研　究　速　報
特　集　17
UDC 533.6.01：532.517.4：519.6

平行平板間乱流のLES計算

Large Eddy Simulation of Turbulent Channel Flow

森　西　洋　平*・小　林　敏　雄*
Youhei MORINISHI and Toshio KOBAYASHI

1．は　じ　め　に

LES実用化のため，より一般的な人工的壁面境界条件として壁法則（二層モデル）を用い，壁座標を評価して壁面境界条件を与える手法をすでに提案した[1]．本報では平行平板間乱流の数値計算にこの人工的壁面境界条件を適用し，手法の妥当性を示す．

2．数 値 計 算 手 法

先に構成した壁面境界条件の取り扱い手法の妥当性を示すために平行平板間乱流の数値計算を行う．計算対象として，図1に示す流れ場を考える．座標系は流れ方向をx_1，スパン方向をx_2，壁面に垂直な方向をx_3に選び，それぞれの方向の速度をu_i（$i=1,\ 2,\ 3$）とする．流れ場はx_1およびx_2方向に周期的としx_1方向の平均圧力勾配－2により流れが促進される．このような流れ場を記述する離散化式として質量保存の式および運動量保存の式(1)，(2)を用いる[1),2)]．

$$\frac{\delta^{i}\bar{u}_i}{\delta x_i}=0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial^{i}\bar{u}_i}{\partial t}=\frac{\delta}{\delta x_j}\Big(-{}^{j}\overline{\overline{u_j}}^{i}\cdot{}^{j}\overline{\overline{u_i}}^{j}-{}^{j}\overline{u'_j u'_i}+\frac{1}{3}\delta_{ij}\,{}^{k}\overline{u'_k u'_k}$$

$$+\frac{1}{Re}\cdot\frac{\delta^{i}\bar{u}_i}{\delta x_j}-\delta_{i3}\delta_{j3}<-{}^{3}\overline{\overline{u_3}}^{3}\cdot{}^{3}\overline{\overline{u_3}}^{3}-{}^{3}\overline{u_3'^{2}}$$

$$+\frac{1}{3}\,{}^{k}\overline{u'_k u'_k}+\frac{1}{Re}\cdot\frac{\delta^{3}\bar{u}_3}{\delta x_3}>\Big)$$

$$-\frac{\delta P'}{\delta x_i}+2\delta_{i1}=\mathbf{F}_i \qquad (2)$$

$$P'=({}^{i}\bar{p}+\frac{1}{3}\,{}^{k}\overline{u'_k u'_k})-<{}^{i}\bar{p}+\frac{1}{3}\,{}^{k}\overline{u'_k u'_k}>$$

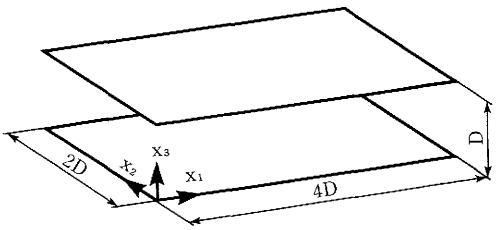


図1　平行平板間乱流

*東京大学生産技術研究所　第2部

式(2)中の<>はx_1-x_2面上の平均値を意味し，十分に発達した平行平板間乱流における質量の保存式からの制約$<{}^{3}\bar{u}_3>=0$および$<\partial({}^{3}\bar{u}_3)/\partial t>=0$を保証するものである[3)]．式(1)および式(2)をカップリングするため，次の時間進展式を用いて陽的に計算を進める．

$${}^{i}\bar{u}_i^{\,n+1}={}^{i}\bar{u}_i^{\,n}-\Delta t\frac{\delta P'}{\delta x_i}+\Delta t(1.5\mathbf{F}_i^{\,n}-0.5\mathbf{F}_i^{\,n-1}) \qquad (3)$$

$$\frac{\delta^{2}P'}{\delta x_i^{\,2}}=\frac{\delta}{\delta x_i}(\frac{{}^{i}\bar{u}_i}{\Delta t}+1.5\mathbf{F}_i^{\,n}-0.5\mathbf{F}_i^{\,n-1})=Q \qquad (4)$$

