研究速報

UDC 534.01：534.5

モデル化学反応系における階段状分岐構造

Staircase-like bifurcation structure in a model chemical reaction system

森田　真*・岩元和敏*・妹尾　学*

Makoto MORITA, Kazutoshi IWAMOTO and Manabu SENO

1．はじめに

この一連の研究に用いているモデル反応系が，パラメーターPのある値の範囲で，大きな振幅と小さな振幅の振動が繰り返し現れる複合振動，結合複合振動，カオス振動を示すことをすでに報告した[1]．Pがその範囲からはずれると，大きな振幅，または小さな振幅のみを持つ単純な振動が出現し，さらにPの値が大きくズレると，定常状態は安定となり，振動は消滅する．振動領域内で，Pを小さな値から徐々に大きくしていくと，小さな振幅の振動から複合振動への分岐が起こり，さらにPが大きくなると，複合振動，結合複合振動，カオス振動が次々と繰り返し出現し，最後に大きな振幅の振動となる．この変化の様子は，次式で定義するFを用いて整理することができる．F=（一周期中の大きな振幅の振動の数）／（一周期中の振動の総数）．たとえば，前報で示した複合振動$\pi(2)$では$F=1/2$であり，結合複合振動$\pi(2)\pi(1)$ではF＝2/3となる．

図1にFとPの関係を示した[2]．階段状の増加関数が得られた．このような関数を与える例として，振動している系にホップ分岐が起こり，もう一つの振動成分が現れる場合がある．この系ではphase-lockingが起こり，われわれのモデル反応系が示すような複合振動，結合複合振動が出現し，それぞれが一つの階段をつくっている．

これらの段階の間の遷移の構造はどのようになっているのであろうか．phase-lockingを示す振動は2―トーラス面上での閉曲線で記述され，トーラス上での巻数の比がコントロール・パラメータに対して段階状の関数となることが，円写像を用いて数学的に示されている[3]．系の非線形性の強さにより挙動が変化し，ある非線形性の強さにおいて“悪魔の階段”となり[4]，任意の隣りあった階段の間を拡大すると，同様な階段構造が現れる．このような構造は自己相似であり，フラクタルである．しかし，このような臨界状態ではカオス振動は出現しない．カオス振動が出現するのは，さらに非線形性が強くなったときである．いかにしてカオス振動が生じ，そのとき階段構造がどのように変化していくかは，まだ十分に解決されていないようである．

図1の結果は，われわれのモデル反応系も，数学的には2―トーラス上の閉曲線で振動状態が与えられることを示唆している．しかし，われわれの系ではカオス振動が認められ，しかもこのとき分岐の微細構造はフラクタルではないことが示された．

2．結　果

前報[1]の図2に$\pi(2)$から$\pi(2)\pi(1)$への分岐構造を示した．いくつかの振動状態がかなり広い範囲で出現する．図2にそれぞれの振動状態を示す．Pが大きくなると，$\pi(2)$，$[\pi(2)]^2[\pi(1)]$，$[\pi(2)]^3[\pi(1)]$，$\pi(2)\pi(1)$となり，Fは1/2, 3/5, 4/7, 2/3となり，Fは単調に増加する関数ではない．図1がフラクタル構造であれば，Fは減少するはずがない．それゆえ，図1は悪魔の階段ではない．

