

改定 $k-\epsilon$ モデルの乱流ジェットへの適用

An Application of the Revised $k-\epsilon$ Model to Turbulent Jet

竹 光 信 正*

Nobumasa TAKEMITSU

1. はじめに

われわれの身近で生じている流れは、身体内の微小循環系を除くとそのほとんどが乱流である。したがって、この乱流場を予測することはきわめて重要である。しかし、乱流場にはそのエネルギーをになう比較的大きなスケールから、エネルギー散逸に寄与する小さなスケールまでというスケールの多様性のために、その正確な予測は困難をきわめている。そこで、現在のところ、小さなスケールを何らかの方法によってモデル化し、乱流場を予測することが行われている。このようなモデルのうち、適用性が広く、また信頼性の高いモデルとして、LES、 $k-\epsilon$ モデルをあげることができる。実際、これらのモデルを使った計算例は多く、またモデルそのものにも種々の角度から検討が行われている¹⁾。

以下、本論文では $k-\epsilon$ モデルに話を限ることにする。 $k-\epsilon$ モデルは、計算の簡便さ、取り扱いやすさなどから、将来にわたっても工学的には重要なモデルであると思われる。ところが、JonesとLaunderによって考案された標準 $k-\epsilon$ モデル²⁾は、数学的に適性でない³⁾。そこで物理的根拠もあり数学的にも適性な改定 $k-\epsilon$ モデルを、Yoshizawaの統計理論の結果^{4),5)}を使って提案した⁶⁾。このモデルは、いわば生まれたばかりであるので、まだ定数の選定等に任意性が高く、実際に使える形にするためには、これを種々の乱流場に適用してモデル定数の範囲をせばめる必要がある。

以下、本論文において、改定 $k-\epsilon$ モデルを乱流ジェットに適用した結果について述べる。

2. 改定 $k-\epsilon$ モデル

さきに提案した改定 $k-\epsilon$ モデルにその後の解析^{7),8)}を加えると、

$$\frac{DU_\alpha}{Dt} \equiv \frac{\partial U_\alpha}{\partial t} + U_a \frac{\partial U_\alpha}{\partial x_a} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial R_{\alpha\alpha}}{\partial x_\alpha} \quad (1)$$

$$D = \frac{\partial U_a}{\partial x_a} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{Dk}{Dt} = P - \epsilon + \frac{\partial}{\partial x_a} (C_{k1} \nu_e \frac{\partial k}{\partial x_a}) - \frac{\partial}{\partial x_a} (C_{k2} \nu_e \frac{k}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_a}) \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{D\epsilon}{Dt} = & C_{\epsilon 1} \nu_e \frac{\epsilon}{k} \left(\frac{\partial U_a}{\partial x_a} \right)^2 + C_{\epsilon 2} \nu_e \frac{\epsilon}{k} \frac{\partial U_a}{\partial x_a} \frac{\partial U_b}{\partial x_a} - C_{\epsilon 3} \frac{\epsilon^2}{k} \\ & - C_{\nu} C_{\epsilon 4} \frac{k^2}{\epsilon^2} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial x_a} \right)^2 + C_{\nu} C_{\epsilon 5} \frac{k}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_a} \frac{\partial k}{\partial x_a} \\ & - C_{\nu} C_{\epsilon 6} \left(\frac{\partial k}{\partial x_a} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial x_a} (C_{\epsilon 7} \nu_e \frac{\partial \epsilon}{\partial x_a}) \\ & - \frac{\epsilon}{k} \frac{\partial}{\partial x_a} (C_{\epsilon 8} \nu_e \frac{\partial k}{\partial x_a}) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\nu_e = C_\nu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (5)$$

と書ける。ここで、 U_a は平均流のベクトル ($a=1, 2, 3$)、 x_a は位置ベクトル、 t は時間、 D/Dt はLagrange微分、 ρ は流体の密度、 P は平均流の圧力、 D は膨張速度を表し、繰り返し下つき添字については、1から3までの和をとるものとする。また、 k は乱流エネルギー、 ϵ はエネルギー散逸率、 ν_e はうず粘性率である。 k と ϵ は擾乱速度ベクトル u_a 、流体の動粘性率 ν を使うと、

$$k = \langle u_a u_a \rangle / 2, \quad (6)$$

$$\epsilon = \nu \left\langle \frac{\partial u_a}{\partial x_b} \frac{\partial u_a}{\partial x_b} \right\rangle \quad (7)$$