式(4)は式(2)に発散を操作し$n+1$時刻において質量保存の式(1)を満たすように変形して得られる圧力のPoisson式である．圧力のPoisson式の解法にはより精度の良い擬spectral法[4)]を用いる．圧力P'について式(5)のようにFourier級数展開を行う（上つき～は変数のFourier係数，またN_1，N_2はそれぞれx_1，x_2の方向の格子数）．このときQについても同様に変換を行う．

$$P'_{i,j,k}=\sum_{l}\sum_{m}\tilde{P}'_{l,m,k}\exp\left[\sqrt{-1}\cdot 2\pi\left(\frac{il}{N_1}+\frac{jm}{N_2}\right)\right] \qquad (5)$$

式(5)を式(4)に代入することにより，圧力Poisson式のFourier係数に対する方程式を得る．

$$\frac{\delta^{2}\tilde{P}'_{l,m,k}}{\delta x_i^{\,2}}+(k'^{2}_1+k'^{2}_2)\tilde{P}_{l,m,k}=\tilde{Q}_{l,m,k}$$

$$k_1'^{2}=\frac{2}{(\Delta x_1)^2}\left[\cos\left(\frac{2\pi l}{N_1}\right)-1\right] \qquad (6)$$

$$k_2'^{2}=\frac{2}{(\Delta x_2)^2}\left[\cos\left(\frac{2\pi l}{N_2}\right)-1\right]$$

x_3方向について差分近似を行い三重対角行列の解法を用

表1 計算例

Case	Mesh ($x_1 \times x_2 \times x_3$)	Δx_1	Δx_2	Δx_3	SGS model
CASE1	32×32×40	4/32	2/32	0.0021～0.0733	S model(C_s=0.10)
CASE2	32×32×40	4/32	2/32	1/40	S model(C_s=0.10)
CASE3	32×32×20	4/32	2/32	1/20	S model(C_s=0.10)
CASE4 *)	32×32×40	4/32	2/32	1/40	S model(C_s=0.10)
CASE5	32×32×40	4/32	2/32	1/40	S model(C_s=0.08)
CASE6	32×32×40	4/32	2/32	1/40	S model(C_s=0.12)

*) $\bar{u}_p$ of x_1-x_2 plane average value in Eqs. (20), (23) of Ref. 1)

いれば上式(6)は簡単に解くことができる．圧力の壁面境界条件は式(3)により得られる．さらに逆変換を行うことにより式(4)を満たす圧力P'が精度よく求まる．このとき<P'>＝0により$\tilde{P}'_{0,0,k}=0$としている．ここでは手法の確認のために平行平板間乱流を取り扱うので圧力の解法としてより精度の良い擬spectralを用いているが，現実的な問題に対しては質量および運動量の保存則をカップリングする他のスキームを用いる必要がある．

表1に今回行った数値計算例の一覧を示す．差分格子としては32×32×40（等間隔），32×32×40（x_3方向のみ不等間隔）および32×32×20（等間隔）を用いている．SGSモデルとしては式（7）のSmagorinskyモデル（S model）[3]を採用している．

$$-\overline{{}^{j}u'_i u'_j}+\frac{1}{3}\delta_{ij}\overline{{}^{k}u'_k u'_k}=\nu t\cdot S_{ij}$$

$$\nu t=(C_s f\Delta)^2\left(\frac{1}{2}S_{ij}\cdot S_{ij}\right)^{1/2}$$

$$S_{ij}=\frac{\delta^{j}\bar{u}_i}{\delta x_j}+\frac{\delta^{i}\bar{u}_j}{\delta x_i}$$

$$\Delta=(\Delta x_1\Delta x_2\Delta x_3)^{1/3} \qquad (7)$$

$$f=1-\exp\left(-\frac{h^+}{A^+}\right)$$

SGS渦粘性係数には減衰関数を使用している．h^+は壁座標であり，またA^+＝25を用いている．対流フラックスの補間には4点補間を用いる．このとき壁面近傍セルで4点補間が適用できないときのみ壁側をさけて3点補間を用いる．壁面境界条件としては，壁面に接する各セルにおいての瞬時のGS速度（一例のみGS速度のx_1-x_2面平均値により壁座標を評価）を用い，前報で構成した手法[1]により壁面摩擦応力を与える．これは，壁座標の評価に二層モデルを用い，また瞬時の壁面摩擦応力が瞬時のGS速度に同期するようモデル化されたものと考えることができる．x_1およびx_2方向には周期条件を課している．流れ場の初期条件として，平均速度に二層モデルの分布，乱れとしてKreplin & Eckermann[5]による実験結果の二倍の乱流強度の乱数を与える．平板間隔D，壁面摩擦速度u_τおよび流体の動粘性係数νによるレイノルズ数Re（$=u_\tau D/\nu$）を1280と選び計算を行う．時間進行法での時間刻みΔtは1/1000にとり無次元時間T＝20までの計算を行った後T＝20～21の間で平均を計算する．なお，以降で《》の付いた値はx_1-x_2面および時間に関するアンサンブル平均値を意味する．

