

# モデル反応系における倍周期分岐

Period-doubling bifurcation in a model chemical system

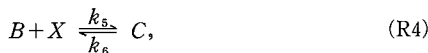
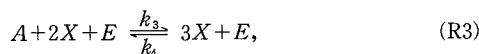
森田 真\*・岩元 和敏\*・妹尾 学\*  
Makoto MORITA, Kazutoshi IWAMOTO and Manabu SENO

## 1. はじめに

カオス振動は、振動が関与する分野でしばしば観察され、多くの研究がされてきた。近年、化学反応が示す振動現象でもカオス振動が生じることが実験的に見いだされ、振動からカオス振動への分岐構造について少しずつ知見が得られつつある。カオスの現れ方として、倍周期分岐、間欠性カオスを経る過程、周期現象によるカオスが知られており<sup>1)</sup>、実験的に見いだされた例もこれらに含まれるようである<sup>2)</sup>。ここでは、計算機を用い、モデル反応系の振動からカオスへの分岐について研究した結果を報告する。

## 2. 結果

次のモデル反応系を取り扱う。



この反応系で中間体E, X, Zの濃度変化は次の微分方程式で記述される。

$$\frac{dE}{dt} = k_1 PZ - k_2 EX, \tag{1}$$

$$\frac{dX}{dt} = k_3 AEX^2 - k_4 EX^3 - k_5 BX + k_6 C, \tag{2}$$

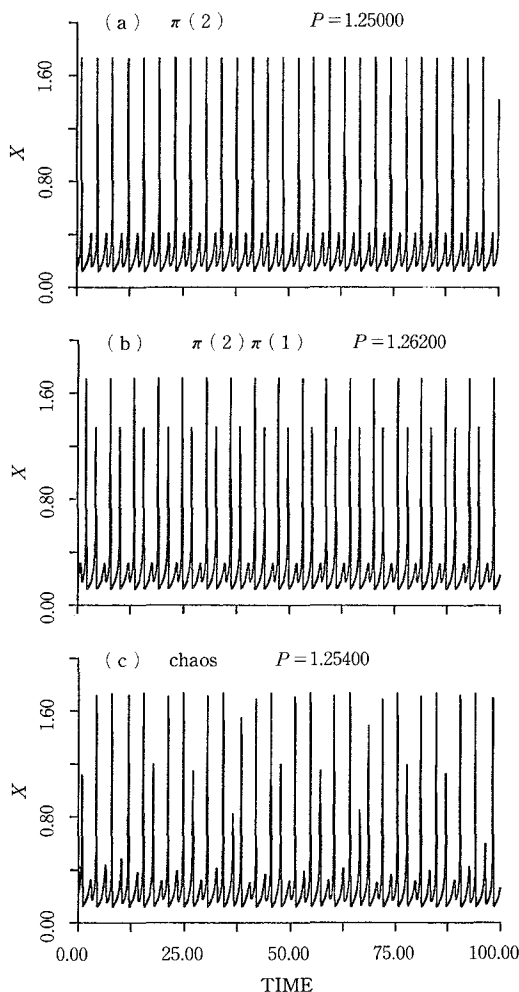


図1 振動の例  
(a) 複合振動, (b) 結合複合振動  
(c) カオス振動

\*東京大学生産技術研究所 第4部

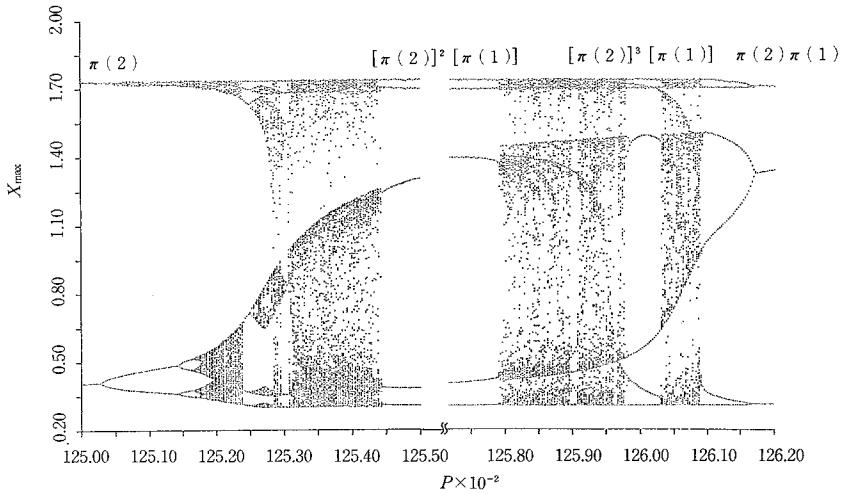


図 2 π(2)からπ(2)π(1)への分岐構造代表的な振動を記号で示した

$$\frac{dZ}{dt} = k_7 Q - k_8 XZ. \tag{3}$$

この方程式をRunge-Kutta法で解くと、二つの周期を持つ振動から成る複合振動が得られる。適当なパラメータを選び、その値を変化させると、複合振動が結合した結合複合振動、カオス振動が出現する。それぞれの例を図1に示す。(a)は大きな振幅を持つ振動と小さな振幅を持つ振動から一周期の振動が成り立っている。この振動をπ(2)と表す。π(n)は、1個の大きな振幅の振動と(n-1)個の小さな振幅の振動からできている複合振動を示す。(b)はπ(2)とπ(1)が組み合わされた結合複合振動π(2)π(1)である。(c)はカオス振動である。なお、計算するにあたり、Pをパラメータとして選び、Pを変化させながら分岐構造を求めた。その他のパラメータの値は次のとおりである。

