研　究　速　報

UDC 624.041.2：624.072.22

不安定リンク構造の安定化移行過程と形状決定解析

Analysis for Stabilizing Process and Shape-Finding of Link Structures in the Unstable State

半 谷 裕 彦*・川 口 健 一*

Yasuhiko HANGAI and Ken-ichi KAWAGUCHI

1．は じ め に

建築物として構造が成り立つためには，種々の外力条件の下で，力学的に安定した構造になっていることが必要である．しかし，ケーブル材，膜材，あるいは機構を形成するトラス等，外力により容易に大変位を生じる可能性のある，極めて不安定な要素が建築物の構造要素として用いられることがある．これらの不安定な構造要素は，その大変位の要因となる剛体的運動による変位（伸び無し変形）の存在により特徴づけることができる．剛体的な変位の自由度を有している構造物を一般に，不安定構造物と呼んでいる．ケーブル構造，膜構造形式の構造物は，代表的な不安定構造物であり，通常は，張力を導入する等して，安定化し，用いられている．しかし，安定化以前には，容易に大変位を生じるため，ある適当な時期に大変位を生じさせ，所定の安定化形状を形成するという方法で，施工，および使用される場合が多い．空気膜構造のインフレーションは，その一つの例である．この時，与えられたケーブルや膜面は，与えられた荷重下で，より安定な形状を自ら見つけ出し，その形状へと変位していくことになる．したがって，設計段階において，初期形状の与えられた不安定構造が，与えられた荷重条件の下で，どの様に安定化されていくかを把握しておく必要がある．本研究は，この不安定構造物の安定化移行過程を数値解析により把握することを目的としている．

不安定構造物の安定化移行過程においては，通常，剛体的な運動による大変位が生じるため，静的な釣り合い条件に基づいて解析を行う場合には，釣り合い式における係数マトリクスは特異となる．また，一般に初期形状と安定化形状は大きくかけ離れており，形状仮定や繰り返し収束計算も困難になる．そこで，本研究では，一般逆行列を用いた理論[1]に基づき，不安定リンク機構を形成する剛体トラスを解析モデルとした解析手法を提案している．本解析手法の特徴は，(i)一般逆行列を用いた理論を応用していること，(ii)動的移行過程を準静的(質量効果を無視するという意味）に扱っていること，(iii)収れん計算を不要としていること，等にある．

*東京大学生産技術研究所　第5部

2．基 礎 方 程 式

デカルト座標0-xyzを固定座標系として採用し，節点$i(x_i, y_i, z_i)$，$j(x_j, y_j, z_j)$と，その間をつなぐ直線のトラス部材aを考える（図1）．aの長さl_aおよびl_aをパラメータtで1回微分した$\dot{l}_a$は，

$$l_a=[(\boldsymbol{x}_j-\boldsymbol{x}_i)'(\boldsymbol{x}_j-\boldsymbol{x}_i)]^{1/2} \quad (1)$$

$$\dot{l}_a=\boldsymbol{\lambda}'_a(\dot{\boldsymbol{x}}_j-\dot{\boldsymbol{x}}_i) \quad (2)$$

と表せる．ここに′は転置を表し，

$$\boldsymbol{x}_i=(x_i, y_i, z_i)',\quad \boldsymbol{x}_j=(x_j, y_j, z_j)' \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_a=(\boldsymbol{x}_j-\boldsymbol{x}_i)/l_a \quad (4)$$

(2)式をベクトル表示すると，

$$\dot{l}_a=[-\boldsymbol{\lambda}'_a\ \boldsymbol{\lambda}'_a]\begin{Bmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}_i\\ \dot{\boldsymbol{x}}_j\end{Bmatrix} \quad (5)$$

(4)，(5)式をtでさらに微分すると，

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}_a=(\dot{\boldsymbol{x}}_j-\dot{\boldsymbol{x}}_i)/l_a-\dot{l}_a(\boldsymbol{x}_j-\boldsymbol{x}_i)/l_a^2 \quad (6)$$

$$\ddot{l}_a=[-\boldsymbol{\lambda}'_a\ \boldsymbol{\lambda}'_a]\begin{Bmatrix}\ddot{\boldsymbol{x}}_i\\ \ddot{\boldsymbol{x}}_j\end{Bmatrix}+[-\dot{\boldsymbol{\lambda}}'_a\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}'_a]\begin{Bmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}_i\\ \dot{\boldsymbol{x}}_j\end{Bmatrix} \quad (7)$$

