研 究 速 報
特 集 5
UDC 532.517.4：519.2

乱流エネルギー散逸率方程式のモデリング
Modeling of the Equation for the Dissipation Rate of Turbulent Energy

吉 澤 徴*
Akira YOSHIZAWA

1．は じ め に

乱流モデル方程式を構成するとき，避けられない関門として乱流エネルギー散逸率（ϵ）方程式のモデル化がある．同方程式にまつわる困難は，LESにおけるサブグリッド・モデルを除いて，いかなる型のモデル方程式系にも現れる．

ϵ方程式のモデル化の難点を簡単にまとめると，

1）経験的に用いられているϵモデル方程式が，どのような統計理論的根拠をもっているのか明らかでない．このため，これを理論的に改良する手がかりが乏しい．

2）浮力，MHD効果が重要となる乱流現象で，これらの効果をいかにϵ方程式に取り入れるべきか明確な指針がない．

上の1）に関する難点はTSDIA（two-scale DIA；DIAはKraichnanによって開発された一様乱流の統計理論である）を適用することによって，かなり改善されつつある[1,2]．この結果，2）に関しても興味ある知見が得られるようになった（本特集号中の下村裕の論文参照）．本論文においては，浮力等の体積力がない場合最も一般的と思われるϵモデル方程式の形式について論じる．

2．ϵ方程式の一般形

著者は$k-\epsilon$，$k-kl$（kは乱流エネルギー，lは乱流の長さスケール）モデル等の互換性よりk，ϵ，l間の代数的関係を要求し，TSDIAよりϵ方程式を導いた[1]．また，半場はTSDIAの2時刻速度相関に着目し，同様なϵ方程式を得た[2]．これらの結果を総合すると，現時点で最も一般的なϵ方程式は

$$\frac{D\epsilon}{Dt}=C_{\epsilon1}\frac{\epsilon}{k}P-C_{\epsilon2}\frac{\epsilon^2}{k}+C_{\epsilon3}k\left(\frac{\partial\bar{u}_b}{\partial x_a}-\frac{\partial\bar{u}_a}{\partial x_b}\right)^2$$
$$+\frac{\partial}{\partial x_a}\left(C_{\epsilon4}\frac{k^2}{\epsilon}\frac{\partial\epsilon}{\partial x_a}\right)+\frac{\partial}{\partial x_a}\left(C_{\epsilon5}k\frac{\partial k}{\partial x_a}\right)$$
$$+C_{\epsilon6}\left(\frac{\partial k}{\partial x_a}\right)^2+C_{\epsilon7}\frac{k}{\epsilon}\frac{\partial k}{\partial x_a}\frac{\partial\epsilon}{\partial x_a}$$
$$+C_{\epsilon8}\frac{k^2}{\epsilon^2}\left(\frac{\partial\epsilon}{\partial x_a}\right)^2 \tag{1}$$

となる．上式で，Pは乱流エネルギー生成項，$C_{\epsilon n}$（$n=$1，2，…，8）はモデル定数である．現在最も普通に用いられているϵモデル方程式では，右辺第1，2，4項が残される．右辺第5項のクロス拡散効果は，kモデル方程式中の対応する項と共に重要であることが実証されている[3,4]．

（1）の生成項Pは，レイノルズ応力$-\overline{u'_iu'_j}$を用いて，

$$P=-\overline{u'_au'_b}\frac{\partial\bar{u}_b}{\partial x_a} \tag{2}$$

と表される．もしレイノルズ応力が渦粘性表現で書かれると，（1）の右辺第1項は$\bar{u}$に関して速度歪み

$$\frac{\partial\bar{u}_j}{\partial x_i}+\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_j} \tag{3}$$

の形で関係する．他方，右辺第3項は渦度を通しての$\bar{u}$の効果を示している．特に，一様回転（回転角速度ω）をしている流体中の等方性乱流に対しては，（1）は

$$\frac{\partial\epsilon}{\partial t}=-C_{\epsilon2}\frac{\epsilon^2}{k}+2C_{\epsilon3}\omega k \tag{4}$$

となる．このような場合，ϵの減衰率が減少することが知られているので，$C_{\epsilon3}$は負であることが予想される．

（1）には多数のモデル定数が現れるため，実際の数値シミュレーションよりこれらの定数を決定することは容易ではない．モデル定数の決定にはLES，FS（Full Simulation）によるデータ・ベースの利用が大変有効である．また，LES，FSのようなスーパー・コンピューターを用いた大規模計算が必要となる理由もそこにある（これらの試みに関しては，本特集号中の堀内潔，半場藤弘の論文参照）．

