研 究 解 説　　　　UDC 533.6.011.1：519.6

レイノルズストレス輸送方程式に基づく数値解析のための モデル化の方法

Modelling for Numerical Simulation Based on Reynolds Stress Transport Equation

村 上 周 三*・加 藤 信 介**・近 藤 靖 史***
Shuzo MURAKAMI, Shinsuke KATO and Yasushi KONDO

本報ではLaunder，Rodiらの既往の提案による応力方程式モデルについて，そのモデル化の概要を解説する．また，その有効性を渦粘性モデルとの比較等により検討した．さらに，2次元等温流れ場について代数応力方程式モデルによる計算結果例を示し，k-ε型2方程式モデルの結果と比較している．

1．は じ め に

室内気流の数値計算では乱流モデルとして一般的にk-ε型2方程式モデルが用いられている．このk-εモデルは等方的な渦粘性の概念に基づいたモデルであり，比較的単純な流れ場では，実用的に満足できる結果が得られる．しかし一般の建築空間内は吹出口や吸込口，あるいは温度分布等があり，ストレスの異方性やStream Line Curvature等が大きな問題となることも多い．このような場合には，非等方k-ε型2方程式モデル（西島，吉沢）[1]，Rodiのモデル[2]，Launderのモデル[3]等，標準的なk-εモデルに対する改良モデルが提案されている．一方，渦粘性の概念を用いない応力方程式モデル（Differential Stress Model，DSMと略記する）等のレイノルズストレスの輸送方程式に基づくモデルでは，これらk-εモデルで問題となる点を回避することが可能である．

本報では，Launder，Rodi[4)5)]らの既往の研究に基づき，応力方程式モデルの構造を解説し，その有効性を渦粘性モデル（Eddy Viscosity Model，EVMと略記する）との比較等から検討する．また1例として2次元等温流れ場について代数応力方程式モデル（Algebraic Stress Model，ASMと略記する）による計算結果とk-εモデルの結果と比較する．

記号表

- U_i ：i方向流速の平均値
- u_i ：i方向流速の変動値
- P ：圧力の平均値
- p ：圧力の変動値
- ν ：分子動粘性係数
- k ：乱流エネルギー
- ε ：乱流エネルギーの散逸率
- C_{ij} ：$\overline{u_iu_j}$の移流項（(1)式(A)）
- P_{ij} ：$\overline{u_iu_j}$の生産項（(1)式(B)）
- Φ_{ij} ：$\overline{u_iu_j}$の圧力一歪相関項（(1)式(C)）この項は$\Phi_{ij(1)}$（(12)式），$\Phi_{ij(2)}$（(21)式），$\Phi_{ij(1)}{}^{w}$（(38)式），および$\Phi_{ij(2)}{}^{w}$により構成される．
- D_{ij} ：$\overline{u_iu_j}$の拡散項（(1)式(D)，(45)式）
- ε_{ij} ：$\overline{u_iu_j}$の散逸項（(1)式(E)，(48)式）

C_k，P_k，D_kはそれぞれkの移流項，生産項，拡散項

オーバーバーは平均化操作を表す．

*東京大学生産技術研究所　付属計測技術開発センター
**東京大学生産技術研究所　第5部
***受託研究員（㈱日建設計）

2．応力方程式モデルの概要

2.1　レイノルズストレスの輸送方程式

非圧縮性のNavier-Stokes方程式から得られる近似を施さないレイノルズストレスの輸送方程式は以下のとおりである．

$$
\begin{aligned}
&\underbrace{\frac{\partial \overline{u_iu_j}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_k}\left(U_k\overline{u_iu_j}\right)}_{(A)}=\underbrace{-\left(\overline{u_ju_k}\frac{\partial U_i}{\partial x_k}+\overline{u_iu_k}\frac{\partial U_j}{\partial x_k}\right)}_{(B)}\\
&\underbrace{+\overline{\frac{p}{\rho}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)}}_{(C)}\\
&\underbrace{+\frac{\partial}{\partial x_k}\left(-\overline{u_iu_ju_k}-\frac{\overline{pu_j}}{\rho}\delta_{ik}-\frac{\overline{pu_i}}{\rho}\delta_{jk}+\nu\frac{\partial\overline{u_iu_j}}{\partial x_k}+\nu\,\overline{u_j\frac{\partial u_k}{\partial x_i}}+\nu\,\overline{u_i\frac{\partial u_k}{\partial x_j}}\right)}_{(D)}\\
&\underbrace{-2\nu\,\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial u_j}{\partial x_k}}-\nu\left(\overline{\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial u_k}{\partial x_i}}+\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial u_k}{\partial x_j}}\right)}_{(E)}
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

以下，各項の物理的意味やそのモデリングについて解説するとともに，このレイノルズストレス輸送方程式を平均流U_i，2次モーメント$\overline{u_iu_j}$とエネルギー散逸率εでcloseさせる方法について説明する．まず(1)式の各項について若干の説明をする．

（1）　$\overline{u_iu_j}$の移流項（C_{ij}と略記する）

（1）式左辺(A)部分は$\overline{u_iu_j}$の実質微分項である．

（2）　$\overline{u_iu_j}$の生産項（P_{ij}と略記する）

(1)式右辺(B)部分は$\overline{u_iu_j}$の生産項であり，応力方程式モデルでは，この項をモデル化せずに直接扱いうるということが最大の利点となる．

(3)　圧力一歪相関項 (Φ_{ij}と略記する)

(1)式右辺(C)部分はストレス間のエネルギーの再配分を行うという役割を持つ項である．この項の持つ最も重要な性質の一つはそのトレースがゼロ，すなわち，

$$\sum_{i=1}^{3}\Phi_{ii}=0 \tag{2}$$

である．このことは乱流エネルギーkの輸送方程式中には圧力一歪相関項が現れないことを意味する．したがってkのレベルには何ら寄与しないが，ノルマルストレス間のレベルの再配分には寄与する項である．たとえば，2次元乱流で$\overline{u_1^2}$，$\overline{u_2^2}$の生産項はゼロでないが，$\overline{u_3^2}$の生産項がゼロである場合でも$\overline{u_3^2}$はゼロでない．これは$\overline{u_3^2}$が他のノルマルストレス($\overline{u_1^2}$，$\overline{u_2^2}$)からエネルギーを圧力一歪相関により，譲り受けるからである．応力方程式モデルではこの項の近似が最も重要な課題の1つである．

(4)　$\overline{u_iu_j}$の拡散項 (D_{ij}と略記する)

(1)式の(D)部分はストレスの拡散項である．すなわち，ストレスの空間的な輸送に係わる項である．

(5)　$\overline{u_iu_j}$の散逸項 (ε_{ij}と略記する)

(1)式右辺(E)部分はストレスの散逸項である．一般に高Re数領域では粘性による拡散項 ((1)式(D)部分のνのかかる項) は無視できるが，ε_{ij}は一般に無視しえない．というのは，たとえば室内のような閉空間内で(1)式を積分すればC_{ij}, D_{ij}, Φ_{ij}等の輸送項はほぼゼロになるが，P_{ij}はあるレベルで存在する．したがってこのP_{ij}に釣り合う項としてε_{ij}が必要となる．またε_{ij}とD_{ij}の最も大きな差異は，ε_{ij}は変動速度の微係数間の相関を含んでいるのに対し，D_{ij}はこれを含んでいないことである．粘性消散が問題となる非常に小さい空間スケールにおいて，この変動速度の微係数はかなり大きなものと評価される．ε_{ij}が一般に無視できないということがこの点からも理解される．

