研究速報
特集 7
UDC 532.517.4：519.2：532.542

k-εモデルによる円すいディフューザ内乱流の数値予測

Numerical Prediction of Turbulent Flow in a Conical Diffuser Using k-ε Model

何　永森*・森西洋平*・小林敏雄*
Yong Sen HE, Youhei MORINISHI and Toshio KOBAYASHI

1. まえがき

圧力回復装置としてのディフューザは工学および工業の応用において重要な役割を果たす．ディフューザは負の圧力勾配をもつ管内流れと異なり，運動エネルギを正の圧力勾配をもつ流れのエネルギに変換する．Venturiおよび同時代の研究者たちはより効率の高いディフューザの形状を決定するために，数多くの実験的研究および理論的研究を行った[1)2)]．ディフューザを通る流れ，特に高広がり角の場合には，通常発達管内乱流のような簡単な様相ではなく，予測するディフューザ流れが強い逆圧力勾配のとき，軸対称平衡流の実験データを参考にした理論的アプローチでは，不十分であろう．

近年の強力なディジタル計算機の出現はナビエ・ストークス方程式を数値的に解くという手法を複雑な乱流場の研究に加えつつある．このような数値計算では，何らかの乱流の数学モデルをナビエ・ストークス方程式に組み合わせる必要がある．これらの数学モデルの中で，ゼロ方程式モデルおよび1方程式モデルは経験的な記述が必要であり，通常正確ではない．レイノルズ応力モデルは非常に複雑な数学モデル[3)]であり，Large Eddy Simulationは計算結果を得るために非常に多くの計算時間を必要とする[4)]．使用する立場からみると，すべてのモデルは経験定数および仮定の上に成り立っているので，より複雑なモデルが2方程式モデルよりも価値があるかどうかは明らかでない．現在のところ工学の計算に最も多く用いられている乱流モデルはk-εモデルと思われる．

本報では円すいディフューザ内流れの数値解析の第1段階として，主として数値解析手法の構成を行う．

2. 数値計算手法

2.1 基礎方程式

旋回成分のない軸対称流れの基礎方程式は次のように与えられる．

*東京大学生産技術研究所　第2部

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}+\frac{1}{r}\partial r(r\bar{v})=0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}\bar{u})+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\bar{v}\bar{u})=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\bar{p}+\frac{2}{3}k\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{1}{Re}+\nu_t\right)\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}+\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)\right]+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\left(\frac{1}{Re}+\nu_t\right)\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial r}+\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}\right)\right] \tag{2}$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}\bar{v})+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\bar{v}\bar{v})=-\frac{\partial}{\partial r}\left(\bar{p}+\frac{2}{3}k\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{1}{Re}+\nu_t\right)\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}+\frac{\partial \bar{u}}{\partial r}\right)\right]+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\left(\frac{1}{Re}+\nu_t\right)\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial r}+\frac{\partial \bar{v}}{\partial r}\right)\right]-\frac{2}{r}\left(\frac{1}{Re}+\nu_t\right)\frac{\bar{v}}{r} \tag{3}$$

$$\frac{\partial k}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}k)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\bar{v}k)=\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{1}{Re}+\frac{\nu_t}{\sigma_1}\right)\frac{\partial k}{\partial x}\right]+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\left(\frac{1}{Re}+\frac{\nu_t}{\sigma_1}\right)\frac{\partial k}{\partial r}\right]+G-\varepsilon \tag{4}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}\varepsilon)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\bar{v}\varepsilon)=\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{1}{Re}+\frac{\nu_t}{\sigma_2}\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right]+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\left(\frac{1}{Re}+\frac{\nu_t}{\sigma_2}\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial r}\right]+C_1\frac{\varepsilon}{k}G-C_2\frac{\varepsilon^2}{k} \tag{5}$$

$$G=\nu_t\left[2\left\{\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\bar{v}}{r}\right)^2\right\}+\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial r}+\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}\right)^2\right]$$

$$\nu_t=C_D\frac{k^2}{\varepsilon} \tag{6}$$

表1

x	; axial distance	nondimensional
r	; radial distance from the center	nondimensional
y	; radial distance from the wall	nondimensional
p	; pressure	nondimensional
u, v, w	; velocity component	nondimensional
Re	; Reynolds number $(=U_0D_0/\nu)$	
t	; time, nondimensional	
ν	; kinetic viscosity	
ν_t	; eddy viscosity, nondimensional	
ε	; turbulence dissipation ratio	
k	; turbulence energy	
α	; kinetic energy coefficient	
θ	; divergent angle of diffuser	