3．計算結果

複雑な流れ場において前段階の計算結果により平均速度場を求め壁座標を評価し計算を繰り返すことは可能ではある．しかし手間がかかるうえ，非定常流れ場で平均速度場により壁座標を求め境界条件を与えることが正しいという保証はない．本来壁法則は平均速度場において成立するものであるが，瞬時値に壁法則を適用してある程度の結果が得られるなら実用上非常に有用であると考えられる．

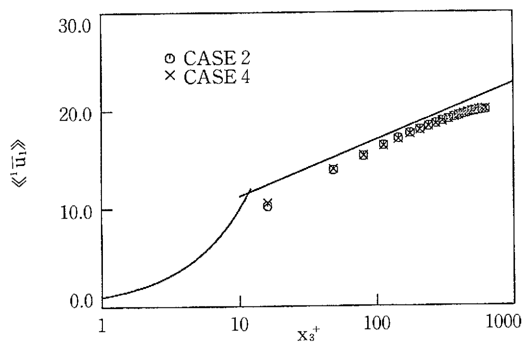


図2 x_1方向平均速度における壁面境界条件評価の違いの影響

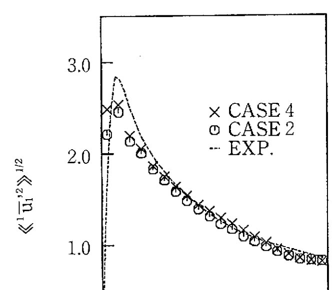


図3 x_1方向乱流強度における壁面境界条件評価の違いの影響

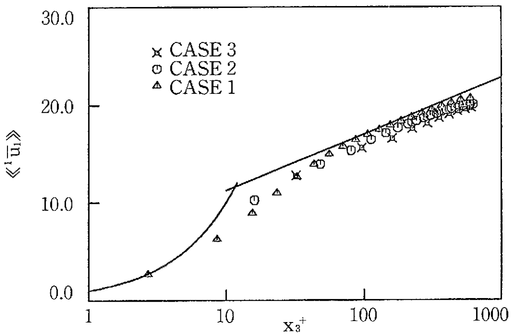


図4　x_1方向平均速度における壁方向格子幅の影響

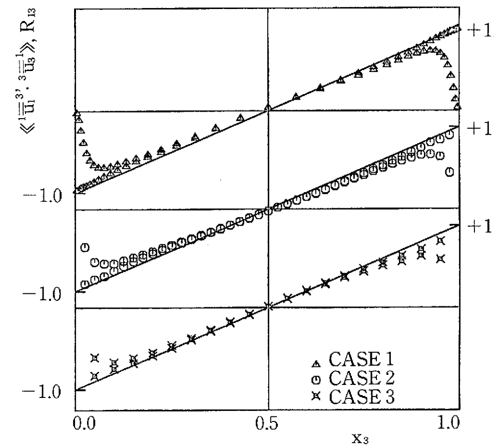
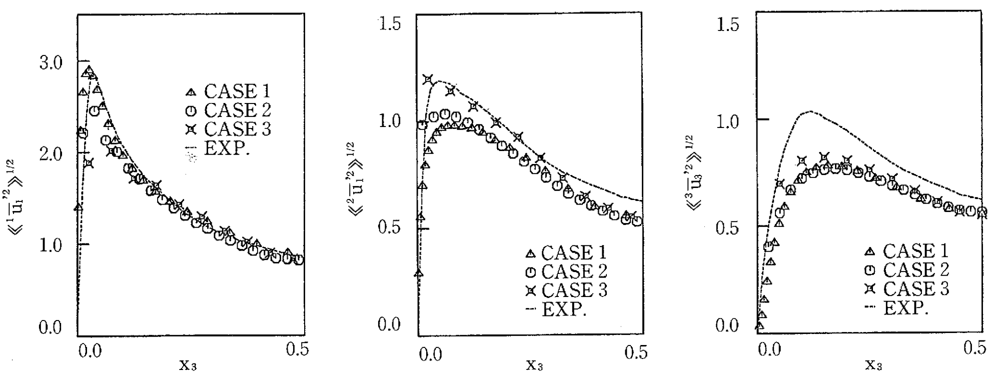