2.2　レイノルズストレスの生産項 (P_{ij})

応力方程式モデルの秀れた点の1つは，ストレスの生産を正しく評価することができることにある．

Launder[6]はストレスの各成分とこれらの生産との関連を "Eternal Triangle" と呼ばれるモデルを用いて以下のように説明している．

(1)　純粋剪断流におけるストレスの生産

$\partial U_1/\partial x_2=\lambda$ (=const> 0) である流れ場を考える．表1上段にレイノルズストレスのλによる生産項を各成分ごとに示す．表1よりシアストレス$\overline{u_1u_2}$の生産項(P_{12})は負である($\because\overline{u_2^2}>0$)．したがって$\overline{u_1u_2}$は負となる傾向が非常に強い．また$\overline{u_1u_2}$が負となれば$\overline{u_1^2}$の生産項は正となり，$\overline{u_1^2}$は増加する．一方，$\overline{u_2^2}$，$\overline{u_3^2}$の生産項はゼロであるが，圧力一歪相関 ($\Phi_{ij}$) により，$\overline{u_1^2}$からノルマルストレス間のエネルギーの再配分を受ける．以上のような剪断流におけるストレス間の関係を図1中に実線矢印の連鎖で表している．

(2)　2次的な歪みがある場合におけるストレスの生産

前述の純粋剪断流でさらに$\partial U_2/\partial x_1$ (=δ> 0) という2次的な歪みが微小であるが，存在する場合を考える．この2次的歪みによるレイノルズストレスの各成分ごとの生産項を表1下段に示す．表1よりわかるとおり，$\overline{u_1u_2}$の生産項の絶対値は大きくなり，その結果$\overline{u_1u_2}$の絶対値も大きくなる．さらに$\overline{u_2^2}$も大きくなる．

以上の連鎖を図1中に破線矢印で示す．このように生産項を通じてストレスの各成分は互いに深く関連している．またこのような現象を正確に記述できるモデルとして，応力方程式モデルは，大きな魅力を有している．

2.3　圧力一歪相関項 (Φ_{ij})

圧力一歪相関項はモデル化に際して最も議論の多い項の一つである[5)6)]．

(1)　圧力の変動成分に関するポアソン方程式

圧力の変動成分に関するポアソン方程式は次式である．

$$\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial^2 p}{\partial x_i^2}=-\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_\ell}\left(u_ku_\ell-\overline{u_ku_\ell}\right)-2\frac{\partial U_k}{\partial x_\ell}\cdot\frac{\partial u_\ell}{\partial x_k} \tag{3}$$

この式の解は次のように表現される．

$$\frac{p}{\rho}=\frac{1}{4\pi}\iiint_V\left\{\frac{\partial^2}{\partial x_k'\partial x_\ell'}(u_k'u_\ell'-\overline{u_k'u_\ell'})+2\frac{\partial U_k'}{\partial x_\ell'}\cdot\frac{\partial u_\ell'}{\partial x_k'}\right\}\frac{dV}{r}+\frac{1}{4\pi}\iint_S\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial p'}{\partial n'}-p'\frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{r}\right)\right\}dS' \tag{4}$$

表1

P_{ij}	P_{11}	P_{22}	P_{33}	P_{12}
$\partial U_1/\partial x_2=\lambda$ による生産項	$-2\overline{u_1u_2}\lambda$	0	0	$-\overline{u_2^2}\lambda$
$\partial U_2/\partial x_1=\delta$ による生産項	0	$-2\overline{u_1u_2}\delta$	0	$-\overline{u_1^2}\delta$

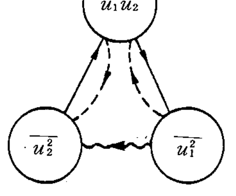


図1　乱流のEternal Triangle

───▶── ; $\partial U_1/\partial x_2=\lambda$によるストレスの生産
- - -▶- - - ; $\partial U_2/\partial x_1=\delta$によるストレスの生産
〜〜▶〜〜 ; 圧力一歪相関によるノルマルストレスの再配分

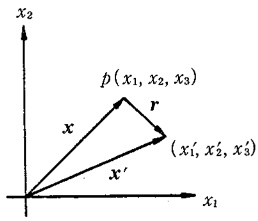


図2

ここで，x'_k等は，今考えている点の圧力pの座標x_kからr_kだけ離れた座標で，(4)式の体積積分は，この座標系により行う（図2参照）．またx'_kの座標での変動流速をu'_kと表記する．

(4)式を用いて以下(1)式中のΦ_{ij}を検討する．Φ_{ij}中の一部$\overline{p/\rho\cdot\partial u_i/\partial x_j}$は次のようになる．

$$\overline{\frac{p}{\rho}\cdot\frac{\partial u_i}{\partial x_j}}=\frac{1}{4\pi}\iiint_V\left\{\overline{\frac{\partial^2(u'_k u'_\ell)}{\partial x'_k\partial x'_\ell}\cdot\frac{\partial u_i}{\partial x_j}}+2\frac{\partial U'_k}{\partial x'_\ell}\overline{\frac{\partial u'_\ell}{\partial x'_k}\cdot\frac{\partial u_i}{\partial x_j}}\right\}\frac{dV}{r}+\overline{S\frac{\partial u_i}{\partial x_j}} \tag{5}$$

ここで(4)式右辺第2項の表面積分をSと表記した．(5)式中でプライムを付けた変数（x'_k等）と付けていない変数（x_k等）は独立であることより，(5)式は次のようになる．

$$\overline{\frac{p}{\rho}\cdot\frac{\partial u_i}{\partial x_j}}=\frac{1}{4\pi}\iiint_V\left\{\frac{\partial^3\overline{(u'_k u'_\ell u_i)}}{\partial x'_k\partial x'_\ell\partial x_j}+2\frac{\partial U'_k}{\partial x'_\ell}\frac{\partial^2\overline{u'_\ell u_i}}{\partial x'_k\partial x_j}\right\}\frac{dV}{r}+\overline{S\frac{\partial u_i}{\partial x_j}} \tag{6}$$

さらに(6)式で用いた$\boldsymbol{x}'$は$\boldsymbol{r}$で置き替える（ただし，$\boldsymbol{r}\equiv(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})$）．このとき，微分に関し，次の関係が利用できる．ただし，$\Big|_{x_i}$はx_iの固定を意味する．

$$\frac{\partial}{\partial x'_i}(\quad)\Big|_{x_i}=\frac{\partial}{\partial r_i}(\quad)\Big|_{x_i} \tag{7}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\quad)\Big|_{x'_i}=-\frac{\partial}{\partial r_i}(\quad)\Big|_{x_i}+\frac{\partial}{\partial x_i}(\quad)\Big|_{r_i} \tag{8}$$

また2点間の速度相関$\overline{(u'_i u_i)}$は$\boldsymbol{r}$の変化に伴い急激に変化するとしても，流れ場の非一様性がそれほど強くない場合は，この値は$r(=|\boldsymbol{r}|)$を固定すれば，$\boldsymbol{x}$の変化に伴う変化は小さい．またほぼ一様な流れ場においては，

$\frac{\partial}{\partial x_i}(\quad)\Big|_{r_i}\fallingdotseq 0$である．したがって(8)式は次のように近似される．

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\quad)\Big|_{x'_i}=-\frac{\partial}{\partial r_i}(\quad)\Big|_{x_i} \tag{9}$$

