

2次元正方形キャビティ内流れの数値解析に おける対流項差分の影響

Effect of Difference Scheme for Convective Terms within a Two-Dimensional Square Cavity

小 林 敏 雄*・森 西 洋 平*
Toshio KOBAYASHI and Youhei MORINISHI

流れ場の基礎方程式であるNavier-Stokes方程式を差分法によって解く場合、対流項に対する近似方法が解に大きな影響を及ぼすことが知られている。本報では各種対流項差分スキームの導出および打ち切り誤差の評価を行った後、2次元正方形キャビティ内流れについて数値計算を行い、対流項差分スキームの流れ場予測結果に及ぼす影響について示す。

1. は じ め に

流れ場の支配方程式であるNavier-Stokes方程式(N-S方程式)によりRe数の高い流れ場の差分法による数値計算を行う際には対流項の取り扱いが問題となる¹⁾²⁾。高Re数流れ場の数値計算において対流項に対し中心差分近似を用いると空間的な振動を起し不安定な解となりやすいことが知られている。一方、対流項に対して風上差分を用いると安定な解が得られるのでしばしば用いられる。しかし風上差分を用いることはその打ち切り誤差により解の挙動を変化させてしまう危険性も含んでいる。風上差分を用いるにあたってはその性質および解の挙動の傾向を十分に知る必要がある³⁾。

本報では各種差分近似の導出および打ち切り誤差の検討を行うとともに、2次元正方形キャビティ内流れ⁴⁾⁵⁾について数値計算を行い、各種対流項差分の比較、検討を行う。

2. 差分近似式の導出

2.1 中心差分近似式

各階微分の差分近似式は離散点におけるTaylor展開によって導出できる。Taylor展開による導出の利点としては、差分の打ち切り誤差の評価ができることがあげられる。

被微分量 ϕ の離散点を図1のようにとる。i点まわりのTaylor展開を用いた簡単な計算により以下の中心差分近似式が得られる⁶⁾。

1階微分:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_i \doteq \frac{(\phi_{i+1} - \phi_{i-1})}{2 \cdot h} \tag{1}$$

$$= \phi'_i + \frac{1}{6} \phi_i^{(3)} \cdot h^2 + \dots$$

$$+ \frac{1}{n!} \phi_i^{(n)} \cdot h^{n-1} + \dots, \quad (n \geq 3, \text{ odd})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_i \doteq \frac{(-\phi_{i+2} + 8\phi_{i+1} - 8\phi_{i-1} + \phi_{i-2})}{12 \cdot h} \tag{2}$$

$$= \phi'_i - \frac{1}{30} \phi_i^{(5)} \cdot h^4 - \dots$$

$$- \frac{2^2 \cdot (2^{n-3} - 1)}{3 \cdot n!} \cdot \phi_i^{(n)} \cdot \phi h^{n-1} - \dots$$

($n \geq 5, \text{ odd}$)

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_i \doteq \frac{(\phi_{i+2} + 4 \cdot \phi_{i+1} - 4 \cdot \phi_{i-1} + \phi_{i-2})}{4 \cdot h} \tag{3}$$

$$= \phi'_i - \frac{1}{3} \phi_i^{(3)} \cdot h^2 - \dots$$

$$- \frac{(2^{n-1} - 2)}{n!} \phi_i^{(n)} \cdot h^{n-1} - \dots \quad (n \geq 3, \text{ odd})$$

ここで、式(1)、(3)は2次精度、式(2)は4次精度のi点における1階微分に対する差分近似式となる。

2階微分:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \Big|_i \doteq \frac{(\phi_{i+1} - 2 \cdot \phi_i + \phi_{i-1})}{h^2} \tag{4}$$

$$= \phi_i'' + \frac{1}{12} \phi_i^{(4)} \cdot h^2 + \dots$$

$$+ \frac{2}{n!} \cdot \phi_i^{(n)} \cdot h^{n-2} + \dots \quad (n \geq 4, \text{ even})$$

