 71, 343 (1987)
3) J.W. Deadorff, J. Fluid Mech. 41, 453 (1970)
4) U. Schumann, J. Comput, Phys, 18, 376 (1975)
5) G. Grötzbach and U Schumann, Turbulent Shear Flow I, Springer (1979)