

## 乱流モデルにおける低レイノルズ数効果の表現

A Representation of Low-Reynolds-Number Effect in Turbulence Modeling

下村 裕\*

Yutaka SHIMOMURA

## 1. はじめに

流れはレイノルズ数 $R$ の大小によって層流状態と乱流状態に大別される。 $R \gg 1$ では乱流, $R \ll 1$ では層流となるのである。レイノルズ数 $R$ はナビエ・ストークス方程式における移流項(非線形項)の粘性項(拡散項)に対する割合を示すパラメータであって、動粘性率 $\nu$ 、流れの代表的速度 $U$ 、代表的長さ $L$ を用いて

$$R = O(\text{移流項}) / O(\text{粘性項}) = UL / \nu, \quad (1)$$

と表せる。乱流は拡散性より非線形性が支配的な流れであることがわかる。ここで注意しなければならないのは、(1)で定義された $R$ が一つの流れに対して一対応させられたグローバルな量であり、流れ場の平均的な性格しか表していないということである。しかしながら、現実の流れでは乱流と層流が混在し流れの状態が場所ごとあるいは時々刻々と変化するために、平均的に観察するだけでは不十分な場合が多い。たとえば粘着条件を課された壁を境界とする乱流においても、壁のごく近傍では粘性項が移流項に比べて大きい。したがって壁近傍のローカルなレイノルズ数は小さいのである。乱流におけるこのような低レイノルズ数効果は乱流をモデル化する際にも必要となる。実際、二方程式型の乱流モデルとして多用されている $K-\varepsilon$ モデル<sup>1)</sup>( $K$ は乱流エネルギー、 $\varepsilon$ はエネルギー散逸率)では、壁による低レイノルズ数効果として壁減衰関数(Wall Damping Function)  $f$ を渦粘性 $\nu_e$ に組み込んでいる。すなわち、 $\nu_e$ を

$$\nu_e = f \nu, \quad (2)$$

$$\nu_e = C_N K^2 / \varepsilon, \quad (C_N: \text{定数}) \quad (3)$$

とモデル化するのである。関数 $f$ は、ローカルなレイノルズ数が高いと1に、低いと0に漸近するような関数であり、代表的な $f$ として次のVan Driest型の壁減衰関数がある。

$$f = 1 - \exp(-y^+ / A). \quad (A: \text{定数}) \quad (4)$$

ここで $y^+$ は壁座標と呼ばれるもので、壁からの垂直距離

\*東京大学生産技術研究所 第1部

$y$ と壁摩擦速度 $u_\tau (= \sqrt{\nu \partial U / \partial y}|_{y=0})$ を用いて

$$y^+ = u_\tau y / \nu, \quad (5)$$

と定義されている。壁座標 $y^+$ は一種のローカルなレイノルズ数となっていることに注目したい。Van Driest型の壁減衰関数は、境界が一枚の壁であるような単純な流れに対してはその有効性が経験的に確認されているが、ダクト内の流れやステップのある流れ等複雑な壁境界をもつ流れに対しては適用が困難である。互いに直交する壁に囲まれたダクト流では、二種類の壁座標 $x^+$ 、 $y^+$ を用いて

$$\begin{aligned} f &= f(x^+, y^+) \\ &= (1 - \exp(-x^+ / A)) \cdot (1 - \exp(-y^+ / A)), \end{aligned} \quad (6)$$

という形をもつ壁減衰関数が適用された例がある<sup>2)</sup>が、その妥当性は明らかではない。そこで、もっと一般的な形の減衰関数が必要となる。そのためには $y^+$ に代わる別のローカルなレイノルズ数が導入されねばならない。なぜなら、減衰関数は本来ローカルなレイノルズ数変化を表現するものであるからである。たとえば渦粘性と分子粘性の比はどうであろうか。すなわち

$$R_T = \nu_t / \nu, \quad (7)$$

で定義される $R_T$ である。実際これは乱流レイノルズ数と命名され、 $R_T$ を独立変数とする減衰関数 $f = f(R_T)$ を調べた例もある<sup>3)</sup>。しかしながら、その理論的根拠、具体的な $f$ の形等不明な部分が多い。そこで本研究では減衰関数 $f$ の理論的導出を行い、その適用性を $K-\varepsilon$ モデルとLES(Large Eddy Simulation)モデル<sup>4)</sup>に対して調べる。