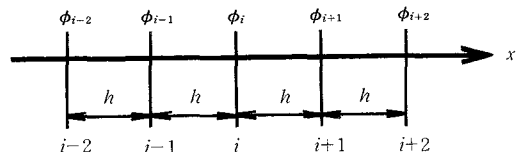


図1 ϕ の定義点

*東京大学生産技術研究所 第2部

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \Big|_i &\doteq \frac{(-\phi_{i+2} + 16\phi_{i+1} - 30\phi_i + 16\phi_{i-1} - \phi_{i-2})}{12 \cdot h^2} \\ &= \phi_i'' - \frac{1}{90} \phi_i^{(6)} \cdot h^4 - \dots \\ &\quad - \frac{2^3 \cdot (2^{n-4} - 1)}{3 \cdot n!} \phi_i^{(n)} \cdot h^{n-2} - \dots \end{aligned} \quad (5)$$

($n \geq 6$, even)

式(4)は2次精度, 式(5)は4次精度の*i*点における2階微分に対する差分近似式となる。

3階微分:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \Big|_i &\doteq \frac{(\phi_{i+2} - 2 \cdot \phi_{i+1} + 2 \cdot \phi_{i-1} - \phi_{i-2})}{2 \cdot h^3} \\ &= \phi_i^{(3)} + \frac{1}{4} \phi_i^{(5)} h^2 + \dots \\ &\quad + \frac{2 \cdot (2^{n-1} - 1)}{n!} \phi_i^{(n)} \cdot h^{n-3} + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

($n \geq 5$, odd)

式(6)は2次精度の*i*点における3階微分に対する差分近似式となる。

4階微分:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} \Big|_i &\doteq \frac{(\phi_{i+2} - 4 \cdot \phi_{i+1} + 6 \cdot \phi_i - 4 \cdot \phi_{i-1} + \phi_{i-2})}{h^4} \\ &= \phi_i^{(4)} + \frac{1}{6} \phi_i^{(6)} \cdot h^2 + \dots \\ &\quad + \frac{2^3 \cdot (2^{n-2} - 1)}{n!} \phi_i^{(n)} h^{n-4} + \dots \end{aligned} \quad (7)$$

($n \geq 6$, even)

式(7)は2次精度の*i*点における4階微分に対する差分近似式となる。

次に, コントロールボリューム法における離散化のために, コントロールボリューム界面(*i*+1/2)における補間あるいは微分に対する差分近似式についても, 先と同様, Taylor展開により求めておく。

補間:

$$\begin{aligned} \phi \Big|_{i+1/2} &\doteq \frac{(\phi_{i+1} + \phi_i)}{2} \\ &= \phi_{i+1/2} + \frac{1}{2} \phi_{i+1/2}'' \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2 + \dots \\ &\quad + \frac{1}{n!} \phi_{i+1/2}^{(n)} \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^n + \dots \quad (n \geq 2, \text{ even}) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \phi \Big|_{i+1/2} &\doteq \frac{(-\phi_{i+2} + 9\phi_{i+1} + 9\phi_i - \phi_{i-1})}{16} \\ &= \phi_{i+1/2} - \frac{3}{128} \phi_{i+1/2}^{(4)} \cdot h^4 - \dots \\ &\quad - \frac{1}{n!} \frac{(3^n - 9)}{8} \phi_{i+1/2}^{(n)} \left(\frac{h}{2}\right)^n - \dots \end{aligned} \quad (9)$$

($n \geq 4$, even)

式(8)は2次精度, 式(9)は4次精度の*i*+1/2における補間近似式である。*i*+1/2点における差分近似式は次のようになる。

1階微分:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{i+1/2} &\doteq \frac{(\phi_{i+1} - \phi_i)}{h} \\ &= \phi_{i+1/2} + \frac{1}{24} \phi_{i+1/2}^{(3)} \cdot h^2 + \dots \\ &\quad + \frac{1}{n!} \phi_{i+1/2}^{(n)} \left(\frac{h}{2}\right)^{n-1} + \dots \quad (n \geq 3, \text{ odd}) \end{aligned} \quad (10)$$

式(10)は2次精度の*i*+1/2点における差分近似式となる。

2階微分:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \Big|_{i+1/2} &\doteq \frac{(\phi_{i+2} - \phi_{i+1} - \phi_i + \phi_{i-1})}{2 \cdot h^2} \\ &= \phi_{i+1/2}'' + \frac{5}{24} \phi_{i+1/2}^{(4)} \cdot h^2 + \dots \\ &\quad + \frac{1}{n!} \frac{(3^n - 1)}{4} \cdot \phi_{i+1/2}^{(n)} \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^{n-2} + \dots \end{aligned} \quad (11)$$