$$\begin{aligned} k_1 &= 1.0, k_2 = 5.0, k_3 = 100.0, k_4 = 50.0, \\ k_5 &= 10.0, k_6 = 1.0, k_7 = 0.1, k_8 = 0.4, \\ A &= 1.3, B = 5.0, C = 5.3, Q = 1.0 \end{aligned}$$

分岐構造を調べるために、振動の各ピークの頂点のXの値を求め、それらを縦軸にプロットすることにより、図2が得られた。ここで、まずPの値としてπ(2)からπ(2)π(1)が現れる範囲について調べた。

図2によると、Pが大きくなるとπ(2)は倍周期分岐を起こし、カオス振動へ進化していく。図3は倍周期の範囲を拡大した図である。カオス振動は、図中で点がX軸方向に広く分布した状態として示される。2周期、4周期、8周期、カオス、3周期振動を図4に示す。Li-Yorkeの定理によると3周期振動が存在するとカオス振動が出現する<sup>3)</sup>。この例では、明確に3周期振動が見い

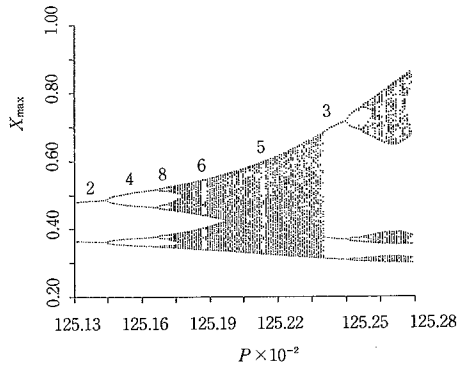


図 3 図2の倍周期分岐領域の拡大図  
小さな振幅の振動の分岐のみを示した。図中の数字はそれぞれの周期振動が出現する領域を示す

だされた。

Pが大きくなる場合のπ(2)からの分岐、すなわちπ(1)への分岐において倍周期分岐が起こることが確かめられた。逆にPが小さくなる場合、すなわちπ(3)への分岐ではどうなるであろうか。計算結果を図5に示した。この場合においてもπ(2)の倍周期化が起こり、3周期振動が現れることが確認された。

二つの倍周期分岐を比較してみると、π(2)に至る分岐では、大きい振幅の振動において顕著な変化が見られ、一方、π(2)からの分岐では、小さな振幅の振動において大きな変化が見られた。これはPが大きくなるとπ(n)のnが小さくなる、すなわち、小さい振幅の振動の数が減少することを反映している<sup>4)</sup>。図2で見ると、小さい振幅の振動が二つに分離し、その一方が大きい振幅の振動へと変化していく様子を見ることができる。分岐の図は、