## 2. 定式化

減衰関数を導出する手法として2スケールDI近似(TSDIA)<sup>5)</sup>を用いる。吉澤はTSDIAを用いて、 $K-\varepsilon$ モデルにおける低レイノルズ数効果のない渦粘性の導出に成功している。以下にその導出法の概略を説明する。

研究速報

TS DIAによると、乱流エネルギー $K$ と渦粘性 $\nu_e$ は次のように表現される。

$$K = 4\pi \int_{k_i}^{\infty} dk k^2 Q(k; t, t), \quad (8)$$

$$\nu_e = \frac{16}{15}\pi \int_{k_i}^{\infty} dk k^2 \int_{-\infty}^t dt' F(k; t, t') Q(k; t', t), \quad (9)$$

ここで $Q$ は2時刻速度相関、 $F$ は応答関数、 $k_i$ は $K$ と $\varepsilon$ で決まる特徴的波数である。次に $Q$ と $F$ の関数型を

$$Q(k; t, t') = \sigma(k) \exp[-\omega(k) |t - t'|], \quad (10)$$

$$F(k; t, t') = H(t - t') \exp[-\alpha\omega(k)(t - t')], \quad (11)$$

と簡略化する。ここで $H$ は単位階段関数である。さらに $\sigma(k)$ と $\omega(k)$ を以下のように慣性領域近似する。

$$\sigma(k) = \sigma \cdot \varepsilon^{2/3} \cdot k^{-11/3}, \quad \omega(k) = \omega \cdot \varepsilon^{1/3} \cdot k^{2/3}, \quad (12)$$

$$\sigma = 0.12, \quad \omega = 0.42, \quad \alpha = 0.77.$$

この近似は $k_i$ が慣性領域にあり、コルモゴロフの散逸波数

$$k_d = \varepsilon^{1/4} \nu^{-3/4}, \quad (13)$$

より小さいことを前提としている。(10)、(12)を(8)に代入して

$$k_i = (6\pi\sigma)^{3/2} K^{-3/2} \varepsilon, \quad (14)$$

を得る。そして(9)、(10)–(12)、(14)より

$$\nu_e = \nu_i, \quad (15)$$

$$\nu_i = \frac{1}{(45\pi\sigma\omega)(1+f)} \cdot K^2/\varepsilon \sim 0.079K^2/\varepsilon, \quad (16)$$

と $f=1$ の(減衰関数の無い)渦粘性 $\nu_e$ を導出できる。

### 3. 低レイノルズ数効果のモデル化

2.で低レイノルズ数効果が入らなかった( $f=1$ )のは

$$k_i \ll k_d, \quad (17)$$

という仮定にある。なぜならローカルなレイノルズ数として $R_T$ を考えると

$$R_T \propto (k_i/k_d)^{-3}, \quad (18)$$

より、(17)と $R_T \gg 1$ は同値であるからである。したがって低レイノルズ数効果を表現するためには $k_i$ と $k_d$ が同程度の大きさとなる状況を考慮しなければならない。このとき(9)の波数 $k$ に関する積分では散逸領域のスペクトルが重要となる。そこで慣性領域から散逸領域をつなぐ関数 $D_\sigma$ と $D_\omega$ を導入して $k \sim k_d$ では散逸領域のスペクトルを表すように(12)を以下のように拡張する。

$$\sigma(k) = \sigma \cdot \varepsilon^{2/3} \cdot k^{-11/3} \cdot D_\sigma(k/k_d), \quad (19)$$

$$\omega(k) = \omega \cdot \varepsilon^{1/3} \cdot k^{2/3} \cdot D_\omega(k/k_d).$$

ここで関数 $D_\sigma$ と $D_\omega$ は

$$D_\sigma(k/k_d) = \begin{cases} 1 & (k/k_d \ll 1) \\ 0 & (k/k_d \gg 1), \end{cases}$$

$$D_\omega(k/k_d) = \begin{cases} 1 & (k/k_d \ll 1) \\ (k/k_d)^{4/3}/\omega & (k/k_d \gg 1), \end{cases} \quad (20)$$