($n \geq 4$, even)

式(11)は2次精度の*i*+1/2点における差分近似式となる。

3階微分:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \Big|_{i+1/2} &\doteq \frac{(\phi_{i+2} - 3 \cdot \phi_{i+1} + 3 \cdot \phi_i - \phi_{i-1})}{h^3} \\ &= \phi_{i+1/2}^{(3)} + \frac{1}{8} \phi_{i+1/2}^{(5)} \cdot h^2 + \dots \\ &\quad + \frac{1}{n!} \frac{(3^n - 3)}{4} \phi_{i+1/2}^{(n)} \left(\frac{h}{2}\right)^{n-3} + \dots \end{aligned} \quad (12)$$

($n \geq 5$, odd)

式(12)は2次精度の*i*+1/2点における差分近似式となる。

2.2 対流項に対する風上差分

一般に, 微分方程式を離散化して得られた次の線形代数式

$$A \cdot \bar{\phi} = \bar{f}$$

において, マトリックス*A*の対角成分(差分近似式中の ϕ_i の係数に相当)が正で値が大きい場合, 解は安定となることが知られている。これまでの中心差分近似では, 奇数階微分の差分近似式の ϕ_i の係数は0となるので, 1階微分からなる対流項の中心差分近似式は, それのみでは不安定となる。同様に対流項の卓越する流れ(高Re数)は, 中心差分近似のみでは不安定となることが予想される。高Re数流れ場の安定化対策として, 1階微分の中心差分式に数値粘性として偶数階微分の差分近似へ適当な係数をかけたものを加え, 対流項の差分近似式とすることが考えられる。これが風上差分となる。以下に各種風上差分式を列挙する。

1次精度風上差分:

$$-c \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_i \doteq -c \frac{(\phi_{i+1} - \phi_{i-1})}{2 \cdot h}$$

$$+ \alpha \cdot \left| c \right| \cdot \frac{(\phi_{i+1} - 2 \cdot \phi_i + \phi_{i-1}))}{2 \cdot h} \quad (13)$$

$$= -c \cdot (\text{式}(1)) + \alpha \cdot \left| c \right| \cdot \frac{h}{2} \cdot (\text{式}(4))$$

$$\begin{cases} \alpha = 1 & \text{1次風上} \\ \alpha = 0 & \text{2次中心} \end{cases}$$

式(13)は式(1)と式(4)の組み合わせにより構成され、2階微分の数値粘性を用いたものである。α = 1 のときには片側2点差分となる。

2次精度風上差分：

$$-c \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_i \doteq -c \frac{(-\phi_{i+2} + 4 \cdot \phi_{i+1} - 4 \cdot \phi_i + \phi_{i-1} + \phi_{i-2}))}{4 \cdot h}$$

$$- \beta \cdot \left| c \right| \cdot \frac{(\phi_{i+2} - 4 \cdot \phi_{i+1} + 6 \cdot \phi_i - 4 \cdot \phi_{i-1} + \phi_{i-2}))}{4 \cdot h}$$

$$= -c \cdot (\text{式}(3)) - \beta \cdot \left| c \right| \cdot \frac{h^3}{4} \cdot (\text{式}(7)) \quad (14)$$

$$\begin{cases} \beta = 1 & \text{2次風上} \\ \beta = 0 & \text{2次中心} \end{cases}$$

式(14)は式(3)と式(7)の組み合わせにより構成され、4階微分の数値粘性を用いたものである。β = 1 のときには片側3点差分となる。

3次精度風上差分：

$$-c \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_i \doteq -c \frac{(\phi_{i+2} + 8 \cdot \phi_{i+1} - 8 \cdot \phi_i + \phi_{i-1} + \phi_{i-2}))}{12 \cdot h}$$

$$- \gamma \cdot \left| c \right| \cdot \frac{(\phi_{i+2} - 4 \cdot \phi_{i+1} + 6 \cdot \phi_i - 4 \cdot \phi_{i-1} + \phi_{i-2}))}{12 \cdot h}$$

$$= -c \cdot (\text{式}(2)) - \gamma \cdot \left| c \right| \cdot \frac{h^3}{12} \cdot (\text{式}(7)) \quad (15)$$