で定義される。ただし、 $\langle \rangle$ はアンサンブル平均を表す。また、式(1)における $R_{\alpha\alpha}$ は Reynolds 応力でクロネッカーのデルタ記号 δ_{ab} を使うと

$$R_{\alpha\alpha} = -\frac{2}{3} k \delta_{\alpha\alpha} + \nu_e \left(\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_a} + \frac{\partial U_a}{\partial x_\alpha} \right) \quad (8)$$

とモデル化される。ここで、さしあたり Reynolds stress の非等方表現は考えないことにする。式(3)における P は Production term で、Reynolds stress を使って

$$P = R_{ab} \frac{\partial U_b}{\partial x_a} \quad (9)$$

と書ける。また、式(3)~(5)における C_{k1} 、 C_{k2} 、 $C_{\epsilon 1} \sim C_{\epsilon 8}$ はモデル定数である。

*東京大学生産技術研究所 第1部

研 究 速 報

なお、式(4)における第1項と第2項は、

$$C_{\epsilon_1} \frac{\epsilon}{k} P + C_{\epsilon_2} \nu_e \frac{\epsilon}{k} \left(\frac{\partial U_a}{\partial x_b} - \frac{\partial U_b}{\partial x_a} \right)^2 \quad (10)$$

の形にも書けることを注意しておく。すなわち、第1項がProduction termで、第2項が回転項であり、物理的意味はこのほうがはつきりするが、定数の選定には、式(4)の形を使った。

モデル定数は、2次元平行平板間の乱流の結果から、

$$\left. \begin{aligned} C_\nu &= 0.08654 \pm 0.02074, \\ C_{k1} &= 1 \sim 0(10), \quad C_{k2} = (0.4 \sim 0.6) C_{k1} \\ C_{\epsilon_1} &\simeq C_{\epsilon_3}, \quad C_{\epsilon_3} = 1.8 \sim 2.2, \quad C_{\epsilon_4} \simeq C_{\epsilon_7} \\ C_{\epsilon_5} &= -10 \sim 10, \quad C_{\epsilon_6} = -5 \sim 5, \\ C_{\epsilon_7} &= 1 \sim 0(10) \quad C_{\epsilon_8} = 0 \sim 10 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

と評価されている。また、モデル定数 C'_{ϵ_2} は、Yoshizawa⁷⁾により、

$$C'_{\epsilon_2} = (-0.025 \sim -0.018) / C_\nu \quad (12)$$

と評価されている。

これらのモデル定数の範囲をせばめるにあたり、格子乱流の実験結果⁹⁾を改定 $k-\epsilon$ モデルに適用して、これらのモデル定数間関係を導くと、

$$\begin{aligned} C_{k2} / C_{k1} &= 1 + 1/m, \quad C_{\epsilon_3} = 1 + 1/m, \quad m = 1.0 \sim 1.3 \quad (13) \\ -(m+1)^2 C_{\epsilon_4} + m(m+1) C_{\epsilon_5} - m^2 C_{\epsilon_6} \\ &+ (m+1)(2m+1) C_{\epsilon_7} - 2m^2 C_{\epsilon_8} = 0 \quad (14) \end{aligned}$$

$$\frac{\kappa^2}{\sqrt{C_\nu}} (C_{\epsilon_7} - C_{\epsilon_4}) + C_{\epsilon_1} - C_{\epsilon_3} = 0 \quad (15)$$

が得られる。ただし、式(15)は壁乱流から導かれたものである。

3. 乱 流 Jet

いま、Fig. 1に示したような乱流Jetの流れ場を考える(ただし、ここでは、 $U_\infty = 0$ とおいた)。この流れを解くにあたり、ノズルの出口から解くことも考えられるが、初期条件の正確な設定が難しいので、十分下流の相似則が成り立っている領域について考えることにする。

式(1)から、

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu_e \frac{\partial U}{\partial x} \right)$$

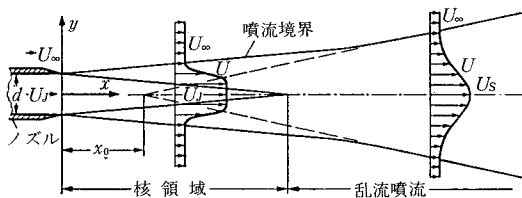


Fig. 1 乱流Jet

$$+ \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \nu_e \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right\} \quad (16)$$

この各項を評価するにあたり、ひとまず

$$U \sim U_s, V \sim \frac{U_s}{L} \frac{\partial}{\partial x} \sim \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial y} \sim \frac{1}{l}, P \sim \rho U_s^2, \nu_e \sim U_s L \quad (17)$$