主な記号を表1に示す．

本研究ではディフューザの形状を表現する離散化手法として二種類のものを選ぶ．一つはスタガードメッシュのHSMAC法を用いて傾斜面を階段状に近似する手法，もう一方は境界適合座標（BFC）[5]を用いて座標変換法により傾斜面形状を正しく評価するものである．

2.2　傾斜面階段状近似の手法

基礎方程式(1)～(6)をそのまま差分方程式群に離散化し連立させて解く．離散化の方法は時間的にAdams-Bashforth形スキーム，空間的に中心差分スキームを用いる（ただし運動方程式およびk，εの輸送方程式中の対流項について風上差分を用いることもある）．格子システムとしてはスタガードメッシュを採用する．また時間進展式と連続の式とのカップリングには速度圧力同時緩和法であるHSMAC法を用いる．

2.3　境界適合座標（BFC）による手法

方程式(1)～(6)の微分をすべて展開し連続の式を用いて整理したものを基礎方程式として使う．また運動方程式の発散をとることにより$\pi(=p+\frac{2}{3}k)$のポアソン方程式が得られる．

$$\nabla^2\pi=\frac{D^n}{\Delta t}-\left\{\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial r}\right)^2+2\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial x}\right)\right\}$$
$$+2\left\{\frac{\partial\nu_t}{\partial x}\cdot\nabla^2\bar{u}+\frac{\partial\nu_t}{\partial r}\cdot\nabla^2\bar{v}+\frac{\partial^2\nu_t}{\partial x^2}\cdot\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2\nu_t}{\partial r^2}\cdot\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2\nu_t}{\partial x\partial r}\cdot\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial x}+\frac{\partial\bar{u}}{\partial r}\right)\right\} \quad (7)$$

上式中Dを含む項は消去してある．ただしDの時間微分項についてはMAC法の考えに従い（$D^{n+1}=0$），

$$\frac{\partial D}{\partial t}\doteqdot\frac{D^{n+1}-D^n}{\Delta t}=-\frac{D^n}{\Delta t}$$

のように近似する．

これら基礎方程式群における物理面上の微分は座標変換法を用いて計算面上の微分に変換する．

物理面(x, r)から計算面(ξ, η)への変換を次のように行う[5]．

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial x}&=\xi_x\frac{\partial\phi}{\partial\xi}+\eta_x\cdot\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\\ \frac{\partial\phi}{\partial r}&=\xi_r\frac{\partial\phi}{\partial\xi}+\eta_r\cdot\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\\ \xi_x&=r_\eta/J,\quad \eta_x=-r_\xi/J\\ \xi_r&=-x_\eta/J,\quad \eta_r=x_\xi/J\\ J&=x_\xi\cdot r_\eta-x_\eta\cdot r_\xi\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

2階微分以後は微分操作を繰り返せばよい．

ここで，座標変換後の対流項は次のように整理できる．

$$\bar{u}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial\phi}{\partial r}=U_\xi\cdot\frac{\partial\phi}{\partial\xi}+U_\eta\frac{\partial\phi}{\partial\eta}$$
$$U_\xi=\xi_x\cdot\bar{u}+\xi_r\cdot\bar{v}$$
$$U_\eta=\eta_x\cdot\bar{u}+\eta_r\cdot\bar{v}$$

U_ξ，U_ηはそれぞれξ，η方向の反変速度ベクトルとなっている．これらを対流速度にとることにより計算面における風上化差分が可能となる．

離散化手法としては運動方程式の対流項について3次の風上差分，その他の空間差分については2次中心差分を用いる．時間方向スキームとしては粘性項にCrank-Nicolson，他をAdams-Bashforthスキームを用い，point-SOR法により解く．また各時間ステップごとにπのポアソン方程式(7)もpoint-SOR法で解く．

3．ディフューザ内流れの数値計算

3.1　計算対象および計算条件

本研究で計算対象とする流れ場は図1に示すように軸対称円すいディフューザ内の流れである．本報告では

(1)流体は軸対称の非圧縮性粘性流体であること

(2)流れ場において旋回運動はないこと

(3)重力の影響は存在しないこと

(4)流れ場において等方性乱れをもつこと

を仮定する．

数値計算における境界条件は次のとおりである．入口断面では主流方向速度として一様流入およびLauferによる実測値[6]を与え，kおよびεについてはLauferによる発達管内乱流の実測値($k_{\rm in}=3.2\times10^{-3}$，$\varepsilon_{\rm in}=7.1\times10^{-4}$)を与えている．出口断面では速度，$k$，$\varepsilon$について自由流出条件を適用する．ディフューザ部に相当する階段状多段階管の境界条件としては壁面に垂直方向速度成分を0，壁面に平行方向速度成分に関して1/7乗則を与えている．BFCを用いた計算例では壁面近傍の格子を直交化しているのでそのまま1/7乗則を用いる．kについてはfree-slipの条件を，またεについては壁面最近傍格子点の値を混合長理論より