表1 計算例

CASE	名 称	備 考
CASE 1	2次中心	式(13), α = 0
CASE 2	1次風上	式(13), α = 1
CASE 3	2次風上	式(14), β = 1
CASE 4	4次中心	式(15), γ = 0
CASE 5	3次風上 (UTOPIA)	式(15), γ = 1
CASE 6	3次風上 (K-K)	式(15), γ = 3
CASE 7	2次中心 (保存)	式(16), (17), ξ = 0
CASE 8	1次風上	式(16), (17), ξ = 1
CASE 9	QUICK	式(16), (18), η = 1

$$\begin{cases} \gamma = 1 & \text{3次風上(いわゆるUTOPIAスキーム)} \\ \gamma = 3 & \text{3次風上(いわゆるK-Kスキーム)} \\ (\gamma = 0 & \text{4次中心}) \end{cases}$$

式(15)は式(2)と式(7)の組み合わせにより構成され、4階微分の数値粘性を用いたものである。γ = 1 のときには4点差分となる。

コントロールボリューム法を用いた離散化法においても風上化差分を構成することができる。まず、対流項についてセルの界面 (i+1/2) および (i-1/2) 点の値により次のように離散化する。

$$- \frac{\partial c\phi}{\partial x} \Big|_i \doteq - \frac{(c\phi)_{i+1/2} - (c\phi)_{i-1/2}}{h} \quad (16)$$

$$= - \{ (c\phi)' + \frac{1}{48} (c\phi)^{(3)} \cdot h^2 + \dots + \frac{1}{n!} (c\phi)^{(n)} \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^{n-1} + \dots \} \quad (n \geq 3)$$

コントロールボリューム法での風上化は、(cφ)_{i+1/2}、(cφ)_{i-1/2}の補間値を求める際に数値粘性を加えるものである。

1次風上差分：

$$(c\phi) \Big|_{i+1/2} \doteq c_{i+1/2} \cdot \frac{(\phi_{i+1} + \phi_i)}{2}$$

$$- \xi \cdot \left| c_{i+1/2} \right| \cdot \frac{(\phi_{i+1} - \phi_i)}{2} \quad (17)$$

$$= c_{i+1/2} \cdot (\text{式}(8))$$

$$- \xi \cdot \left| c_{i+1/2} \right| \cdot \frac{h}{2} \cdot (\text{式}(10))$$

$$\begin{cases} \xi = 1 & \text{1次風上(ドナ・セル)} \\ (\xi = 0 & \text{2次中心(保存形式)} \end{cases}$$

QUICK：

$$(c\phi) \Big|_{i+1/2} \doteq c_{i+1/2} \frac{(-\phi_{i+2} + 9 \cdot \phi_{i+1} + 9 \cdot \phi_i - \phi_{i-1}))}{16}$$

$$+ \eta \cdot \left| c_{i+1/2} \right| \cdot \frac{(\phi_{i+2} - 3 \cdot \phi_{i+1} + 3 \cdot \phi_i - \phi_{i-1}))}{16} \quad (18)$$