とおくと、各項は、それぞれ

$$\frac{U_s^2}{L}, \frac{U_s^2}{L}, \frac{U_s^2}{L}, \frac{U_s^2}{L}, \frac{U_s^2 L}{l^2}, \frac{U_s^2}{L} \quad (18)$$

となる。右辺で卓越する項は、 $\partial(\nu_e \partial U / \partial y) / \partial y$ であるから、これと左辺をバランスさせると、

$$\frac{U_s^2}{L} \sim \frac{l U_s^2}{l^2} \quad (19)$$

となる。そこで、この式が成り立つように $R_T = (L/l)^2$ を展開パラメータに選んで、

$$\nu_e = U_s L / R_T$$

とおく。これで、 ν_e の大きさがはつきりしたから、もう一度各項を評価すると、(19)に l をかけて

$$\frac{U_s^2}{R_T^{1/2}}, \frac{U_s^2}{R_T^{1/2}}, \frac{U_s^2}{R_T^{1/2}}, \frac{U_s^2}{R_T^{3/2}}, \frac{U_s^2}{R_T^{1/2}}, \frac{U_s^2}{R_T^{3/2}} \quad (20)$$

となる。したがって、 $O(R_T^{1/2})$ に対して $O(R_T^{3/2})$ の項を省略すると、

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu_e \frac{\partial U}{\partial y} \right) \quad (21)$$

が得られる。同様にして、

$$\begin{aligned} U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \nu_e \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \right\} \\ &+ 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu_e \frac{\partial V}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

から、

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad p = p_s \quad (y = \pm \infty \text{での圧力}), \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (22)$$

結局、主流の方程式は、

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu_e \frac{\partial U}{\partial y} \right) \quad (23)$$

となる。式(3)、(4)を同様な方法で評価すると、

$$\begin{aligned} U \frac{\partial k}{\partial x} + V \frac{\partial k}{\partial y} &= \nu_e \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - \epsilon + \frac{\partial}{\partial y} \left(C_{k1} \nu_e \frac{\partial k}{\partial y} \right) \\ &- \frac{\partial}{\partial y} \left(C_{k2} \nu_e \frac{k}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right) \quad (24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U \frac{\partial \epsilon}{\partial x} + V \frac{\partial \epsilon}{\partial y} &= C_{\epsilon_1} \nu_e \frac{\epsilon}{k} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - C_{\epsilon_3} \frac{\epsilon^2}{k} \\ &- C_\nu C_{\epsilon_4} \frac{k^2}{\epsilon^2} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right)^2 + C_\nu C_{\epsilon_5} \frac{k}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \frac{\partial k}{\partial y} \\ &- C_\nu C_{\epsilon_6} \left(\frac{\partial k}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left(C_{\epsilon_7} \nu_e \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

研究速報

$$-\frac{\varepsilon}{k} \frac{\partial}{\partial y} \left(C_{\varepsilon 8} v \varepsilon \frac{\partial k}{\partial y} \right) \quad (25)$$

となる。式(23)~(25)が乱流Jetの基礎式である。

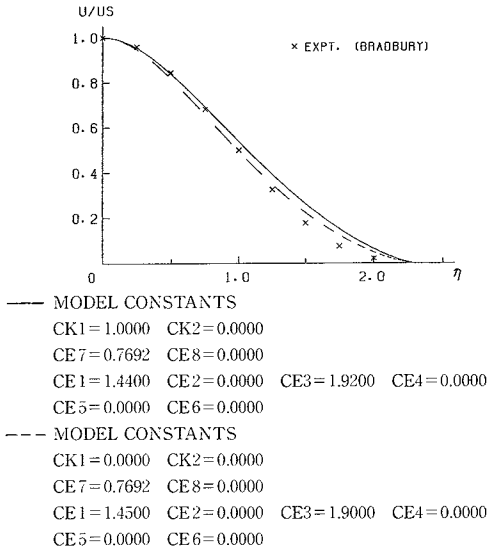
4. 乱流 Jet の相似解

式(23)~(24)の相似解を求めるためには、下流方向の各点で運動量

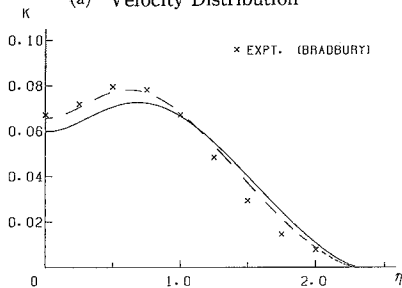
$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \rho U^2 dy \quad (26)$$