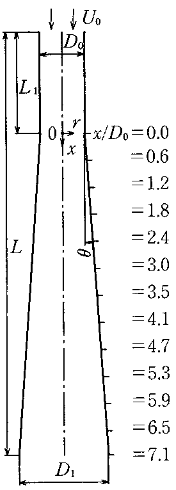


図1　円すいディフューザのモデル流路

$$\varepsilon = C_D^{3/4} \cdot k^{3/2} / (\kappa \cdot y) \qquad (9)$$

の関係を導入する．ここにκはカルマン定数（本報では$\kappa=0.4$），yは壁面から格子中央点までの距離である．

傾斜面階段状近似の手法における収束条件としてはHSMAC法での発散の許容範囲を1/100あるいは1/1000に設定している．無次元時間刻みは1/100あるいは1/1000に設定している．BFCを用いた数値計算の収束条件としては，各時間ステップごとのSORの繰り返し回数を20回に設定している．

境界条件と計算条件をまとめて表2に示す．

3.2　計算結果

第1段階としてk-εモデルによる数値計算を$\theta=4°$の軸対称円すいディフューザ内の乱流に適用する．計算対象のレイノルズ数Reは2.93×10^5および1.16×10^5である．計算結果について両解析手法を直接比較し，Okwuobi[7]およびSingh[8]の実験データと比較する．

本報では三つの特定点の主流方向速度の値によって初期条件の影響が消える時点および解の安定状態の時点を判定している．図2にA（$x/D_0=0.063$, $r/D_0=0.475$），B（3.562, 0.475），C（7.062, 0.475）における主流方向速度の計算時間による変化を示す．

図3に流れ場全領域の速度$\bar{u}$の分布を示す（ケースAとB，CとD）．流入条件の違い(一様流入，ケースAとC，実験値，ケースBとD)により，$\bar{u}$における流入条件はディフューザ入口近傍のみならず流出口付近まで影響を及ぼすことがわかる．

図4に各断面の速度の計算値（ケースBとD）および実測値との比較を示す．壁面近傍における流速はケースDよりケースBのほうが小さくなっている．この原因としては，i）ケースBでは傾斜面に階段状近似を用いているので角部の影響が現れ剝離が促進された，ii）壁面速度1/7乗則の影響（1/7乗則では壁面応力の評価が壁面からの距離により異なる)，iii)数値解法の違い，等が考

表2

CASE		A	B	C	D
Grid		staggered (MAC type)		regular (Grid Generation)	
Scheme (Time)		Adams-Bashforth		Crank-Nicolson (for 2nd diff.) Adams-Bashforth (for other)	
Scheme (Space)		Central	Doner Cell (for conv.) Central (for other)	3rd upwind (for conv.) Central (for other)	
Solution for pressure		Simultaneous iteration for u,v & p (HSMAC scheme)		SOR method for poisson eq. of p (MAC scheme)	
Inflow B.C	vel.	uniform	exp. data	uniform	exp. data
	k, ε	$k_{in}=3.2\times10^{-3}$, $\varepsilon_{in}=7.2\times10^{-4}$			
Outflow B.C		divergence free			
Wall B.C	vel.	1/7th power law			
	k	free slip			
	ε	auxiliary formula, Eq.(7)			
	p	—		free slip	
Model constant		$C_D=0.09$, $C_1=1.59$ $\sigma_1=1.0$, $C_2=2.0$ $\sigma_2=1.3$		$C_D=0.09$, $C_1=1.44$ $\sigma_1=1.0$, $C_2=1.92$ $\sigma_2=1.3$	
Time increment		1/1000	1/100	1/200	
Number of Grids		75×20		150×50	
Convergence condition		$\mathrm{Max}\left\|\left[\mathrm{dif}\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i}\right)\right]_N\right\| < 1/1000$	$\mathrm{Max}\left\|\left[\mathrm{dif}\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i}\right)\right]_N\right\| < 1/100$	20 sweep for SOR method (every time steps)	

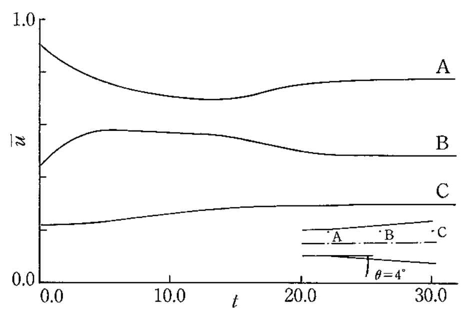
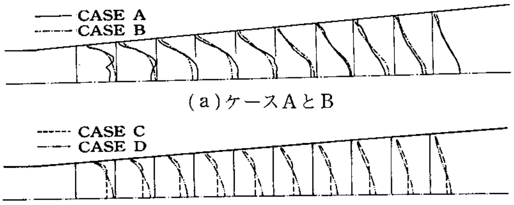