この(7)，(9)式を用いて(6)を変形すると

$$\overline{\frac{p}{\rho}\cdot\frac{\partial u_i}{\partial x_j}}=-\frac{1}{4\pi}\iiint_V\left\{\frac{\partial^3\overline{(u'_k u'_\ell u_i)}}{\partial r_k\partial r_\ell\partial r_j}+2\frac{\partial U'_k}{\partial x'_\ell}\cdot\frac{\partial^2\overline{u'_\ell u_i}}{\partial r_k\partial r_j}\right\}\frac{dV}{r}+\overline{S\frac{\partial u_i}{\partial x_j}} \tag{10}$$

したがって(1)式中のΦ_{ij}は次式となる．

$$\begin{aligned}\Phi_{ij}=&\underbrace{-\frac{1}{4\pi}\iiint_V\left\{\frac{\partial^3\overline{(u'_k u'_\ell u_i)}}{\partial r_k\partial r_\ell\partial r_j}+\frac{\partial^3\overline{(u'_k u'_\ell u_j)}}{\partial r_k\partial r_\ell\partial r_i}\right\}\frac{dV}{r}}_{(\mathrm{A})}\\&\underbrace{-\frac{1}{2\pi}\iiint_V\frac{\partial U'_k}{\partial x'_\ell}\left\{\frac{\partial^2\overline{(u'_\ell u_i)}}{\partial r_k\partial r_j}+\frac{\partial^2\overline{(u'_\ell u_j)}}{\partial r_k\partial r_i}\right\}\frac{dV}{r}}_{(\mathrm{B})}+\underbrace{\overline{S\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}}_{(\mathrm{C})}\end{aligned} \tag{11}$$

Φ_{ij}は(11)式からわかるとおり，次の3つの項からなる．まず，(11)式中(A)項は速度の変動成分のみに関与する項である．これに対して(B)項は平均速度の勾配にも関与する．また(C)項はポアソン方程式の解に現れる表面積分（S，(4)式）に起因する項であり，後述のように壁面境界の影響に関連する項である．(A)項を$\Phi_{ij(1)}$，(B)項を$\Phi_{ij(2)}$，また(C)項をΦ^{w}_{ij}と書いて以下別個にモデル化について説明する．

(2)　$\Phi_{ij(1)}$ (Return to Isotropy項)

最も一般的な$\Phi_{ij(1)}$のモデルは次のとおりである[7]．

$$\Phi_{ij(1)}=-C_1\frac{\varepsilon}{k}\left(\overline{u_iu_j}-\frac{2}{3}\delta_{ij}k\right) \tag{12}$$

ここで$C_1=1.8$である．またk/εは乱流の時間スケールを表している．

このモデルの妥当性を以下の考察により検討する．壁の影響がなく，一様であるが，非等方的な乱流を考える．一様であるため，レイノルズストレスの生産項および$\Phi_{ij(2)}$はゼロであり，減衰する乱流である．この場合，レイノルズストレス輸送方程式は次のようになる．

$$\frac{d\overline{u_iu_j}}{dt}=\Phi_{ij(1)}-\varepsilon_{ij} \tag{13}$$

ここで次式で定義されるストレスの非等方性を表す無次元テンソルを導入する．

$$a_{ij}\equiv\left(\overline{u_iu_j}-\frac{2}{3}\delta_{ij}k\right)/k \tag{14}$$

これを用いると(12)式は次のように書くことができる．

$$\Phi_{ij(1)}=-C_1\varepsilon\ a_{ij} \tag{15}$$

(13)式より，a_{ij}の輸送方程式は次のように表現される．

$$\frac{da_{ij}}{dt}=\frac{1}{k}\left\{(\Phi_{ij(1)}+\varepsilon a_{ij})-\left(\varepsilon_{ij}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\varepsilon\right)\right\} \tag{16}$$

また後述するように高Re数領域では$\varepsilon_{ij}\fallingdotseq 2/3\delta_{ij}\varepsilon$であるので(16)式は，

$$\frac{da_{ij}}{dt}=\frac{1}{k}(\Phi_{ij(1)}+\varepsilon a_{ij}) \tag{17}$$

ここでΦ_{ij}を(15)式で表現したとすると，(17)式は，

$$\frac{da_{ij}}{dt}=(1-C_1)\frac{\varepsilon}{k}a_{ij} \tag{18}$$

もし，$(1-C_1)\varepsilon/k$を定数と考えれば，a_{ij}の解は次のようになる．

$$a_{ij}=C\cdot e^{(1-C_1)\frac{\varepsilon}{k}t} \tag{19}$$

このような流れ場では，当然a_{ij}は時間と共に減衰する．一方係数C_1は1.8が最適と考えられており，この値のもとでは(19)式のa_{ij}は減衰することになる．また$\Phi_{ij(1)}$が持つ本来の性質である対称性および，トレースがゼロという性質を(12)式は備えている．これらの考察から，(12)式のモデルは一応の妥当性を有するものの1つであると考えられる．

たとえば(12)式で$i=j=1$，すなわち$\Phi_{11(1)}$を書き表すと次のようになる．

$$\Phi_{11(1)}=-C_1\frac{\varepsilon}{k}(\overline{u_1^2}-\frac{2}{3}k) \tag{20}$$

もし，流れ場が非等方で$\overline{u_1^2}$が$2/3k$より，大きければ，この$\Phi_{11(1)}$は負となり$\overline{u_1^2}$を減らす方向に再分配，すなわち等方的にするという働きがある．

(3)　$\Phi_{ij(2)}$ (Rapid項)

(11)式(B)項の最も一般的なモデルは以下のとおりである[8]．

$$\Phi_{ij(2)}=-C_2(P_{ij}-\frac{2}{3}\delta_{ij}P_k) \tag{21}$$

ここで$C_2=0.6$

一見してわかるように(21)式は(12)式と対をなしており，(12)式のReturn to Isotropy項に対して(21)式は，Productionを等方化するという性質を有している．

(21)式は以下のような考察に基づくモデルである．

境界近傍を除いた積分領域内で(11)式(B)項に現れる平均速度勾配がほぼ一様と見なせるとすれば，この部分を積分の外に出すことができる．したがって$\Phi_{ij(2)}$は次のようになる．

$$\Phi_{ij(2)}=-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial U_k}{\partial x_\ell}\iiint_V\left\{\frac{\partial^2\overline{u'_\ell u_i}}{\partial r_k\partial r_j}+\frac{\partial^2\overline{u'_\ell u_j}}{\partial r_k\partial r_i}\right\}\frac{dV}{r} \tag{22}$$

壁面近傍では平均流勾配が大きく，積分の外に出すことは困難であるが，これに伴う誤差は，次節に示すΦ_{ij}^w (Wall refrection項) によって補償されているものと位置づけることができる．

この(22)式右辺の積分のモデル化の一つがQIM (Quasi-Isotropic Model) と呼ばれるものであり，次式で表される．

$$\iiint_V\frac{\partial^2\overline{u'_\ell u_i}}{\partial r_k\partial r_j}\frac{dV}{r}=-2\pi\ a_{\ell kij} \tag{23}$$

ここで

$$\begin{aligned}a_{\ell kij}=&\alpha\overline{u_\ell u_i}\delta_{kj}+\beta(\overline{u_\ell u_k}\delta_{ij}+\overline{u_\ell u_j}\delta_{ik}\\&+\overline{u_i u_j}\delta_{\ell k}+\overline{u_i u_k}\delta_{\ell j})+C'_2\overline{u_k u_j}\delta_{i\ell}\\&+(\eta\delta_{i\ell}\delta_{kj}+v(\delta_{\ell j}\delta_{ik}+\delta_{\ell k}\delta_{ij}))k\end{aligned} \tag{24}$$