3．数値データ・ベースからの検証

数値データ・ベースより（1）のモデル定数を決定する

*東京大学生産技術研究所　第1部

第一段階として，最も単純な乱流である一様平均速度勾配下の等方性乱流を考える．今，一方向，たとえばy方向の平均速度勾配を

$$S=\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \tag{5}$$

と書くと，(1)は

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t}=C_{\epsilon 1}\frac{\epsilon}{k}P-C_{\epsilon 2}\frac{\epsilon^2}{k}+2C_{\epsilon 3}S^2 k \tag{6}$$

となる．ここで，一様平均速度勾配下では乱流領域が常に拡大し，定常状態がないことに注意しなければならない．

本研究においては，Rogers，MoinとReynolds[5]によるFSのデータ・ベースを利用する．本データ・ベースは3方向に周期境界条件を課し，スペクトラル法を用いている．その結果，LESにおけるサブグリット・モデルより生じる不確定性を避けうる反面，乱流領域拡大に寄因する高レイノルズ数乱流を扱えないという欠点がある．

減衰乱流の実験データから

$$C_{\epsilon 2}=1.9 \tag{7}$$

と固定すると，上記数値データ・ベースより

$$1.7\leqq C_{\epsilon 1}\leqq 1.9, \tag{8}$$

$$-0.025\leqq C_{\epsilon 3}\leqq -0.018 \tag{9}$$

を得る．TSDIAの統計理論的結果は[1]

$$C_{\epsilon 1}\simeq C_{\epsilon 2} \tag{10}$$

を示唆しているが，(8)はこの予想を裏付けている．

他方，溝乱流等に適用された標準的$k-\epsilon$モデルでは

$$C_{\epsilon 1}\simeq 1.4 \tag{11}$$

とされている．この差異はどのように説明されるのであろうか．今，(1)を溝乱流等の一次元的乱流に適用すると，レイノルズ数の渦粘性表現

$$-\overline{u_i'u_j'}=-\frac{2}{3}k\delta_{ij}+\nu_e\left(\frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i}+\frac{\overline{u}_i}{\partial x_j}\right), \tag{12}$$

$$\nu_e=C_\nu\frac{k^2}{\epsilon},\quad C_\nu\simeq 0.09 \tag{13}$$

の下では，

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t}=2(C_{\epsilon 1}C_2+C_{\epsilon 3})\left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial y}\right)^2 -C_{\epsilon 2}\frac{\epsilon^2}{k}+\cdots \tag{14}$$

となり，通常$C_{\epsilon 1}$として用いられている定数(11)は

$$C_{\epsilon 1}-\frac{C_{\epsilon 3}}{C_\nu} \tag{15}$$

に対応している．実際，$C_{\epsilon 3}=0$として数値データ・ベースを用いると，

$$1\leqq C_{\epsilon 1}\leqq 1.2 \tag{16}$$

となり，(11)にかなり接近する．(11)と(16)の差は数値データ・ベースの低レイノルズ数効果に寄因するのかも知れない．

4．おわりに

本論文では，ϵモデル方程式中のいくつかのモデル定数について考えてみた．FSはモデル定数の決定等において有力な数値データ・ベースを提供してくれる反面，理工学において興味ある10^4を超える高レイノルズ数乱流をシミュレートすることは将来的にも実現性が乏しい．ちなみに，溝乱流のFSに関してはKim，MoinとMoser[6]の研究があるが，中心流速と溝の半幅によるレイノルズ数は3000程度であり，低レイノルズ数効果はまぬがれない(CPU時間は，Moin博士によるとCRAY 2を用いても数百時間程度である)．

他方，LESではサブグリッド・モデル導入による不確定性は避けられないが，レイノルズ数はかなり上げられるという長所をもっている．それゆえに，FS，LESのそれぞれの長所，短所を踏まえて乱流モデル研究を行うことは今後不可欠となるであろう．また，核融合プラズマ閉じ込め等において生じる興味深いMHD乱流では，磁気レイノルズ数もかなり大きく，モデル化の情報も十分でない．このような状況下では，MHD LESはモデル構成の際の有力な数値データ・ベースであり，また，通常流体に対して蓄積されたモデル化の知識は有力な情報源となる．

謝　辞

本研究は著者が1987年7月13日より8月7日に開かれたCenter for Turbulence Research（NASA AmesとStanford大学協同運営）の夏期プログラムに参加した際，行われた．同センター長のP. Moin博士，R.S. Rogallo博士ほかの方々に感謝の意を表す．

(1987年10月1日受理)

参考文献

1) A. Yoshizawa: Phys. Fluids 30 (1987) 628.
2) F. Hamba: J. Phys. Soc. Jpn. 56 (1987) (in press).
3) N. Takemitsu: submitted to J. Fluids Eng.
4) S. Nisijima: submitted to AIAA J.
5) M.M. Rogers, P. Moin, and W.C. Reynolds: Report TF-25, Thermosciences Division, Department of Mechanical Engineering, Stanford University (1986).
6) J. Kim, P. Moin, and R. Moser: J. Fluid Mech. 177 (1987) 133.