図5　せん断応力における壁方向格子幅の影響



（a）　x_1方向成分　　（b）　x_2方向成分　　（c）　x_3方向成分

図6　GS乱流強度における壁方向格子幅の影響

図2，図3に，各時間ステップにおける壁座標の評価に対し，各壁面セルのGS速度（平均速度場でない）および壁面セルのGS速度のx_1-x_2面平均値（平均速度場）を用いた計算例の主流方向平均速度および主流方向乱流強度における影響をそれぞれ示す．平均速度場にほとんど違いのみられないことがわかる．乱れについては壁面近傍でわずかに違いが認められるもののお互いほぼ一致する．図中の波線はKreplin & Eckermann[5)]の実験値である．以下の計算では，各時間ステップ，各壁面セルごとに瞬時のGS速度を用いて壁座標の評価をおこなう．

図4，図5，図6（a）～（c）に，主流方向平均速度，せん断応力およびGS乱流強度のx_3方向分布におけるx_3方向格子幅の違いによる比較をそれぞれ示す．図4において壁方向の格子幅によらずいずれの計算結果も対数則領域が存在していることが示されている．図中の実線は式(17)の壁法則による速度分布である．図5において$(-1+2x_3)$を表す実線は平板間の発達乱流におけるせん断応力R_{13}の理論値である．壁面近傍で零に近づくものがGSレイノルズ応力，実線に沿い分布を示すものがせん断応力R_{13}の計算結果である．

$$R_{13}=\langle\langle {}^{1}\overline{\bar{u}}_1^{3'}\cdot {}^{3}\overline{\bar{u}}_3^{1}\rangle\rangle+\langle\langle {}^{3}\overline{u_1'u_3'}\rangle\rangle-\langle\langle \frac{1}{Re}\cdot\frac{\delta^1\bar{u}_1}{\delta x_3}\rangle\rangle \quad (8)$$

この図より壁方向の差分格子が異なっても本手法により壁面摩擦応力が正しく与えられていることがわかる．図6中の破線はKreplin & Eckermann[5)]による乱流強度の実験値を示す．計算結果はいずれの乱れ成分においても壁近傍で解像度による違いはみられるものの，流路中央部でのレベルは実験値をほぼ正しく再現していると言える．壁近傍においても定性的には実験値を表現している．また，x_2，x_3方向の乱れ成分はx_3方向の格子のみを細かくしても改善されないことがわかる．x_2方向の乱れ成分において粗い格子のほうが壁面近傍でむしろ実験値に近

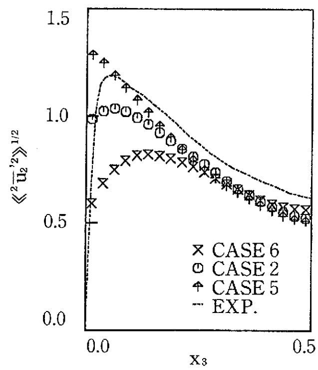


図7　x_2方向GS乱流強度におけるモデル定数の影響

い値を示すのは格子幅とモデル定数の影響がSGS成分を通して現れたものと思われる.

図7にSmagorinskyモデルの定数のみを変化させた計算例のx_2方向GS乱流強度の計算結果示す.図に見られるようにモデル定数の影響は壁近傍で顕著であることがわかる.

壁乱流における壁面近傍の乱流強度の分布は壁面構造に起因するものであると考えられる. 実用上の粗い差分格子で壁面近傍乱れの構造まで十分に分解することは不可能であり, そこまで実験値に合わせるならば壁面構造を表現するモデルを導入する必要がある. 本手法では, 壁面構造に関連する瞬時の壁面摩擦応力が瞬時のGS速度に同期するという簡単なモデルを導入したものと考えることができる.