これは(22)式の積分項（2点相関係数の2階微分項の体積積分である4階テンソル）をレイノルズストレスの線形和で表現できるとし，もとの積分の持つ添え字の対称性（疑似的な等方性に通じる）を有する形式で表現したものである．したがって(23)式を用いて(22)式を表現すると，

$$\Phi_{ij(2)}=\frac{\partial U_k}{\partial x_\ell}(a_{\ell kij}+a_{\ell kji}) \tag{25}$$

次に(24)式中の数値定数を決めるために，力学的な制約条件等からの考察を行う．すなわち，もともとの積分形((5)式)より，$a_{\ell kii}=0$であるので，次の関係が成立する．

$$(\alpha+5\beta+C'_2)\overline{u_\ell u_k}+(2\beta+\eta+4v)\delta_{\ell k}k=0 \tag{26}$$

この式がすべてのℓ，kで成立するためには次のようになる．

$$\alpha+5\beta+C'_2=0,\ 2\beta+\eta+4v=0 \tag{27}$$

また(23)式で$k=j$として縮約を取ると，

$$a_{\ell kik}=-\frac{1}{2\pi}\iiint_V\frac{\partial^2\overline{u'_\ell u_i}}{\partial r_k^2}\frac{dV}{r} \tag{28}$$

もし，(28)式中の2点速度相関$\overline{u'_\ell u_i}$がrのみの関数であれば，dVは$4\pi r^2dr$と書き直せる．これが成立し，一般に$r\to\infty$で$\overline{u'_\ell u_i}\to 0$と考えられるので(28)式は次のようになる．

$$a_{\ell kik}=2\overline{u_i u_\ell} \tag{29}$$

したがってこの(29)式および(24)式から，

$$(3\alpha+4\beta)\overline{u_i u_\ell}+(2C'_2+3\eta+2v)\delta_{i\ell}k=2\overline{u_i u_\ell} \tag{30}$$

したがって

$$3\alpha+4\beta=2,\ 2C'_2+3\eta+2\iota=0 \tag{31}$$

(26)式および(31)式より，α，β，η，ιはC'_2で表現することができ，これを用いて$\Phi_{ij(2)}$を書き直すと次のようになる[9]．

$$\begin{aligned}\Phi_{ij(2)}=&-\frac{(C'_2+8)}{11}(P_{ij}-\frac{2}{3}\delta_{ij}P_k)\\&-\frac{(30C'_2-2)}{55}k\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)\\&-\frac{(8C'_2-2)}{11}(D'_{ij}-\frac{1}{3}\delta_{ij}D'_{kk})\end{aligned} \tag{32}$$

ここで

$$D'_{ij}=-\left\{\overline{u_i u_k}\frac{\partial U_k}{\partial x_j}+\overline{u_j u_k}\frac{\partial U_k}{\partial x_i}\right\} \tag{33}$$

また$C'_2=0.4$が最適とされている．この(32)式がQIMの一般形である．(32)式の中の3つの項は，それぞれトレースがゼロとなり，Φ_{ij}の備えるべき性質を持っている．

QIMのバリエーションとして(32)式の主要項のみを残し，数値定数を調整するという，簡略化の考え方がある．これがIPM (Isotropitization of production Model) である[8]．

(32)式の3つの項にかかる係数は$C'_2=0.4$を代入して

$$\frac{C_2'+8}{11}=0.76,\ \frac{30C_2'-2}{55}=0.18,\ \frac{8C_2'-2}{11}=0.11 \tag{34}$$

したがって，(32)式中では右辺第1項が他に卓越しており，またその物理的意味の極めて明解な点をも考慮してこの項のみを残す．すなわち，

$$\Phi_{ij(2)}=-C_2(P_{ij}-\frac{2}{3}\delta_{ij}P_k) \tag{35}$$

これがIPMによるモデル化であり，(21)式にほかならない．また数値定数C_2については等方乱流に関する考察から0.6という値を一般に採用している．

（3）　Φ_{ij}^w（Wall Reflection項）

(11)式中の表面積分項(S)に起因する項（(11)式(C)項），すなわちΦ_{ij}^wをここで考える．この項は壁が圧力変動を反射するという効果（echo effectと呼ばれる）を考慮したものである．

直観的には，壁に垂直方向のノルマルストレスは，壁近傍で減衰するという，壁の存在のストレスに対する影響を表すものである．表2に一様剪断流中のストレスの非等方性（a_{ij}，(14)式）および，乱流境界層壁近傍でのストレスの非等方性を示す．この表からわかるとおり，壁近傍では，$\overline{u_2^2}$はかなり減衰し，その分流れ方向のノルマルストレス$\overline{u_1^2}$のレベルが高くなっている．Φ_{ij}^wは次式で表現できる．

$$\Phi_{ij}^w=\frac{1}{4\pi}\iint_s\Big\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial n'}\overline{p'\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big)}-\overline{p'\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big)}\frac{\partial}{\partial n'}\Big(\frac{1}{r}\Big)\Big\}dS' \tag{36}$$

ここで$\partial/\partial n'$は壁表面での法線方向微分を，dSは表面要素を示している．この項は$\Phi_{ij(1)}$および$\Phi_{ij(2)}$のそれぞれに対応する項により構成されるものと考えられ，おのおのを$\Phi_{ij(1)}{}^w$，$\Phi_{ij(2)}{}^w$と記す．すなわち，

$$\Phi_{ij}^w=\Phi_{ij(1)}{}^w+\Phi_{ij(2)}{}^w \tag{37}$$

このΦ_{ij}^wの一般性のあるモデル化は非常に困難であり，現在のところ，平板に沿う流れのような単純な流れ場を想定してモデル化がなされ，これが通常用いられている．以下，このようなモデルの代表的なものについて概要を述べる．現在，最も一般的に用いられているモデルは以下のようなものである．

表2　レイノルズストレスの非等方性[6,17]

	$\overline{u_1^2}/k$-2/3	$\overline{u_2^2}/k$-2/3	$\overline{u_3^2}/k$-2/3	-$\overline{u_1u_2}/k$
一様剪断乱流	0.30	−0.18	−0.12	0.32
乱流境界層	0.55	−0.45	−0.11	0.24

(注)　$\partial U_1/\partial x_2\neq 0,\ U_2=U_3=0$であるような流れ場での値

$$\Phi_{ij(1)}^w=\sum_{(w)=1}^{w_0}C_1'\frac{\varepsilon}{k}\Big(\overline{u_ku_m}n_k^{(w)}n_m^{(w)}\delta_{ij}-\frac{3}{2}\overline{u_ku_i}n_k^{(w)}n_j^{(w)}-\frac{3}{2}\overline{u_ku_j}\cdot n_k^{(w)}n_i^{(w)}\Big)\times f\Big(\frac{\ell}{x_n^{(w)}}\Big) \tag{38}$$

$$\Phi_{ij(2)}^w=\sum_{(w)=1}^{w_0}C_2'\Big(\Phi_{km(2)}n_k^{(w)}n_m^{(w)}\delta_{ij}-\frac{3}{2}\Phi_{ki(2)}n_k^{(w)}n_j^{(w)}-\frac{3}{2}\Phi_{kj(2)}n_k^{(w)}n_i^{(w)}\Big)\times f\Big(\frac{\ell}{x_n^{(w)}}\Big) \tag{39}$$