という漸近形を持っている。特に $k/k_d \gg 1$ での $D_\omega$ の条件は、その領域で $\omega(k) = \nu k^2$ を要求したものである。具体的な関数形としては、 $A$ を定数として

$$D_\sigma(k/k_d) = [1 + (A \cdot k/k_d)^4]^{-4/3}, \quad \text{or } \exp[-(A \cdot k/k_d)^2], \quad (21)$$

$$D_\omega(k/k_d) = 1 + (k/k_d)^{4/3}/\omega, \quad (22)$$

が考えられる<sup>6)</sup>。

(14)と(19)を(9)に代入することによって渦粘性 $\nu_e$ に対する次の表式を得る。

$$\nu_e/\nu = \int_0^{\nu/\nu} D_\sigma((Cr)^{-3/4})/D_\omega((Cr)^{-3/4}) dr, \quad (23)$$

$$C = \frac{5}{4\pi} \cdot \omega(1+f)/\sigma \sim 2.46. \quad (24)$$

ここで $\nu_i$ は(16)で定義されたものである。(23)を(2)のように減衰関数を用いて表せば、

$$f = \nu_e/\nu_i = f(R_T) = \frac{1}{R_T} \int_0^{R_T} S(r) dr,$$

$$S(r) = D_\sigma((Cr)^{-3/4})/D_\omega((Cr)^{-3/4}), \quad (25)$$

となる。(23)または(25)において $D_\sigma(k/k_d) = D_\omega(k/k_d) = 1$ とおけば $f(k/k_d) = 1$ となって、もちろん(15)が再現される。また $D_\sigma(k/k_d) = 1$ 、とおき $D_\omega(k/k_d)$ を(22)で与えると(25)は解析的に積分できて、

$$f(R_T) = 1 - \ln(1 + R_T/C_1)/(R_T/C_1), \quad (26)$$

$$C_1 \sim 0.97,$$

という減衰関数がえられる。(26)の $f(R_T)$ は

$$f(R_T) = \begin{cases} 1 & (R_T \gg 1) \\ 0 & (R_T \ll 1), \end{cases} \quad (27)$$

という性質を持ち、低レイノルズ数効果を表現していることが確認できる。最近、稲毛と山川<sup>7)</sup>は同様の手法で $R_T$ とプラントル数に依存する $K$ - $\varepsilon$ モデルを導出し、減衰関数(26)を

$$f(R_T) = 1 - \ln(1 + R_T/C_2)/(R_T/C_2), \quad (28)$$

$$C_2 \sim 1.2, \quad C_3 \sim 36.7,$$

と最適化した。しかしながら(28)はモデル定数を2個含んでおり、 $R_T$ が0に漸近(層流化)するとき、

$$f(R_T) = 1 - C_3/C_2 \sim -30 \quad (R_T \ll 1), \quad (29)$$

となって(27)のように0に移行しない。これは、導出の際(22)の右辺第2項に最適化定数を付け加えたことに起因しており、低レイノルズ数効果の表現としては不自然である。