が保存されるという条件が必要である。この条件を使うと、解は、

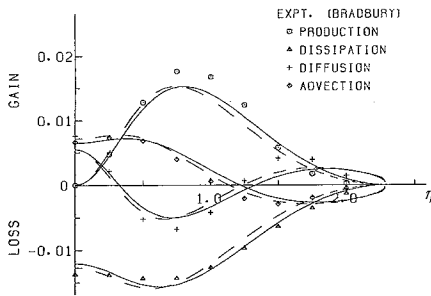
$$\left. \begin{aligned} U &= U_s F'(\eta), & \eta &= y / \sqrt{C_v x} \\ U_s &= C U_J \left(\frac{d}{x} \right)^{1/2}, & l &= Ax, \quad A, C : const. \\ k &= U_s^2 G(\eta), & \varepsilon &= (U_s^3/x) H(\eta) \end{aligned} \right\} \quad (27)$$



(a) Velocity Distribution

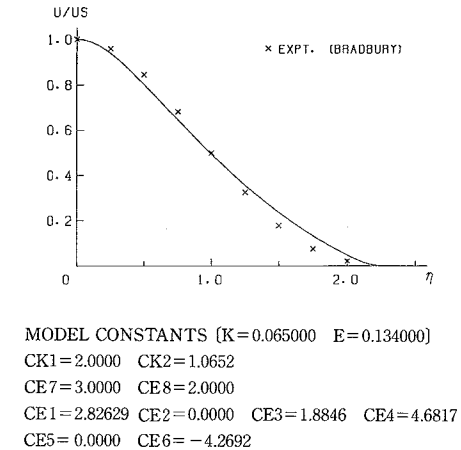


(b) Energy Distribution

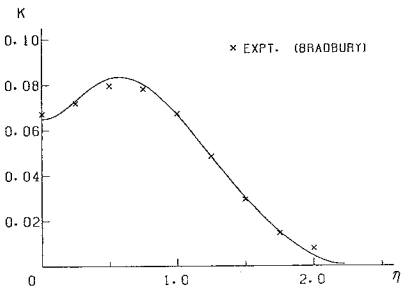


(c) Energy Balance

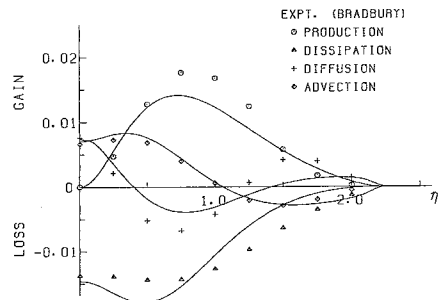
Fig. 2 標準k-εモデルによるJetの相似解



(a) Velocity Distribution



(b) Energy Distribution



(c) Energy Balance

Fig. 3 改定k-εモデルによるJetの相似解の例

研 究 速 報

の形に求めることができる。

(27)を(23)~(24)に代入すると、

$$\frac{G^2}{H}F'' + \frac{1}{2}FF' = 0 \tag{28}$$

$$B.C. \eta = 0 \text{ で } F = 0, F' = 1 \tag{29}$$

$$C_{k1} \left(\frac{G^2}{H}G' \right)' - C_{k2} \left(\frac{G^3}{H^2}H' \right)' + \frac{G^2}{H}F'' - H + F'G + \frac{1}{2}FG' = 0 \tag{30}$$

$$B.C. \eta = 0 \text{ で } G' = 0, \eta \rightarrow \infty \text{ で } G \rightarrow 0 \tag{31}$$

$$C_{\epsilon 7} \left(\frac{G^2}{H}H' \right)' - C_{\epsilon 8} \frac{H}{G} \left(\frac{G^2}{H}G' \right)' + C_{\epsilon 1}GF'' - C_{\epsilon 3} \frac{G^2}{H^2}H^2 + C_{\epsilon 5} \frac{G}{H}GH' - C_{\epsilon 6}G^2 + \frac{5}{2}F'H + \frac{1}{2}FH' = 0 \tag{32}$$

$$B.C. \eta = 0 \text{ で } H' = 0, \eta \rightarrow \infty \text{ で } H \rightarrow 0 \tag{33}$$

ここで、'はηに関する微分を表す。

微分方程式(28), (30), (32)は、最高階の微係数が $y = \pm\infty$ で特異になる。そこで、変換

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{G^2}{H}, \quad \eta = \int_0^\xi \frac{G^2}{H} d\xi$$