ここで$C_1'=0.5$，$C_2'=0.3$

上添字（w）は存在する壁の番号を指し，w_0は壁の総数である．また$n_k^{(w)}$はw番目の壁に垂直な単位ベクトル$n^{(w)}$のk成分を意味する．また$x_n^{(w)}$はw番目の壁からの垂直距離である．

(38)式はShir[10]によるモデルであり，(39)式はGibson-Launder[11]によるモデルである．

(38)，(39)式に共通に現れる$f(\ell/x_n^{(w)})$はΦ_{ij}^wが乱れの特徴長さℓと，壁からの距離$x_n^{(w)}$の比に比例するであろうという考察によるものである．この乱れの特徴長さℓは一般に$k^{3/2}/\varepsilon$と考えられ，したがって$f(\ell/x_n^{(w)})$として次式が通常用いられる．

$$f(\ell/x_n^{(w)})=\frac{k^{3/2}}{C_\ell\cdot\varepsilon\cdot x_n^{(w)}} \tag{40}$$

ここで$C_\ell=2.5$である．

しかし，これらのモデルは実際には表2で示したような壁近傍における再分配の状況を十分には表現しえていない．たとえば，この場合について$\Phi_{ij(1)}^w$を実際に表すと

$$\Phi_{11(1)}^w=\Phi_{33(1)}^w=C_1'\frac{\varepsilon}{k}\overline{u_2^2}\times\frac{k^{3/2}}{\varepsilon\cdot x_n} \tag{41}$$

$$\Phi_{22(1)}^w=C_1'\frac{\varepsilon}{k}(-2\overline{u_2^2})\times\frac{k^{3/2}}{2.5\cdot\varepsilon\cdot x_n} \tag{42}$$

すなわち，(42)式では，壁近傍で$\overline{u_2^2}$が減衰することについては再現できているが，(41)式からわかるようにエネルギーの再分配を$\overline{u_1^2}$，$\overline{u_3^2}$にそれぞれ同等に行ってしまう．ところが実際には表2からわかるように$\overline{u_3^2}$への再分配はほとんど見られない．

またこれらのモデルは平面壁を対象にしたものと考えてよく，円管内流れや曲率をもつ壁近傍では別途の工夫が必要である．

2.4　ストレスの拡散項（D_{ij}）

(1)式中のD_{ij}のモデルについてここで説明する．まずD_{ij}中に現れる$\overline{u_iu_ju_k}$のモデル化を考える．一般に$\overline{u_iu_ju_k}$等，高次の相関項は，より次数が高くなるほど平均流に及ぼす影響は小さいと考えられ，あまり厳密なモデル化は必要でないとされている．Hanjalic-Launder[12]は$\overline{u_iu_ju_k}$の輸送方程式中の生産項の一部に着目し，次のモデルを示している．

$$-\overline{u_i u_j u_k} = C_s \frac{k}{\varepsilon}\left(\overline{u_k u_\ell}\ \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_\ell} + \overline{u_i u_\ell}\ \frac{\partial \overline{u_j u_k}}{\partial x_\ell} + \overline{u_j u_\ell}\ \frac{\partial \overline{u_k u_i}}{\partial x_\ell}\right) \tag{43}$$

このモデルをそのまま用いると非常に多くの項が現れ，実際の数値計算上の便宜を考えると現実的なモデルとはいえない．一方D_{ij}はもともと$\overline{u_i u_j}$の拡散的輸送を意味するから添字の対称性には目をつぶって$\overline{u_i u_j}$の空間勾配による輸送項を優先的に取り扱うことにし，(43)式中のこれ以外の項を無視するとすれば，格段に簡単になる．すなわち[14]，

$$-\overline{u_i u_j u_k} = C_s \frac{k}{\varepsilon}\overline{u_k u_\ell}\ \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_\ell} \tag{44}$$

この(44)式を用いてD_{ij}を表現すると

$$D_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(C_s \frac{k}{\varepsilon}\overline{u_k u_\ell}\ \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_\ell}\right) \tag{45}$$

ただし，上式では計算上の利便性も考えて，(1)式中に現れる$\overline{pu_i}/\rho$等の項も(45)式の表現で含まれるものと考えており，これは定数C_sにより調整されているものと考える．

(44)式のような表現はGGDH (Generalized Gradient Diffusion Hypothesis) と呼ばれ，$\overline{u_i u_j}$のu_kによるフラックスを$\overline{u_i u_j}$の勾配を用いて近似したものと考えられる(補1参照)．このような表現は次のような3次相関にも応用される．

$$\overline{u_i \theta \cdot u_k} = -C_\theta \frac{k}{\varepsilon}\overline{u_k u_\ell}\ \frac{\partial \overline{u_i \theta}}{\partial x_\ell} \tag{46}$$

$$\overline{\varepsilon' \cdot u_k} = -C_\varepsilon \frac{k}{\varepsilon}\overline{u_k u_\ell}\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_\ell} \tag{47}$$

ここで$\varepsilon' = \nu \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}$である．

2.5　ストレスの散逸項（ε_{ij}）

ストレスの散逸項（ε_{ij}）の一般的なモデルは局所等方を仮定したもので，次式のようなものである．

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3}\delta_{ij}\varepsilon \tag{48}$$

ここでεは乱流エネルギーkの散逸率である．このモデルの妥当性は以下の考察から理解できる．

すなわち(3)式で現れるε_{ij}のすべての項は$\nu\overline{\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}\cdot\dfrac{\partial u_k}{\partial x_\ell}}$の形で表され，それぞれ一部の添え字について縮約をとったものである．この4階のテンソルをスカラーεとクロネッカーデルタとの積の一般的な組み合わせで次のように表現する．すなわち，

$$\nu\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial u_k}{\partial x_\ell}} = (\alpha\delta_{ij}\delta_{k\ell} + \beta\delta_{ik}\delta_{j\ell} + \gamma\delta_{i\ell}\delta_{jk})\varepsilon \tag{49}$$

(49)式中の定数α，β，γを力学的な制約条件から以下のように求める．

(i) $i=k$，$j=\ell$の場合

(49)式左辺はεとなり，また$\delta_{\ell k}\delta_{\ell k}=3$，$\delta_{\ell\ell}\delta_{kk}=9$より，

$$3\alpha + 9\beta + 3\gamma = 1 \tag{50}$$

(ii) $i=j$の場合

(50)式左辺は連続式より，ゼロとなり，

$$3\alpha\delta_{k\ell} + \beta\delta_{k\ell} + \gamma\delta_{k\ell} = 0 \tag{51}$$

(iii) $i=\ell$，$k=j$の場合

連続式より次である．

$$\nu\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial u_j}{\partial x_i}} = \nu\frac{\partial^2 \overline{u_i u_j}}{\partial x_j \partial x_i} \tag{52}$$

この右辺は，ストレスの粘性拡散項であり，無視できるとして，

$$3\alpha + 3\beta + 9\gamma = 0 \tag{53}$$

したがって，(50)式～(53)式より，α，β，γは

$$\alpha = \gamma = \frac{1}{30}\ ,\ \beta = \frac{2}{15} \tag{54}$$

これをもとの(3)式のε_{ij}に代入すると(48)式が得られる．

$\overline{u_i u_j}$の輸送方程式をsecond-momentでcloseさせてもεという未知変数が残るから，これについては新たに輸送方程式を設ける．このモデル化された形式の最も一般的なものは以下のとおりである．