(5)，(7)式をトラス部材全部に拡張し，境界処理を行ってから整理すると，以下の形に書ける．

$$\dot{\boldsymbol{l}}=\boldsymbol{A}\dot{\boldsymbol{x}} \quad (8)$$

$$\ddot{\boldsymbol{l}}=\boldsymbol{A}\ddot{\boldsymbol{x}}+\dot{\boldsymbol{A}}\dot{\boldsymbol{x}} \quad (9)$$

ここに，$\boldsymbol{A}$，$\dot{\boldsymbol{A}}$は(4)，(6)式から得られ，おのおのm×

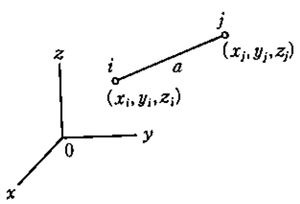

図1　トラス材と節点座標

n型の長方形マトリクスである（mはトラスの全部材数，nは節点の全自由度数）.本解析で扱う解析モデルの部材はすべて剛であるから，$\dot{l}=\ddot{l}=0$．よって(8)，(9)式は，

$$A\dot{x}=0 \tag{10}$$

$$A\ddot{x}+\dot{A}\dot{x}=0 \tag{11}$$

となる．(8)式が解を持つための必要十分条件は，

$$[I_m-AA^-]\dot{l}=0 \tag{12}$$

ここに，I_mはm×mの単位行列，A^-はAの一般逆行列(本解析では，Moor-Penrose型一般逆行列を採用している)．(12)式が満たされるとき，(8)式の解は，

$$\dot{x}=A^-\dot{l}+[I_n-A^-A]\dot{\alpha} \tag{13}$$

と表される．$\dot{\alpha}$は任意のn次元ベクトルである．$\dot{l}=0$の時，(12)式は明らかに満足され，(10)式の解は常に存在して，

$$\dot{x}=[I_n-A^-A]\dot{\alpha} \tag{14}$$

となる．$\dot{x}$が得られると，(11)式を変形して，

$$A\ddot{x}=-\dot{A}\dot{x} \tag{15}$$

となり，(11)式の解存在の必要十分条件は，次式となる．

$$[I_m-AA^-]\dot{A}\dot{x}=0 \tag{16}$$

(16)式は有限変位の範囲における剛体的運動自由度の存在条件である．(16)式が満たされる時，(15)式の解は

$$\ddot{x}=A^-(-\dot{A}\dot{x})+[I_n-A^-A]\ddot{\alpha} \tag{17}$$

となる．$\ddot{\alpha}$は任意のn次元ベクトルである．(16)式が満たされない時，すなわち有限変位の範囲において剛体変位が存在しない場合には，

$$\ddot{x}=-A^-\dot{A}\dot{x} \tag{18}$$

が(15)式に対する一つの最小自乗解を与える．

3．安定化条件

(14)式において，$[I_n-A^-A]$のランクをpとすると，(14)式は，以下の様に書き直すことができる．

$$\dot{x}=\dot{\alpha}_1h_1+\dot{\alpha}_2h_2+\cdots+\dot{\alpha}_ph_p \tag{19}$$

ここに，$h_1,\cdots,h_p$は，$[I_n-A^-A]$で張られる線形空間の線形独立なp個の基底を表す列ベクトル．本解析では，$\dot{\alpha}_1,\cdots,\dot{\alpha}_p$を，増分パラメータ$\dot{\alpha}$を用いて，以下の様に決定している．

$$(\dot{\alpha}_1,\cdots,\dot{\alpha}_p)=\dot{\alpha}(h_1'f,\cdots,h_p'f) \tag{20}$$

fは節点に作用する外力ベクトル．(20)式は，トラスの安定化移行過程が各増分区間において，ポテンシャルエネルギー曲面上の最大傾斜方向へ進行していくことを表しており，力学的に，自然な移行経路を表していると考えられる．(17)式右辺第2項は，剛体変位方向への加速度ベクトルを表している．本解析では，加速度が無視できる様な，準静的な状態を想定しているから，

$$[I_n-A^-A]\ddot{\alpha}=0 \tag{21}$$

したがって(17)式は

$$\ddot{x}=-A^-\dot{A}\dot{x} \tag{22}$$

となり，$\ddot{x}$を得る．

今，節点荷重ベクトルfは定方向を向いているとする．初期状態，移行過程のある時点での状態，最終安定化状態をおのおのC_0, C_i, C_fとし，各状態におけるポテンシャルエネルギー関数Πを考えると，