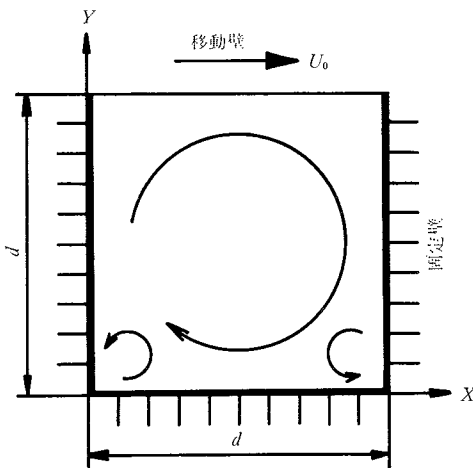


図2 2次元正方キャビティ内の流れ

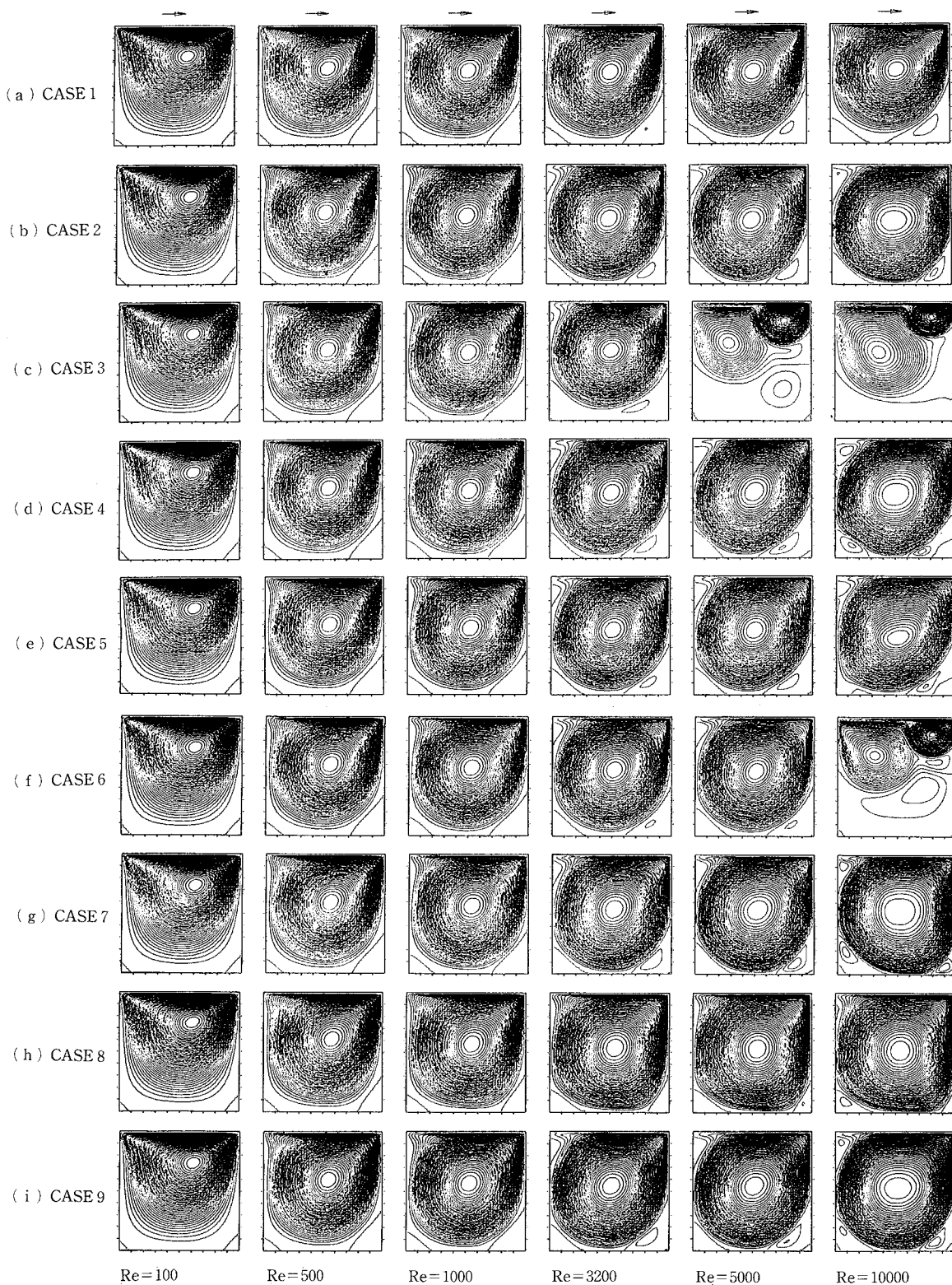


图 3 流線

$$= c_{i+1/2} \cdot (\text{式}(9))$$

$$+ \eta \cdot \left| c_{i+1/2} \right| \cdot \frac{h^3}{16} \cdot (\text{式}(12))$$

- $\eta = 1$ いわゆるQUICKスキーム
- $\eta = 0$ 2次中心差分

3. 2次元正方キャビティ内流れの数値解析

3.1 計算対象および計算手法

計算対象は図2に示す2次元正方キャビティ内の流れである。これは1辺が一定速度 U_0 で動く移動壁で他辺が静止壁とする正方キャビティ内の流れ場である。移動壁の運動と流体の粘性によりキャビティ内の流体が渦を起す。上記流れ場について2次元非圧縮性N-S方程式を用い、各Re数に対する数値解を求める。ここでRe数は移動壁速度 U_0 、正方キャビティの一辺の長さ d 、および流体