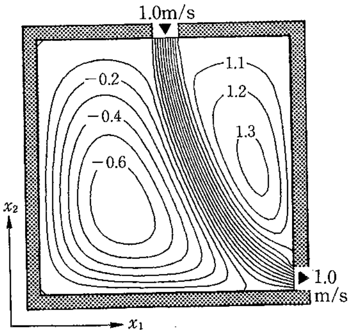
$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(C_\varepsilon \overline{u_i u_j}\frac{k}{\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}\right) + \frac{\varepsilon}{k}(C_{\varepsilon 1}P_k - C_{\varepsilon 2}\varepsilon) \tag{55}$$

2.6　応力方程式モデル（DSM）と代数応力方程式モデル（ASM）

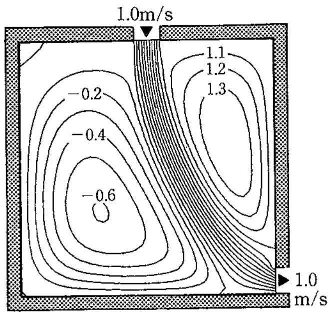
以上のようなモデル化（(12)，(21)，(38)，(39)，(40)，(45)，(48)式）のほかにReynolds方程式(Navier-Stokes方程式のReynolds平均)，連続式，εの輸送方程式(55)式を加えれば，2次モーメント$\overline{u_i u_j}$の輸送方程式((1)式)はcloseすることができる．このモデルを応力方程式モデルと呼ぶ．このモデル中の数値定数を表3に示す．ところで応力方程式モデルの中でレイノルズストレスの微分を含む項は移流項（C_{ij}）と拡散項（D_{ij}）のみであり，もしこれらの項を単純化してストレスの微分を含まない形で表現できれば，レイノルズストレスの輸送方程式は代数式となり，取扱いが非常に容易となる．この単純化を施したモデルは代数応力方程式モデルと呼ばれ，この単純化の方法には次のようなものがある．

表3　応力方程式モデルに用いられる数値定数

C_1：1.8(12)式	C_2：0.6(21)式	C_1'：0.5(38)式
C_2'：0.3(39)式	C_s：0.22(45)式	C_θ：約0.2(46)式
C_ε：0.16(47)式	$C_{\varepsilon 1}$：1.44(55)式	$C_{\varepsilon 2}$：1.92(55)式
C_ℓ：2.5(40)式		

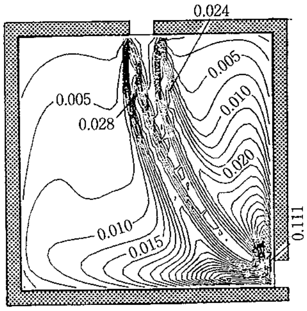


(a)　ASM 1

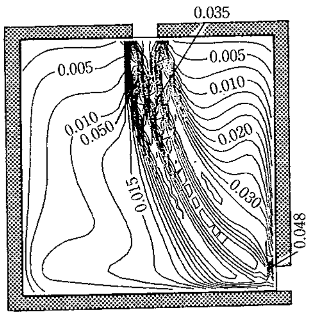


(b)　k-εモデル

図3　流線の比較

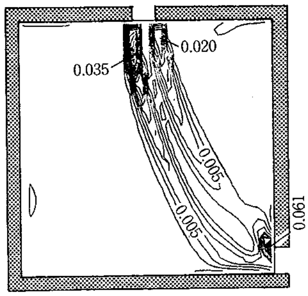


(a)　ASM 1

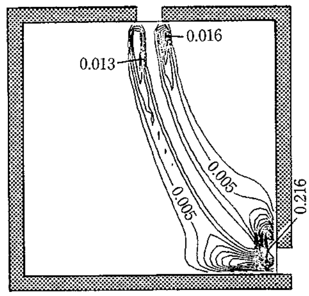


(b)　k-εモデル

図4　kの分布の比較



(a)　ASM 1



(b)　k-εモデル

図5　P_kの分布の比較

$$C_{ij}-D_{ij}=\frac{2}{3}\delta_{ij}(C_k-D_k)=\frac{2}{3}\delta_{ij}(P_k-\varepsilon) \tag{56}$$

$$C_{ij}-D_{ij}=\frac{\overline{u_iu_j}}{k}(C_k-D_k)=\frac{\overline{u_iu_j}}{k}(P_k-\varepsilon) \quad \text{〔ASM 1〕} \tag{57}$$

$$\left.\begin{aligned} C_{ij}&=C_k\left((1+\alpha)\overline{u_iu_j}/k-\frac{2}{3}\alpha\delta_{ij}\right) \\ D_{ij}&=D_k\left((1+\beta)\overline{u_iu_j}/k-\frac{2}{3}\beta\delta_{ij}\right) \quad \text{〔ASM 2〕} \end{aligned}\right\} \tag{58}$$

ここで$\alpha=0.3$, $\beta=-0.8$

(56)式は，Launder[14]によるモデルで，(57)式はRodi[15]によるモデル，また(58)式はLaunder[16]によるものである．(58)式で$\alpha=\beta=0.0$であれば，(58)式は(57)式に等しくなり，$\alpha=\beta=-1.0$であれば，(58)式は(56)式に等しい．

しかしながらC_{ij}, D_{ij}をC_k, D_k等で代用することの妥当性に関する論理的根拠がそれほど明らかなわけではない．また代数応力方程式の具体的な計算方法については別の機会に解説する．

2.7　代数応力方程式モデルとk-εモデルの比較

ここでは2.2節でも例として用いた純粋剪断流について，ASM 1 ((57)式)によるストレスの評価とEVMを用いたストレスの評価を比較する．

いま壁の影響が無視できるとしてASM 1によって(1)式のストレスの輸送方程式を表せば次のようになる．

$$\frac{\overline{u_iu_j}}{k}(P_k-\varepsilon)=P_{ij}-C_1\left(\overline{u_iu_j}-\frac{2}{3}\delta_{ij}k\right)\frac{\varepsilon}{k} -C_2\left(P_{ij}-\frac{2}{3}\delta_{ij}P_k\right)-\frac{2}{3}\delta_{ij}\varepsilon \tag{59}$$

この式を変形して

$$\overline{u_iu_j}-\frac{2}{3}\delta_{ij}k=\frac{(1-C_2)\left(P_{ij}-\frac{2}{3}\delta_{ij}P_k\right)}{(C_1+\lambda-1)}\frac{k}{\varepsilon} \tag{60}$$

ここで$\lambda=P_k/\varepsilon$である．

(60)式を用いると各ストレスは次のようになる．

$$\overline{u_1^2}-\frac{2}{3}k=f_1\times\left(2-\frac{2}{3}\right)\cdot P_k\cdot\frac{k}{\varepsilon}=\frac{4}{3}f_1\cdot\lambda\cdot k \tag{61}$$

$$\overline{u_2^2}-\frac{2}{3}k=f_1\times\left(-\frac{2}{3}P_k\right)\frac{k}{\varepsilon}=-\frac{2}{3}f_1\cdot\lambda\cdot k \tag{62}$$

$$\overline{u_1u_2}=f_1\times P_{12}\cdot\frac{k}{\varepsilon}=-f_1\frac{\overline{u_2^2}\cdot k}{\varepsilon}\cdot\frac{\partial U_1}{\partial x_2} \tag{63}$$

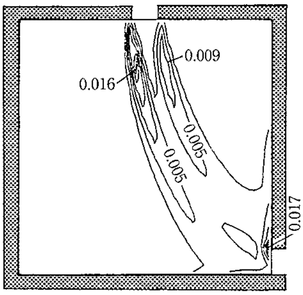
ここで

$$f_1=\frac{1-C_2}{C_1+\lambda-1} \tag{64}$$

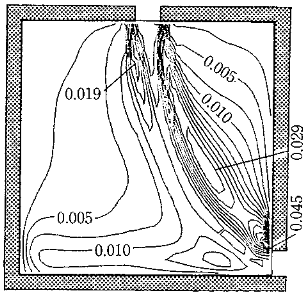
(62)，(63)式から$\overline{u_2^2}$を除くと

$$\overline{u_1u_2}=-C'_D\cdot\frac{k^2}{\varepsilon}\frac{\partial U_1}{\partial x_2} \tag{65}$$