$$\Pi(C_0)>\cdots>\Pi(C_i)>\cdots>\Pi(C_f) \tag{23}$$

が成立している．C_iからC_{i+1}の増分過程におけるポテンシャルエネルギー変化を$\Delta\Pi(C_i)$とおくと，

$$\Pi(C_{i+1})=\Pi(C_i)+\Delta\Pi(C_i) \tag{24}$$

と書けるから，最終安定化状態C_fに達すると次式が成立する．

$$\Delta\Pi(C_f)=0 \tag{25}$$

変位増分ベクトルの第1近似として(19)式の$\dot{x}$を採用すれば，(25)式から，次式が得られる．

$$\dot{x}'f=(\dot{\alpha}_1h_1+\cdots+\dot{\alpha}_ph_p)f=0 \tag{26}$$

(26)式を安定化条件と呼び，(26)式が成り立つ時，トラスは最終安定化状態に至ったと判断する．この時，すべての剛体変位モードベクトルと荷重ベクトルとは直交している．

4．解析手順

本解析手法の主な解析手順は以下の様である．不安定剛体トラスを構成する1部材aに注目する（図2）．aは，初期状態C_0から出発し，現在C_iという状態にあるとする．今，C_iの状態から変位増分が生じC_{i+1}の状態に移行することを考える．C_{i+1}におけるトラス節点の位置ベクトルx_{i+1}は，C_iにおける位置ベクトルx_i，変位増分Δx_iを用いて，$x_{i+1}=x_i+\Delta x_i$と表せる．本解析では，1) C_iの状態に基づいて，Δx_iを求め，x_{i+1}を得る．2) C_{i+1}の状態に基づき，Δx_{i+1}を求めx_{i+2}を得る．……と基準状態を更新し，位置ベクトルを求めていく方式を採っている．C_i $(t=0)$を基準として$x(t)$をMaclaurin展開すると，

$$x(t)=x(0)+\dot{x}(0)t+0.5\ddot{x}(0)t^2+\cdots\cdots\cdots \tag{27}$$

tに関する2次項まで採用し，増分形式に書き直すと，

$$x(\Delta t)=x(0)+\dot{x}(0)\Delta t+0.5\ddot{x}(0)(\Delta t)^2 \tag{28}$$

Δx_{i+1}として$x(\Delta t)-x(0)$を用い，$\dot{x}(0)$，$\ddot{x}(0)$を

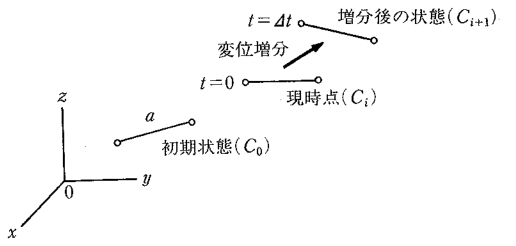

図2　トラス部材の増分過程

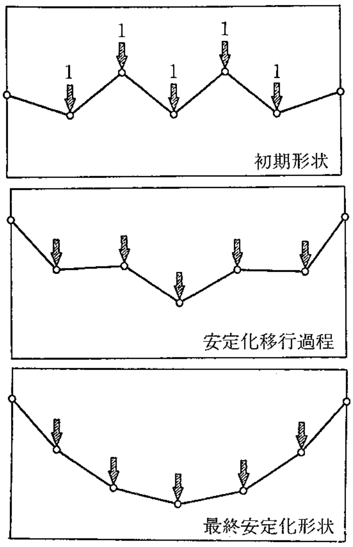

図３　解析に用いた２次元不安定リンク構造の安定化移行過程

(19)式，(22)式から求めていく．数値解析的判断から(25)式が成立したと認めた時点で解析を終える．

5．数値解析例

本解析では，基準状態をUpdatedに更新していく方式を採っているので，各変位増分に誤差が含まれている場合，解析ステップが進むに従って誤差が拡大していく可能性がある．本解析では，(a)増分刻みΔtを小さくする，(b)tに関する高次項を導入する，ことで精度の改善を図れる．解析例として，簡単な２次元不安定剛体リンクモデル(図３)に対し，$\Delta t=0.1$，0.05，0.01の各場合に，tに関する１次項のみ（1 st）と，２次項まで（2 nd）を用いた解析を行い，以下の量を導入して誤差を比較した．

$$\sigma_c=\sqrt{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)'(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)/n} \qquad (29)$$

$$\sigma_l=\sqrt{(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{l}_0)'(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{l}_0)/m} \qquad (30)$$