同様な例をもう一つ示そう．前報で$\pi(2)$の分岐が倍周期分岐であり，カオス振動を経て$\pi(2)$の3周期振動

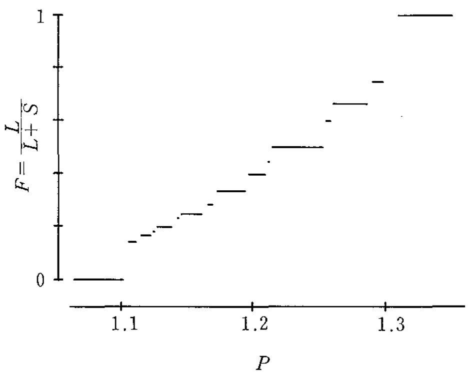

図1　FとPの階段状構造

*東京大学生産技術研究所　第4部

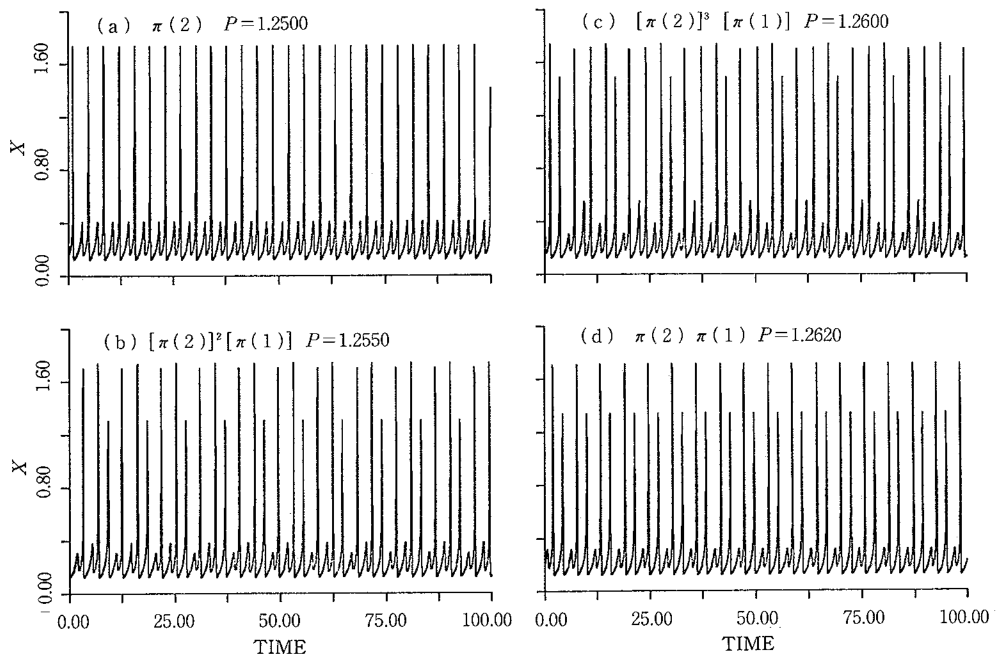

図2　π(2)とπ(2)π(1)の間の結合複合振動

が現れることを示した．興味深いことは，π(2)の3周期振動が2つ存在していることである．π(2)の倍周期分岐の結果生じた3周期振動はさらに倍周期分岐を示し，カオス振動を経て新しい3周期振動へ落ち着く．分岐構造を図3に示し，振動挙動を図4に示した．異なるPで$F=1/2$の3周期振動が現れている．図3を用いて二つの3周期振動の間の分岐を調べると，中程度の振幅を持つ振動は分岐の過程で連続的に変化しているが，大きな振幅と小さな振幅を持つ振動が混ざりあうようなカオス振動が出現する範囲がある．この範囲の振動を示したのが

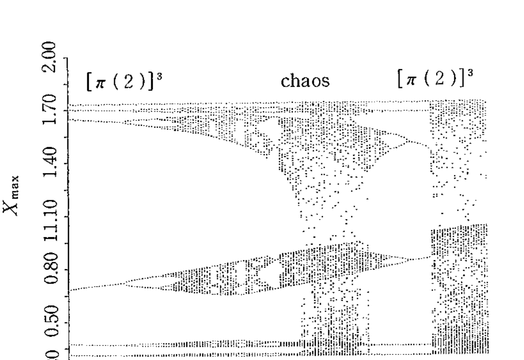

図3　二つの3周期振動の間の分岐構造

図4(b)である．*印を付けたπ(1)が現れている．それゆえ，Fの値は1/2より大きくなる．3周期振動では再び1/2となるから，Fを増加関数とする仮定は成り立たない．

この問題については，もう一つの解釈も可能であろう．例外があることは既に示したが，階段状の増加関数がほとんどの場合で成り立つと考えると，図4(b)で既にπ(1)が現れていることは，(c)の振動にもπ(1)が含まれているのを示唆する．大きい振幅と小さな振幅の区別は常に絶対的に可能なことではない．そこで(c)でXが1.0程度の振動を大きい振幅の振動と見なすと$[\pi(2)]^2[\pi(1)]^2$となる．しかし，このときFは2/3となり，再び階段状増加関数に反する結果となる．いずれにしても，Fは階段状の単調な増加関数ではないと結論できた．

図3において，Pが大きくなると3周期振動から急激にカオス振動へ移行しており，これまで調べてきた倍周期分岐とは異なることが示唆される．むろん，急激な遷移の領域を十分に拡大すると倍周期分岐が隠れている可能性はある．そこでこの領域について詳細に調べた．その結果を図5に示す．$P=1.2530891$まではπ(2)の3周期振動が継続するが，$P=1.2530892$になると3周期振動がある長い期間継続し，その後π(1)が混合し規則性が壊れた状態が短い期間出現し，再び3周期振動が継続するようになる．すなわち，間欠性カオスと呼ばれた状態