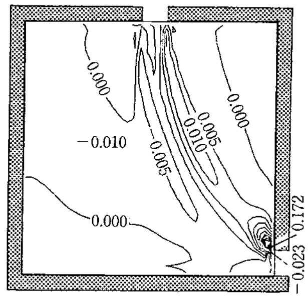
ここで



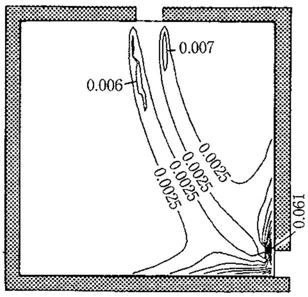
(a) ASM 1



(a) $\overline{u_1^2}$

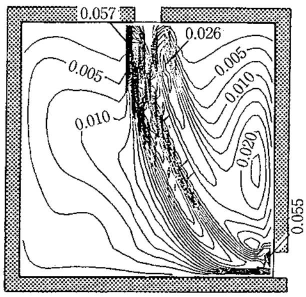


(a) P_{11}



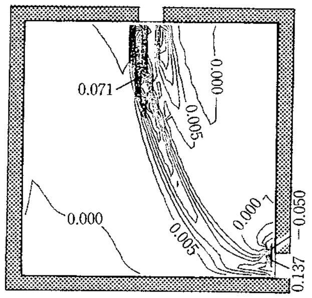
(b) k-εモデル

図6　εの分布の比較



(b) $\overline{u_2^2}$

図7　ASM 1による$\overline{u_iu_j}$の分布



(b) P_{22}

図8　ASM 1によるP_{ij}の分布

$$C'_D \equiv \frac{2}{3}(1-f_1\lambda)\cdot f_1$$

$$=\frac{2}{3}\frac{(C_1+C_2\lambda-1)(1-C_2)}{(C_1+\lambda-1)^2} \tag{66}$$

一方，EVMでは次で表現する．

$$\overline{u_iu_j}-\frac{2}{3}\delta_{ij}k=-C_D\frac{k^2}{\varepsilon}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right) \tag{67}$$

(65)式，(67)式からわかるとおり，シアストレスについてはASM 1もEVMもほぼ同様な定式化であるが，ノルマルストレスについては(61)，(62)式と(67)式ではかなり違った定式化となっている．したがって平均流に対するノルマルストレスの影響が小さい場合は，両者にさほど差異は無い．このような場合，EVMはモデルの単純さ，渦粘性導入による数値計算上の安定さ等の有利な点が多い．一方，ノルマルストレスが各ストレスの生産項等を通じて，流れ場に重要な意味を持っている場合，EVMは不合理な結果を招く．たとえば，噴流が壁等に衝突する領域の流れや，緩やかな曲率をもつ壁に沿う流れ，あるいはストレスの非等方性から生じる旋回流等はEVMでは十分に表現できない．これに対してASM 1等応力方程式モデルでは，このような流れ場を比較的良くとらえることができるとされている（補2参照）．

3．2次元等温乱流の数値計算結果による代数応力方程式モデルとk-εモデルの比較

2次元等温乱流についてASM 1（(57)式）およびk-εモデルのそれぞれによる数値計算結果の比較を行った．以下，結果の概要について報告する．

(a)流線（図3）流線に関する限り両者の差は少ない．

(b)k（図4）ASM 1の結果はk-εモデルと比較して吹出口近傍で大きく，吸込口近傍で小さい．またk-εモデルで見られる吸込口エッジ部の特異な極値がかなり小さくなっており妥当であると判断される．εについても同様（図6）．

(c)P_k（図5）吹出口近傍では$\partial U_2/\partial x_1$が非常に大きいので$P_k$も大きい．また応力方程式モデルは，前述のとおり曲率を持つ流線に基づくストレスの生産を正しく評価できるという利点を持つ．結果を見ても吸込口近傍の流線が極端に大きな曲率を持つ領域においてASM 1は比較的正確にP_kを評価しているものと考えてよい．

(d)$\overline{u_iu_j}$（図7）吹出口近傍ではP_{22}が大きいため，$\overline{u_2^2}$が大きくなっている．また同様にP_{11}が大きい領域で$\overline{u_1^2}$が大きい．（$\overline{u_1u_2}$，$\overline{u_3^2}$については省略）

(e)P_{ij}（図8）P_{11}とP_{22}を比較するとP_{22}のレベルはP_{11}より吸込口近傍を除いて大きく，P_{11}は負の領域さえある．特に吹出口近傍でP_{22}は極めて大きい．これはこの流

れ場のメインシアである$\partial U_2/\partial x_1$がこの領域で極めて大きく，$P_{22}$がこの項を含むためである．また吸込口エッジ部では$P_{11}$と$P_{22}$は逆符号を持ち，$k$-$\varepsilon$モデルで見られる$P_k$の特異な極値がASM 1では緩和される構造になっていることがわかる．

4．あとがき

レイノルズ応力輸送方程式の近似モデルを解く応力方程式モデルは，レイノルズ応力を渦粘性と平均流の勾配で近似するEVMに比べて，乱流の物理現象をより精密に再現できることを示した．しかし，このモデルは近似された項において，近似を施す前の方程式の各項の性質を十分に反映させることはできておらず，各種の制約条件のもとにモデル化されている．この意味で乱流モデルの一般性が必ずしも保証されていない．これらの性質をより厳格に満足したモデル化は，①数値計算が不可能なほど複雑なものとなること，②特殊なケースを除いては，簡潔な形式のモデル化でも実際の流れの予測に大きな問題をもたらさない等のことから，必ずしも有用でない．応力方程式モデルは，工学的に十分な精度を持ち，かつEVMで扱いえないストレスの非等方性が問題となる流れ場の解析に有効なモデルであると考えられる．

謝辞

1987．7月～8月マンチェスター大学のB.E.Launder教授および，M.A. Leschiziner博士を東京大学生産技術研究所に外国人客員研究員として招請し，乱流の数値解析等に関する共同研究を行った．本稿の作成に関してはセミナー，講義を含め，この共同研究に負うところが極めて大きく，両先生の当研究所に対する多大の御貢献に対して記して深甚の謝意を表す．(1988年4月8日受理)