ここに，$\boldsymbol{x}_0$は混合法[2]を用いて得られた，最終安定化状態に対する各位置ベクトルのほぼ収れんしたと考えられる解(収れん解と呼ぶ)であり，$\boldsymbol{l}_0$は初期状態における各部材の長さをベクトル表示したものである．図４は，ステップ数とσ_cの関係を示している．同一のΔtに対しては，２次項を導入したほうがσ_cの値で１桁以上σ_cが小さく収れん解に近づいている．同一次数の項を用いた結果と比較すると，１次項のみ用いた解析では，$\Delta t=0.1$より$\Delta t=0.01$のほうが１桁ほど，２次項では２桁ほどσ_cの値が小さく，収れん解に近づいている．$\Delta t=0.01$で，１次項のみの解析より，$\Delta t=0.1$で２次項を用いたほうが早く収れん解に近づいており，(１次項：250ステップ，２次項：30ステップ)さらに，$\Delta t=0.1$で２次項を用いたほうがやや収れん解に近い．図５はステップ数とσ_lの関係を示している．この場合，解析ステップが進むにつれ部材長は変化し，初期部材長から離れている．同一のΔtに対しては，移行過程のすべての段階において，２次項を用いた解析のほうが部材長変化が少ない．$\Delta t=0.01$で１次項のみ用いて解析した場合と，$\Delta t=0.1$で２次項を用いた場合とでは，部材長の変化は，ほとんど同じ程度である．

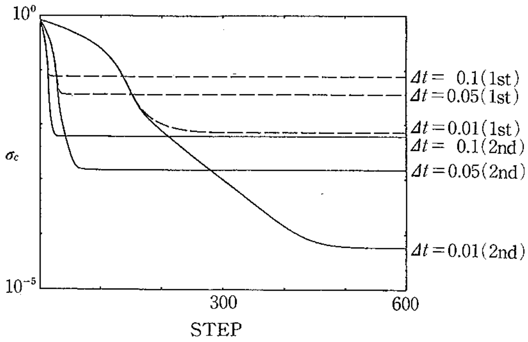

図４　ステップ数とσ_c

本解析で想定している様な剛なトラス部材は，引張り力も圧縮力も同様に伝えることができるが，ケーブル材や膜材のように引張り力のみしか伝えることができない部材で構成される構造の場合にも，ヒンジ点を適当に設けることにより，これを模擬することができる．図６に，三次元不安定剛体リンク構造の解析例を示す．各部材中央に，鉛直方向に単位荷重を作用させている．図７はポテンシャルエネルギーの変化を示す．

本解析で扱っている問題は，有限変位の範囲における大変位問題である．したがって，全く同一の特性寸法(部材長，連結関係）を持った不安定リンク構造に，全く同様な荷重が作用しても，このリンク構造が安定化される形状は一般に１つとは限らない．例として，図８，９に