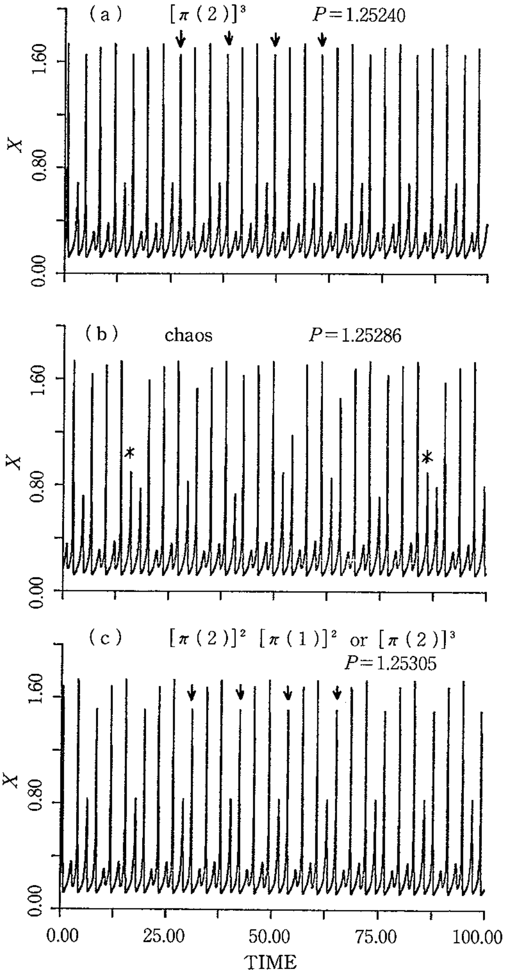

図4 二つの3周期振動とその間のカオス振動. ＊は$\pi(1)$振動を示す

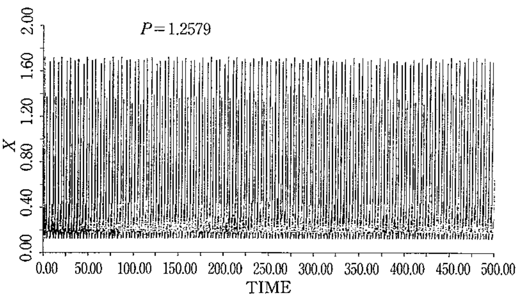

図6 $P=1.2579$における間欠性カオス

が出現する. $P=1.2530893$になると急激に$\pi(1)$の割合が増加したカオス振動へと移行する. 図3に示されたような分岐構造図で, 不連続と思える部分には間欠性カオ

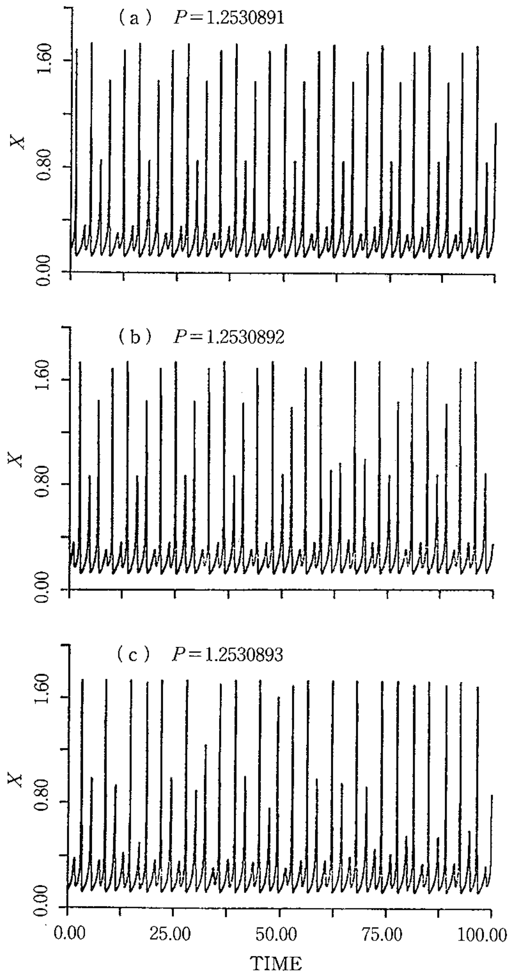

図5 $P=1.2530891$(a), 1.2530892(b), 1.2530893(c)における振動挙動. (b), (c)において$\pi(2)$と$\pi(1)$が混合した間欠性カオス振動が現れている

スが潜んでいることが少なくないようである. 例を他に一つ示しておく. 参考文献の1)における図2には多くの不連続とみなせる遷移があるが, そのうちで$P=1.2579$の振動挙動を図6に示した. やはり間欠性カオスが生じる.

(1988年5月24日受理)

参考文献

1) 森田 真, 岩元和敏, 妹尾 学, 生産研究, 40, 334 (1988)
2) 岩元和敏, 妹尾 学, 生産研究, 39, 407 (1987)
3) 高安秀樹編著, フラクタル科学, 朝倉書店, 1987, 第3章
4) 高安秀樹, フラクタル, 朝倉書店, 1986年, p26.