研究速報

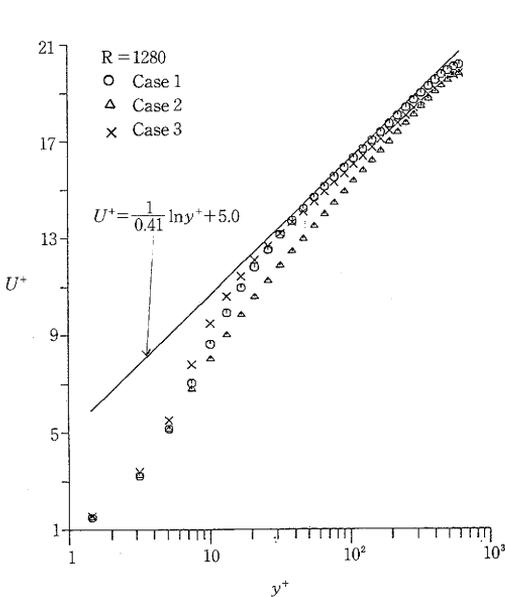


図1 平均流 $U^+$ 対壁座標  $\ln(y^+)$ の比較

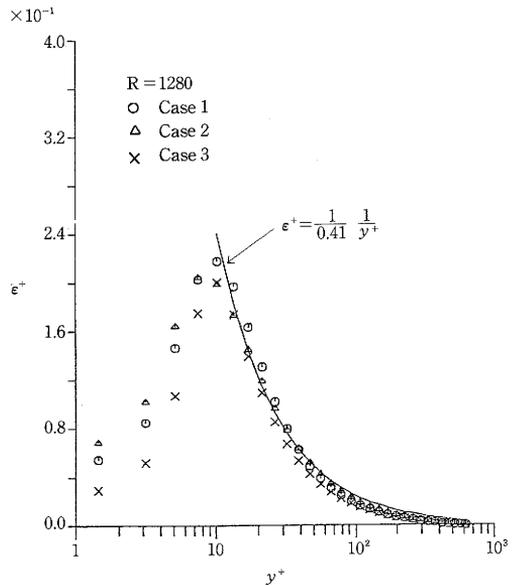


図3 エネルギー散逸率 $\epsilon^+$ 対壁座標  $\ln(y^+)$ の比較

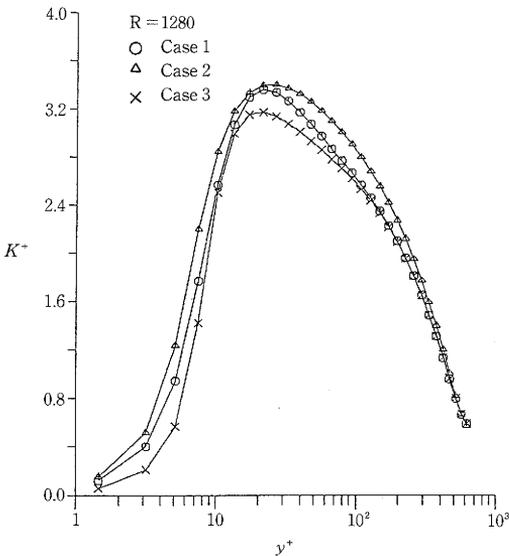


図2 エネルギー $K^+$ 対壁座標  $\ln(y^+)$ の比較

4. 応 用

3.で統計理論的に示されたのは、減衰関数 $f$ はローカルなレイノルズ数 $R_\tau$ を独立変数とする $f(R_\tau)$ となるということである。この節ではそのような $f(R_\tau)$ を $K-\epsilon$ モデル、およびLESモデルに組み込んで無限平行平板間溝

乱流をシミュレートする。

$K-\epsilon$ モデルでは次の3種類の減衰関数を比較した。

Case 1:  $f(y^+) = 1 - \exp(-y^+/23.0)$ ,

Case 2:  $f(R_\tau) = 1 - \frac{\ln(1 + R_\tau/1.98)}{(R_\tau/1.98)}$ ,

Case 3:  $f(R_\tau) = 1 - \exp(-R_\tau/6.07)$ . (30)

Case 1は(4)のVan Driest型壁減衰関数で $y^+$ は壁に垂直な方向の壁座標を表している。Case 2は(26)で $C_1 = 1.98$ と最適化したもので、Case 3は(27)の性質を持つ別の関数である。図1-3に $K-\epsilon$ モデルのシミュレーション結果を示す。図1は平均流 $U^+$ を、図2はエネルギー $K^+$ を、図3はエネルギー散逸率 $\epsilon^+$ を、それぞれ $\ln(y^+)$ に対してプロットしたものである。 $K^+$ と $\epsilon^+$ はCase 1, 2, 3で大差ない。 $U^+$ はわずかに異なるが(30)中のモデル定数を少し変化させればこれも差を無くすることができる。ただしその際問題となるのは、(30)中のモデル定数(1.98, 6.07)に対する結果の極端な敏感性である。Case 2では1.98を2.0に、Case 3では6.07を6.08に変更すると平均流 $U^+$ がCase 1の場合と大きくずれてしまうのである。

LESモデルでは次の2種類の減衰関数を比較した。

Case 4:  $f(y^+) = 1 - \exp(-y^+/25.0)$ ,

Case 5:  $f(R_\tau, y^+) = (1 - \exp(-R_\tau/6.0)) \times (1 - \exp(-y^+/10.0))$ . (31)