瞬時の壁面摩擦応力に対するモデル化の精度を確認するため, CASE1による計算結果をデータベースとして用い, 壁面摩擦応力の評価を行ってみる. CASE1は事実上no-slip条件の計算となっており, 評価の目安は得られるものと思われる. CASE1の計算結果をno-slip条件とみなし, 速度場から直接得られるx_3面に働くx_1方向の壁面摩擦応力およびそのx_1-x_2面からのずれをそれぞれ$\tau_W{}^R$および$\tau_W{}^{R'}$ ($\tau_W{}^{R'}=\tau_W{}^R-\langle\tau_W{}^R\rangle$) とする. また, CASE1の計算結果を用い, より粗い差分格子の計算における壁面際近傍セルのGS速度に対応する, 壁方向座標y_P点における瞬時のGS速度$\bar{U}_P(x_1,x_2,y_p)$を次のように求める.

$$\bar{U}_P(x_1,x_2,y_p)=\frac{1}{2y_P}\int_0^{2y_P}U_1^{y_P}(x_1,x_2,x_3)\,dx_3 \qquad (9)$$

このGS速度$\bar{U}_P(x_1,x_2,y_p)$および壁からの距離y_Pを用い, 前報[1]で構成した手法により壁面摩擦応力を求め、x_3面に働くx_1方向の壁面摩擦応力およびそのx_1-x_2面平均値からのずれを$\tau_W{}^C$および$\tau_W{}^{C'}$とする. $\tau_W{}^R$と$\tau_W{}^C$および$\tau_W{}^{R'}$と$\tau_W{}^{C'}$それぞれの相関係数を次のように定義し, 図8に

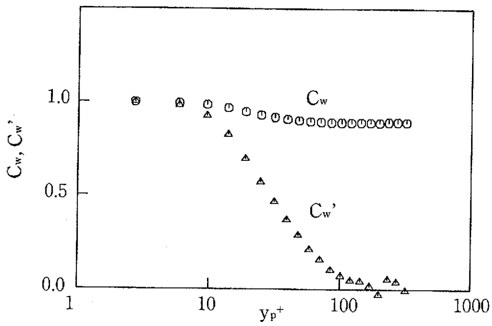


図8　壁面摩擦応力の相関係数C_WおよびC_W'

示す.

$$C_W=\frac{\langle\tau_W{}^R\cdot\tau_W{}^C\rangle}{\langle\tau_W{}^{R2}\rangle^{1/2}\cdot\langle\tau_W{}^{C2}\rangle^{1/2}} \qquad (10)$$

$$C_W'=\frac{\langle\tau_W{}^{R'}\cdot\tau_W{}^{C'}\rangle}{\langle\tau_W{}^{R'2}\rangle^{1/2}\cdot\langle\tau_W{}^{C'2}\rangle^{1/2}} \qquad (11)$$

図8によると, 壁面摩擦応力の絶対値は壁座標$y_P{}^+$(壁に接するセルの大きさの1/2に対応) によらずほぼ正確に表現されている. しかし, 壁面摩擦応力の変動分については, 壁面近傍であまり粗い格子を用いると精度の落ちることがうかがえる.

4. ま と め

新たに構成した二層モデルによる壁面境界条件の妥当性の確認のため平行平板間乱流の数値計算を実行し, 瞬時の流れ場に壁法則を適用しても平均速度場および乱流強度の計算結果は面平均流れ場により壁面境界条件を評価したものとあまり変わらないこと, 対数則領域の存在する速度分布が得られること, 壁面摩擦応力が正しく与えられていること, Smagorinskyモデルを用いてほぼ正しい乱れのレベルが得られること, 等の結果が得られた. また, 細かい差分格子の計算結果をデータベースに用い, 壁面摩擦応力の評価もおこなった. これらにより本手法による壁面境界条件は実用上非常に有用であると言える.

(1988年10月7日受理)

参 考 文 献

1) 森西, 小林, 生産研究, 41-1, 72 (1989)
2) U. Schumann, J. Comput, Phys. 18, 376 (1975)
3) J.W. Deadorff, J. Fluid Mech. 41, 453 (1970)
4) C. Canuto and M.Y. Hussaini et. al "Spectral Methods in Fluid Dynamics", Springer (1987)
5) H-P. Kreplin and M.Eckermann, Phys. Fluids 22, 1233 (1979)