研 究 速 報

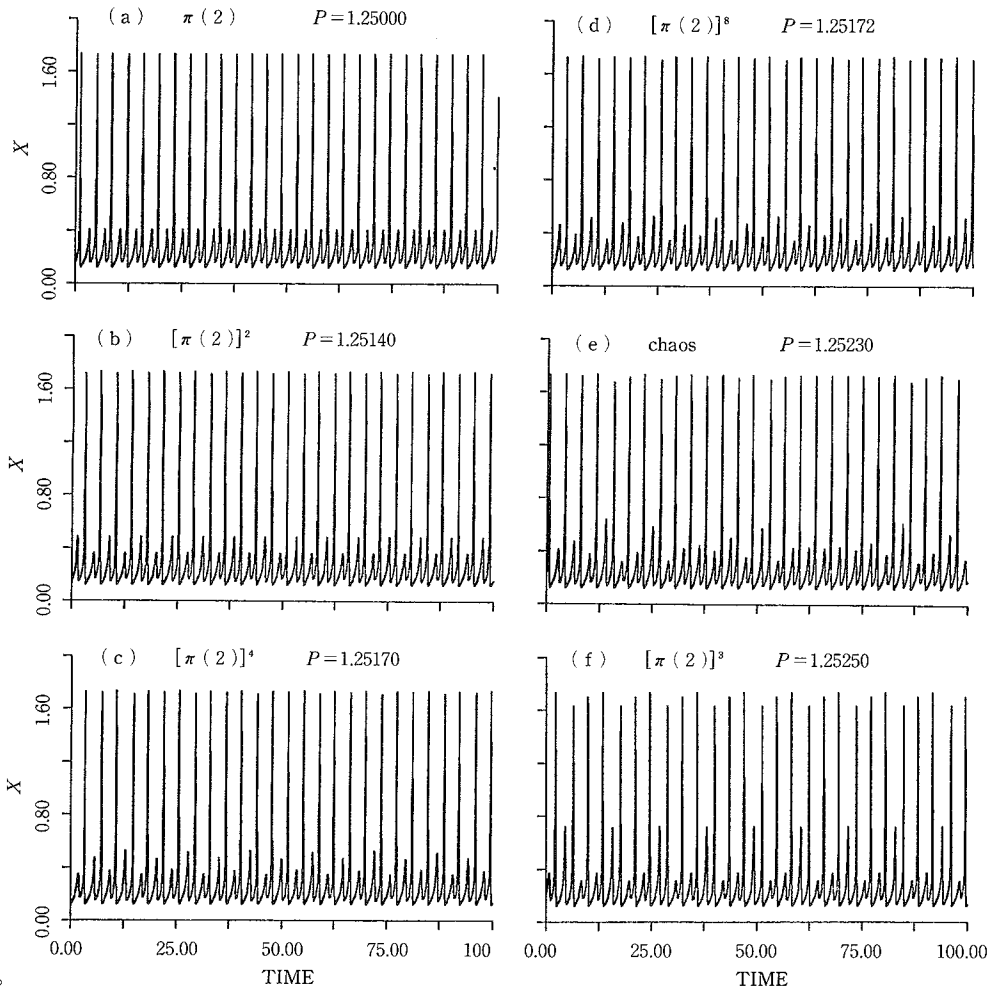


図 4 振動の例

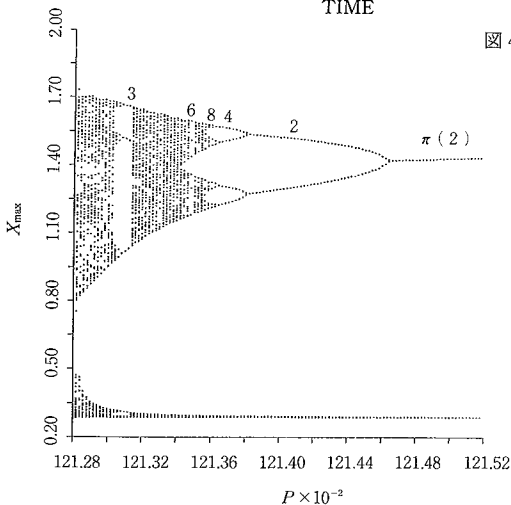


図 5  $\pi(2)$  から  $P$  の小さい方向への分岐  $\pi(2)$  の  $n$  周期振動 ( $n=2, 4, 8, 6, 3$ ) が現れている。大きい振幅の振動の変化が顕著である

大雑把に変化の様子を把握するには非常に有用である。しかし、同時に、これらの振動間に非常に複雑な構造があることも示している。これらの構造について、さらに検討していく予定である。(1988年4月12日受理)

参 考 文 献

- 1) 後藤憲一ほか編：物理学の最先端常識II，共立出版，昭和63年
- 2) J. Maselko and H.L. Swinney, Physica Scripta, T9, 35 (1985)
- 3) T.Y. Li and J.A. Yorke, Am. Math. Monthly, 82, 985 (1975)
- 4) 岩元和敏，妹尾 学，生産研究，39，407 (1987)