を施す。そうすると、式(28)~(33)は、

$$U_\xi + \frac{1}{2}FU = 0, \quad U = F' \tag{34}$$

$$B.C. \xi = 0 \text{ で } F = 0, U = 1 \tag{35}$$

$$C_{k1}G\xi\xi' - C_{k2} \left(\frac{G}{H}H\xi \right)_\xi + U_\xi^2 - G^2 + F_\xi G + \frac{1}{2}FG_\xi = 0 \tag{36}$$

$$B.C. \xi = 0 \text{ で } G_\xi = 0, \xi \rightarrow \infty \text{ で } G \rightarrow 0 \tag{37}$$

$$C_{\epsilon 7}H\xi\xi' - C_{\epsilon 8} \frac{H}{G}G\xi\xi' + C_{\epsilon 1} \frac{H}{G}U_\xi^2 - C_{\epsilon 3}GH - C_{\epsilon 4} \frac{H\xi^2}{H} + C_{\epsilon 5} \frac{H\xi G_\xi}{G} - C_{\epsilon 6} \frac{H}{G^2}G_\xi^2 + \frac{5}{2}F_\xi H + \frac{1}{2}FH_\xi = 0 \tag{38}$$

$$\xi = 0 \text{ で } H_\xi = 0, \xi \rightarrow \infty \text{ で } H \rightarrow 0 \tag{39}$$

となる。こうしても、 $\xi = \pm\infty$ で方程式(36), (38)は分母にHとGを含むので特異になるが、ここでは、

$$|G|, |H| < 10^{-5} \text{ なら } G, H = 10^{-5}$$

とおいて解いた。ξ∞としては、ξ∞=40とおいた。

結果をFig. 2, 3に示す。図中、実験値はBradbury¹⁰⁾による。

Fig. 2は、標準k-εモデルによる解である。これらの図から、標準k-εモデルでもJetの場合にはよく予測できることがわかる。しかし、図にみられるように、モデル定数にきわめて敏感である。

Fig. 3は、改定k-εモデルによる解である。実験値と比較すると、ほぼよい一致を見せている。なおFig. 3(b)とFig. 3(c)から、式(5)を使ってず粘性率を計算すると、たとえば、η=0でνe=0.028となるが、実験値はνe=0.036となる。

Fig. 3(b)とFig. 3(c)で与えられるkとεに±10%の実験誤差があるとして、式(34)~(39)を計算すると、Fig. 3に示すような解があるモデル定数の範囲は、式(11)を考慮して)

$$\left. \begin{aligned} C_v &= 0.08654 \pm 0.02074, \\ C_{k1} &= 1 \sim O(10) & C_{k1}/C_{k2} &= 1.8846 \pm 0.1154, \\ C_{\epsilon 1} &= (0.5 \sim 1.5)C_{\epsilon 3} & C_{\epsilon 3} &= 1.8846 \pm 0.1154, \\ C_{\epsilon 5} &= -10 \sim 2 & C_{\epsilon 6} &= \text{式(14)による} \\ C_{\epsilon 7} &= 1 \sim O(10) & C_{\epsilon 8} &= 0 \sim 10 \end{aligned} \right\} \tag{40}$$

となる。これで、式(11)に比べて、とくにモデル定数Cεεの範囲をすこししぼることができた。

5. 結 言

改定k-εモデルを乱流Jetに適用して、モデル定数の範囲をすこしせばめた。現在、本モデルをさらにWakeやMixing Layerに適用して、もっとモデル定数の範囲をせばめることを検討中である。

謝 辞

本研究をすすめるにあたり、本所NSTグループの御支助と御討論を戴きました。とくに、吉澤徹助教授には貴重な御討論を戴きました。ここに記して厚く感謝致します。(1987年10月13日受理)

参 考 文 献

- 1) 生産研究, vol. 38, No. 12 (1986).
- 2) Jones, W.P. and Launder, B.E., Int. J. Heat and Mass Transfer, 15 (1972), 301.
- 3) 竹光, 機論, vol. 53, No. 494 (1987), 2921., Takemitsu, N., J. Fluids Engineering, submitted.
- 4) Yoshizawa, A., J. Phys. Soc. Jpn., 51-7 (1982), 2326.
- 5) Yoshizawa, A., Phys. Fluids, 30-3 (1987), 628.
- 6) 竹光, 機論, vol. 53, No. 496 (1987), Takemitsu, N., J. Fluids Engineering, submitted.
- 7) 吉澤, 生産研究.
- 8) Hamba, F., J. Phys. Soc. Jpn., 56-11 (1987).
- 9) Comte-Bellot, G. and Corrsin, S., J. Fluid Mech., vol. 25 (1966), 657.
- 10) Bradbury, L.J.S., J. Fluid Mech., vol. 23 (1965), 31.