の動粘性係数 ν により定義し、 $Re = U_0 d / \nu$ となる。計算手法としてはN-S方程式を時間に関して1次の陽解法、空間に関して対流項以外を2次精度中心差分、対流項を各種スキーム(表1参照)で離散化し、タイム・マーキング法により解く。また連続の式とのカップリングには速度圧力同時緩和のHSMACスキームを用いる⁷⁾。差分格子にはスタガード・メッシュを用いている。同時緩和計算の打ち切り条件として次を用いる。

$$\text{MAX} \left| \text{dif} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) \right| < 1/100$$

時間きざみ幅としては1/200を基準として用いた。ただし中心差分で発散した例については一部1/400を用いた。2次元正方キャビティ内格子分割数は 50×50 にとる。なお、計算の打ち切り条件としては、無次元時間 $T (= t \cdot U_0 / d) = 100$ において計算を終了し、その時点での結果を比

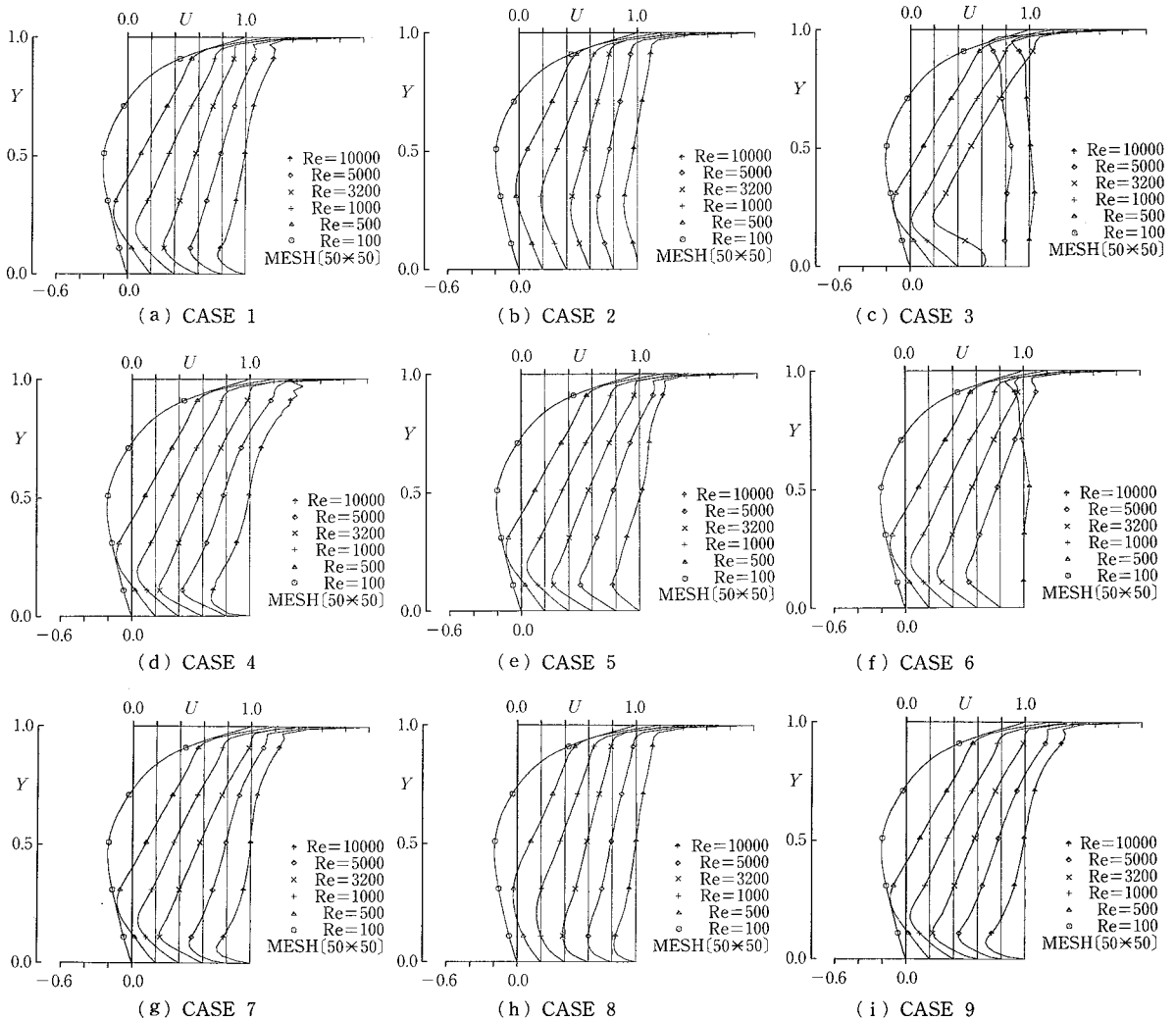


図4 速度分布