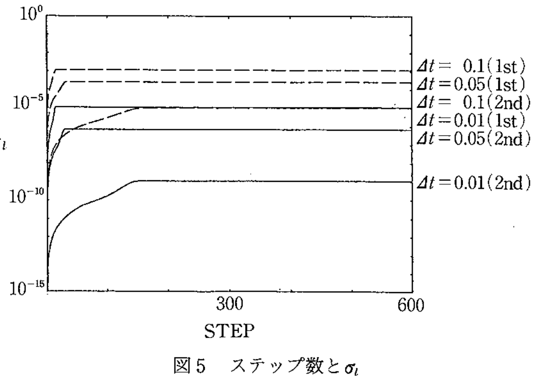

図５　ステップ数とσ_l

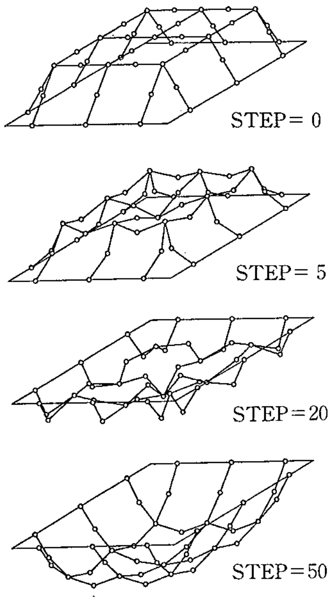

図6　3次元リンク構造の安定化移行過程

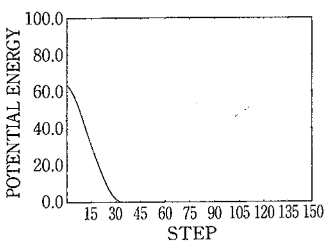

図7　ポテンシャルエネルギーの変化

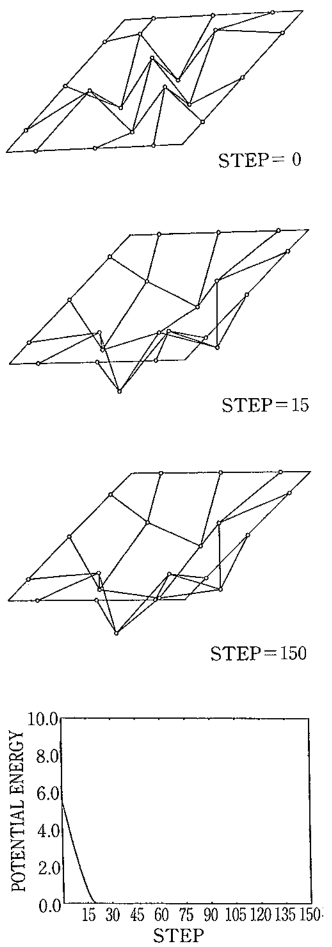

図8　異なる初期形状からの安定化移行過程(1)

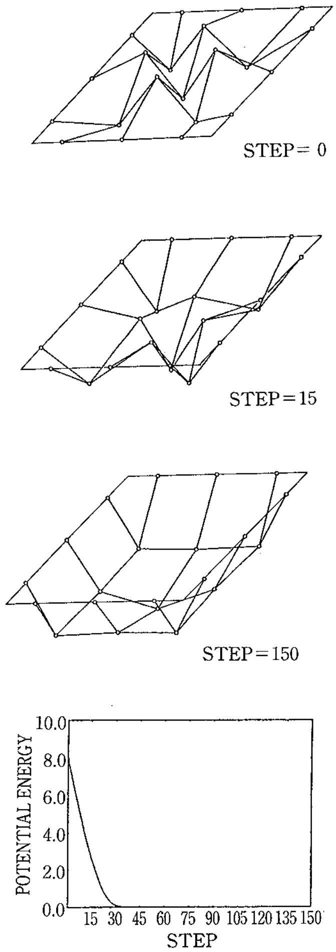

図9　異なる初期形状からの安定化移行過程(2)

示す様な三次元不安定リンク構造の各節点に鉛直方向に単位荷重が作用する場合の安定化移行過程解析例を示す．図8，9の2つのリンク構造は，同一特性寸法，同一荷重条件であるが，初期状態が異なるため，異なる安定化移行経路をたどり，異なる安定化形状に至る．

6．結　　び

力学的に不安定な状態における不安定剛体リンク構造の安定化移行過程と最終安定化形状決定解析を一般逆行列を用いて行う手法を紹介した．解析に伴う誤差は，増分刻みを細かくすること，高次項を導入すること，で改善することができる．複雑な形状を有する不安定リンク構造の最終安定化形状を知る場合には，特に，本解析のように，初期状態から安定化移行過程を追っていく必要がある．

謝　　辞

本研究は文部省科学研究費（一般研究B：不安定構造理論と形状決定への応用：課題番号62460164）により実施したものである．　　　　　　(1988年3月15日受理)

参 考 文 献

1) 田中，半谷“不安定トラスの剛体変位と安定化条件”日本建築学会論文報告集，365号，昭和60年10月pp. 35-43
2) 真柄，国田，川股，“混合法によるケーブルネットの解析　その(1)不安定架構の性質およびリンク機構の解析”，日本建築学会論文報告集，218号，昭和49年4月pp. 37-48
3) Haug, E., Powell, G.H., “Analytical Shape Finding for Cable Nets”, Proceedings 1971 IASS Pacific Symposium Part II on Tension Structures and Space Frames, Tokyo and Kyoto, pp. 165-175
4) 柳井，竹内，“射影行列，一般逆行列，特異値分解”，UP応用数学選書，東大出版会，1983