ただしLESでは、 $f$ は格子幅に乘じられ、 $R_\tau$ はサブグリッドスケールの渦粘性と分子動粘性との比で定義されてい

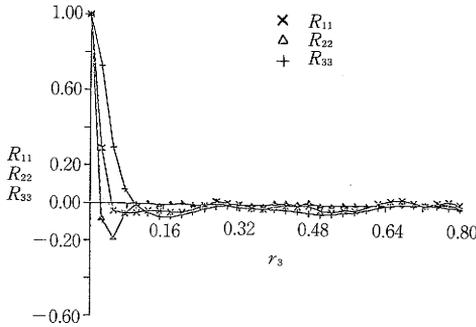


図 4-a Case 4の流れ横断方向の 2 点相関係数 (LES)

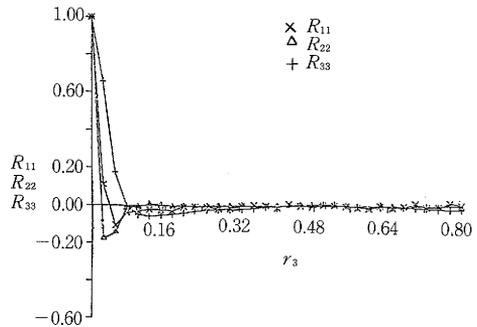


図 4-b Case 5の流れ横断方向の 2 点相関係数 (LES)

る。Case 4は通常用いられている壁減衰関数で、Case 5はCase 3型とCase 4型の組み合わせで、Case 4の定数 25.0が10.0に代えられ壁のごく近傍でのみCase 4型の減衰関数が効くようになっていいる。シミュレーションの結果、Case 4, 5は平均流、エネルギー、エネルギーバランス等に対してほぼ同じ結果を与えるが、リゾルバブルな乱れ  $\bar{u}_i''$  の相関長に差が認められる。図 4 は  $y = 0.0136$  ( $0 < y < 1$ ) における流れ横断方向の 2 点相関係数で、

$$R_{ii}(r_3, y) \equiv \frac{\langle \bar{u}_i''(x, y, z) \bar{u}_i''(x, y, z + r_3) \rangle}{\langle \bar{u}_i''^2(x, y, z) \rangle} \quad (32)$$

と定義されている。Case 5はCase 4に比べて短い相関長を与えることがわかる。また、Case 5では  $R_{11}$  の負のピークがCase 4より顕著にまたより短い  $r_3$  で認められる。

### 5. ま と め

乱流モデルにおける低レイノルズ数効果の表現が、散逸領域の乱流構造を考慮することにより統計理論的に導出された。その結果渦粘性に減衰関数が導入され、その減衰関数はローカルな量である乱流レイノルズ数を独立変数とすることが示された。したがって従来困難であった複雑な壁境界をもつ乱流に対しても適用が期待できる。

さらに、無限平行平板溝乱流のシミュレーションにおいてこの減衰関数を組み込んだ  $K-\epsilon$  モデルと LES モデルの適用可能性が示された。その結果、LES では従来の壁減衰関数と比べてより短い乱れの相関長を与えることが判明した。  $K-\epsilon$  モデルでは、今回試された減衰関数はそのモデル定数に敏感すぎるということが判明し、今後その点を解消できる関数形を模索する研究の必要性が指摘された。

(1988年10月11日受理)

### 参 考 文 献

- 1) P. Bradshaw, T. Cebeci, and J.H. Whitelaw: *Engineering Calculation Methods for Turbulent Flow* (Academic London, 1981) p. 37.
- 2) 西島勝一, 日本機械学会論文投稿中.
- 3) V.C. Patel, W. Rodi, and G. Scheuerer: *AIAA Journal* **23** (1984) 1308.
- 4) R.S. Rogallo and P. Poin: *Ann. Rev. Fluid Mech.* **16** (1984) 99.
- 5) A. Yoshizawa: *Phys. Fluids* **27** (1984) 1377.
- 6) A. Yoshizawa and S. Nishijima: *J. Phys. Soc. Jpn.* **51** (1982) 675.
- 7) 稲毛真一, 山川正剛, 第25回日本伝熱シンポジウム講演論文集 (1988).