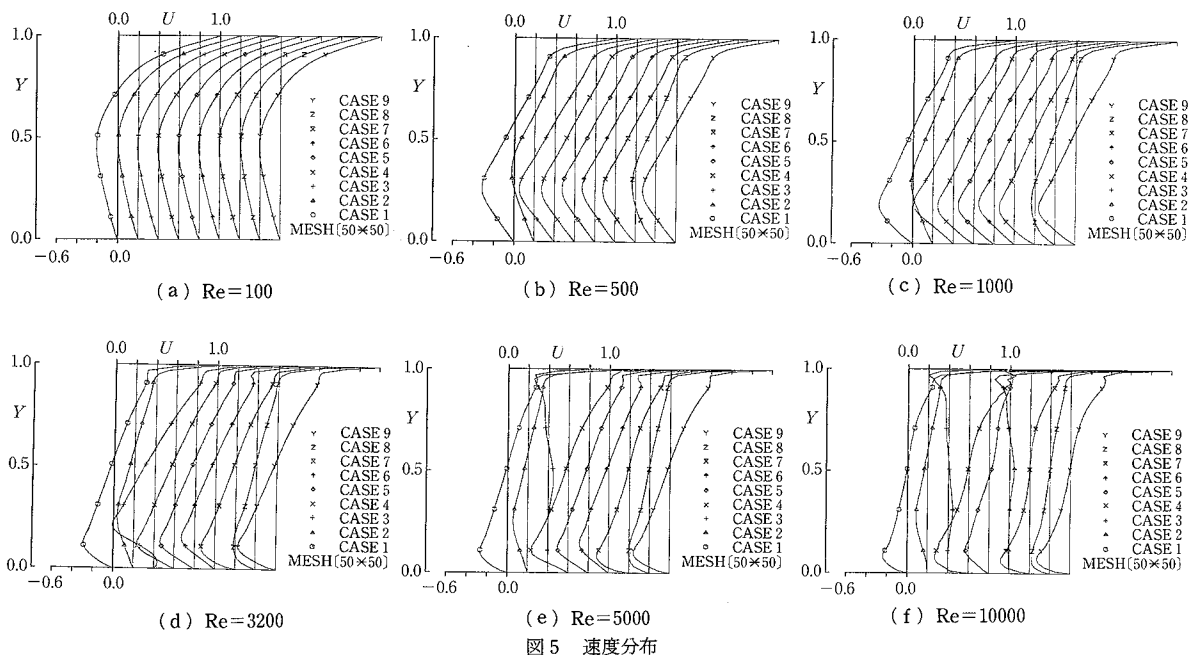


図 5 速度分布

較する。途中経過との比較により一部の例を除いて計算結果はほぼ収束したとみられる。

3.2 流線による比較

図 3 (a)~(i)に、今回行った数値計算例の流線図を示す。流線は壁面と 1 次渦の中心点の流れ関数値をおのおの 0 および 1 とし、50 等分ごとの等高線で示される。

Re=100, 500, 1000 において、各CASEとも Re 数が高くなるにつれて 1 次渦の中心がキャビティ右上方より中心に近づくようすが見られる。同時に左右下角の臨界流線 (流れ関数 $\psi = 0$ の等高線) の囲む領域が広くなり 2 次渦の発達を示している。流線を見るかぎりでは各対流項スキームによる大きな違いは見られない。

Re=3200 において、各CASEともに 2 次渦の発達するようすが見られる。特に左上角のそれが特徴的である。ただし、1 次風上系のCASE 1, 8 では左上角の 2 次渦の発達は見られず、2 階微分誤差項による数値粘性の影響が現れてきたものと思われる。またCASE 3 では左右下角の臨界流線の合体が見られ、より高Re数における非定常渦の前兆と見られる。