参考文献

1) 西島勝一，吉澤徴(1986)：非等方性k-εモデルを用いた矩形管内乱流の数値解析，生産研究38，46
2) Hossain, M.S. and Rodi, W. (1982): A Turbulence Model for Buoyant Flows and its Application to Vertical Buoyant Jets. In "Turbulent Buoyant Jets and Plumes" (W. Rodi, ed.) HMT-Series, Vol. 6 Pergamon Press, Oxford.
3) Ince, N.Z. and Launder, B.E. (1987): On the Computaion of Buoyancy-Driven Turbulent Flows in Closed Cavities. Univ. Manchester Institute of Sci. and Tech. Rep. No. TFD/87/9
4) Hanjalic, K. and Launder, B.E. (1972): A Reynolds stress model of turbulence and its application to thin shear flows. J. Fluid Mech. 52, 609.
5) Launder, B.E. and Reece, G.J. and Rodi, W. (1975): Progress in the development of Reynolds -stress turbulence closure. J. Fluid Mech. 68, 537
6) Launder, B.E. (1983): Second-moment closure, methodology and practice. Univ. Manchester Institute of Sci. and Tech. Rep. No. TFD/82/4
7) Rotta, J.C. (1951): Statistische theorie nichthomogrner turbulenz. Zeitscr Phys. 129,547
8) Naot, D., Shavit, A. and Wolfshtein, M. (1970): Interaction between components of the turbulent velocity correlation tensor, Israel J. Tech. 8, 259
9) Naot, D., Shavit, A. and Wolfshtein, M. (1973): Two-point correlation model and the redistribution of Reynolds stress. Phys. Fluids, 16, 738
10) Shir, C.C. (1973): A preliminary numerical study of atmospheric Turbulent flow in the idealized planetary boundary layer, J. Atmos. Sci. 30, 1327
11) Gibson, M.M. and Launder, B.E. (1978): Ground effects on pressure fluctuations in the atmospheric boundary layer, J. Fluid Mech. 86, 491
12) Hanjaric, K. and Launder, B.E. (1972): A Reynolds -stress model of turbulence and its application to thin shear flows, J. Fluid Mech. 52,609
13) Daly, B.J. and Harlow, F.H. (1970): Tranport equations of turbulence. Phys, Fluids, 13, 2634
14) Launder, B.E. (1971): Imperial College Mech. Eng. Dept. Rep. No. TM/TN/A/9
15) Rodi, W. (1976): A new algebraic relation for calculating the Reynolds stresses. ZAMM, 56
16) Launder, B.E. (1982): A Generalized Algebraic Stress Transport Hypothesis. AIAAJ 20, 436
17) Champagne, F.H., Harris, V.G. and Corrsin, S. C. (1970): Experiments on nearly homogeneous shear flow. J. Fluid Mech., 41, 81.

(補 1) GGDHとEVMの比較

kの拡散項 (D_k) を例として考える．GGDHではkの拡散項を次で表現する．

$$D_k = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(C_s \frac{k}{\varepsilon} \cdot \overline{u_k u_\ell} \frac{\partial k}{\partial x_\ell}\right) \tag{A-1}$$

一方，EVMではkの拡散項 (D'_kと書く) は次のように表現される．

$$D'_k = \frac{\partial}{\partial x_\ell}\left(C_D \frac{k^2}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial k}{\partial x_\ell}\right) \tag{A-2}$$

2次元流れ場で(A-1)式と(A-2)式を比較すると

$$D_k = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(C_s \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_1^2} \frac{\partial k}{\partial x_1}\right) + \underline{\frac{\partial}{\partial x_1}\left(C_s \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_1 u_2} \frac{\partial k}{\partial x_2}\right)} + \underline{\frac{\partial}{\partial x_2}\left(C_s \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_1 u_2} \frac{\partial k}{\partial x_1}\right)} + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(C_s \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_2^2} \frac{\partial k}{\partial x_2}\right) \tag{A-3}$$

$$D'_k = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(C_D \cdot \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial k}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(C_D \cdot \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial k}{\partial x_2}\right) \tag{A-4}$$

(A-3)，(A-4)式からわかるように両者の差異は次の2点である．すなわち，第1点は(A-3)式下線部 (以降，クロス項と呼ぶ) の存否，第2点はGGDHでは拡散

係数が非等方的であるのに対し，EVMはそうでないことである．

また(48)，(50)，(51)式はいずれも３次相関項の近似式であるが，GGDHは乱流熱フラックス（$\overline{\theta u_i}$）など２次相関項にも応用した例がある[3]．すなわち，

$$\overline{\theta u_k} = -C_\theta \frac{k}{\varepsilon}\overline{u_k u_\ell}\frac{\partial\Theta}{\partial x_\ell} \qquad (A\text{-}5)$$

一方，EVMでは熱フラックスは次のように表されている．

$$\overline{\theta u_k} = -\frac{C_D}{\sigma_\theta}\frac{k^2}{\varepsilon}\cdot\frac{\partial\Theta}{\partial x_k} \qquad (A\text{-}6)$$

(A-5)，(A-6)式を比較すると，(A-6)式では温度勾配のある方向の乱流熱フラックスのみ評価するのに対し，(A-5)式ではもし，k方向に温度勾配がなくとも他の方向に勾配があればk方向の乱流熱フラックスが存在しえて，物理的にみてより現実的な定式化がなされている．

（補　2）　剪断乱流の場合における応力方程式モデルとEVMの比較

まず純粋剪断乱流（$\partial U_1/\partial x_2 \neq 0$，$U_2 = U_3 = 0$）を考える．平均流に影響を及ぼすストレスは$\overline{u_1u_2}$のシアストレスのみである．この$\overline{u_1u_2}$の生産項（$P_{12}$）を応力方程式モデルおよびEVMを用いて表すと次のようになる．

$$P_{12} = \begin{cases} -\overline{u_2^2}\dfrac{\partial U_1}{\partial x_2} & (A\text{-}7) \\ \text{(応力方程式モデルで用いられる正確な表現)} & \\ -\dfrac{2}{3}k\dfrac{\partial U_1}{\partial x_2} & (A\text{-}8) \\ \text{(P_{ij}に現れる$\overline{u_iu_j}$をEVMで近似したもの)} & \end{cases}$$

レイノルズストレスの性状は強くその生産項に依存していることは容易に予想できる．したがってこのことを考えると(A-7)式では$\overline{u_1u_2}$が$\partial U_1/\partial x_2$と逆符号をもつことが良くわかる．また一方で壁に近づくにつれて$\overline{u_1u_2}$が小さくなることを正確に表している．なぜなら壁に垂直な変動を示す$\overline{u_2^2}$はΦ_{22}^wにより，減衰するからである．

一方(A-8)式では(A-7)式と比較して壁近傍で$\overline{u_1u_2}$が減衰するという傾向は明瞭でない．なぜならkが必ずしも減衰するとは限らないからである．EVMにおいて壁近傍でダンピング関数を用いてC_Dを減ずるのはこのEVMの基本的な欠点を補うことに通ずるものである．

次に上述の剪断乱流でかつ，緩やかではあるが，流線が曲率をもつ場合（$\partial U_2/\partial x_1 \neq 0$）を考える．すなわち緩やかな曲率を持つ壁に沿う流れがそれである．この場合，$\overline{u_1u_2}$の生産項（P_{12}）は次である．

$$P_{12} = \begin{cases} -\left(\overline{u_2^2}\dfrac{\partial U_1}{\partial x_2} + \overline{u_1^2}\dfrac{\partial U_2}{\partial x_1}\right) & (A\text{-}9) \\ \text{(応力方程式モデルで用いられる正確な表現)} & \\ -\dfrac{2}{3}k\left(\dfrac{\partial U_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial U_2}{\partial x_1}\right) & (A\text{-}10) \\ \text{(P_{ij}に現れる$\overline{u_iu_j}$をEVMで近似したもの)} & \end{cases}$$

(A-9)式は流線の曲率の影響を正しく評価したものである．一般に$\partial U_2/\partial x_1$は$\partial U_1/\partial x_2$に比べてはるかに小さいので，一見(A-9)式右辺第２項は無視できそうであるが，実際には壁近傍では$\overline{u_1^2}$が$\overline{u_2^2}$よりはるかに大きいため，無視しえない．一方(A-10)式ではこのような壁近傍でのノルマルストレスの非等方性が考慮できないため，この場合流線の曲率の影響を正当に評価しえない．