Re=5000, 10000 の高Re数においては、中心差分系CASE 1, 4, 7 および高次風上系CASE 5, 9 で、2 次渦もしくは 3 次渦のさらに発達するようすが見られる。またここで特徴的なのはCASE 3 およびCASE 6 である。これらの例では、右上に新たな 1 次渦の発生しているようすが見られる。この 2 例についてのみ、 $T=100$ の打ち切り時点においても渦が時間的に変動している。なお、この 2 例で共通なことはスキームの安定化のため

に加えた 4 階微分の係数が同じことである。よって、ここでの挙動は 4 階微分誤差項の高Re数における挙動の特徴を示しているものとも考えられる。

3.3 各対流項スキームにおける Re 数の影響

図 4 (a)~(i)に、キャビティの y 方向中心線上での各Re数における速度分布を、それぞれの対流項差分について示す。

中心差分系CASE 1, 4, 7 においては、Re 数が高くなるにつれて速度のピークの位置が下壁面に近づくようすが見られる。同時に下壁面における速度勾配も大きくなっている。上壁面近傍では高Re数における不連続な速度分布が見られる。また、CASE 4, Re=10000 では空間的数値振動を起こしているようすが見てとれる。

これに対して 1 次風上系CASE 2, 8 では、上壁面近傍における不連続な速度分布は見られず滑らかなものとなっている。下壁面の速度勾配についてみると、CASE 8 では中心差分系と同様の傾向が見られるが、CASE 2 ではこれと異なり、同時に高Re数における速度のピーク位置の変化はほとんど見られない。これらにより高Re数における数値粘性の影響はCASE 8 よりもCASE 2 のほうが大きいことがわかる。

CASE 3 の 2 次風上差分ではRe数の上昇に伴い先に述べた高Re数での非定常的な渦の分布へと移るようすが見られる。

高次風上系CASE 5, 6, 9 では、CASE 6 での高Re数の場合を除いて中心差分系の速度分布に近いことがわかる。また上壁面近傍で高Re数における不連続な速度分

布が見られるものの、空間的な数値振動は起こしていない。

3.4 各Re数における対流項差分の影響

図5(a)~(f)に、キャピティのy方向中心線上での各対流項差分による速度分布を、それぞれのRe数について示す。

Re=100において各CASEの速度分布はほぼ一致し、風上化による違いの見られないことがわかる。しかしRe=500, 1000においてすでに1次風上系CASE 1と8は上壁面と下壁面近傍で他との違いが見られ、1次風上差分の数値粘性の影響の大きいことを示している。

Re=3200, 5000, 10000においては、CASE 3およびCASE 6の挙動が目立つ。また速度分布のピーク値はCASE 4と9が他よりも大きく両者は速度分布形状も似ている。ただしCASE 4については、Re=10000の上壁面近傍での空間的な数値振動が見られる。

4. ま と め

2次元正方キャピティ内の流れについて差分格子数を 50×50 に統一し、各種対流項差分スキームを用いて数値

計算を行った。その結果、2階微分の数値誤差項を持つ1次風上系差分CASE 2, 8は、Re=500においてすでに数値粘性の影響が流れ場に及ぶこと、4階微分の数値誤差を持ちまたその係数が等しいCASE 3, 6は高Re数における流れ場の挙動が似ていること、風上差分CASE 9は、高Re数においても4次中心差分CASE 4に近い速度分布を示すこと、等が明らかになった。

なお、本研究は東大生研FACOM VP-100システムを用いて実行されたことを付記する。

(1987年10月22日受理)

参 考 文 献

- 1) コンピュータによる流体力学：P. J. ローチェ著，高橋ほか訳
- 2) コンピュータによる熱移動と流れの数値解析：S. V. パタンカー著，水谷ほか訳
- 3) 村上，加藤，須山，生産研究，38-12 (1986)，556
- 4) U. GHIA, K. N. GHIA and T. SHIN, J.C.P 48 (1982), 387
- 5) 岩津：東大物理工学科修士論文，昭和59年
- 6) 森西：東大機械工学科修士論文，昭和62年
- 7) C. W. Hirt and J. L. Cook, J.C.P 10 (1972), 324