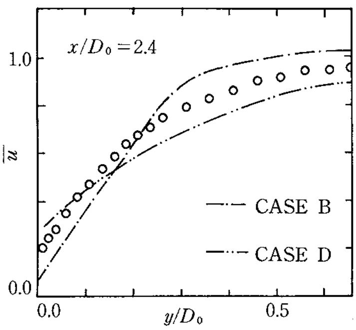
図2　主流方向速度計算値の時間変化（ケースB）



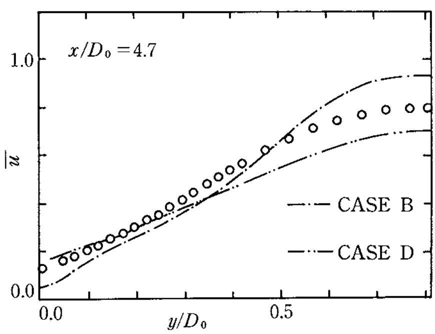
(a)ケースAとB

(b)ケースBとC

図3　流れ場全領域の主流方向速度$\bar{u}$の分布



(a)$x/D_0=2.4$



(b)$x/D_0=4.7$

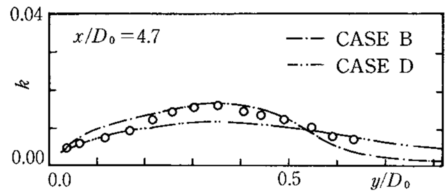
図4　主流方向速度$\bar{u}$の分布（ケースBとD）

えられる．また当然流量を保つために中心軸近傍の流速はケースDよりケースBのほうが大きくなっている．

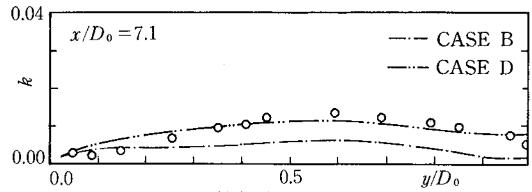
図5に各断面の乱流エネルギkの計算値（ケースBとD）および実測値との比較を示す．$x/D_0=4.7$のkの分布を見るとケースBがケースDよりも実測値に近い．しかし$x/D=7.1$においてはケースDがケースBよりも実測値に近い．これらから乱流エネルギの分布としてどちらが良いかは今のところ判断し難い．

4．ま　と　め

円すいディフューザ内流れの数値解析の第1段階として，傾斜面を階段状近似する手法およびBFCを用いて傾斜面を正確に表現する手法の2通りの数値解析手法の構



(a)$x/D_0=4.7$



(b)$x/D_0=7.1$

図5　乱流エネルギkの分布（ケースBとD）

成を行い，数値計算を行った．ここでの計算例においては速度分布，乱流エネルギーともに満足できる結果は得られなかった．境界条件の取り扱いおよび傾斜面の表現方法に一層の工夫が必要と思われる．またBFCを用いた計算で壁面速度1/7乗則を用いているが，これはBFCの利点を十分活用していないことになる．今後はBFCを用いた計算で壁面近傍格子をより密にとり壁面速度no-slip条件を課せる低レイノルズ数型k-εモデルの適用も検討する必要がある．

（1987年11月11日受理）

参　考　文　献

1) Kline, S.J. et al., Optimum Design of Straight-Walled Diffusers, Trans. ASME, Ser. D, 81-3 (1959), 321
2) Schlichting, H., Boundary Layer Theory, 7th ed., McGraw-Hill (1978), 626
3) Hung, P.G. and Leschziner, M.A., Stabilization of Recirculating-Flow Computations Performed with Second-Moment Closures and Third-Order Discretization, Proc. 5th Int. Symp. ofTurbulent Shear Flows (1985), 207
4) Kobayashi, T. et al. Large Eddy Simulation of Turbulent Flow in Two-Dimensional Channel with Rectangular Turbulence Promoters, Rep. of I.I.S., Univ. of Tokyo, 33-3 (1987), 93
5) Kobayashi, T. et al. FDM using boundary-fit curvilinear coordinate transformation (1st Rep.), "SEISAN-KENKYU" 38-12 (1986), 592
6) Laufer, J., The Structure of Turbulence in Fully Developed Pipe Flow, NACA, Rep. 1174 (1953), 1
7) Okwuobi, P.A.C and Azad, R.S., Turbulence in a Conical Diffuser with Fully Developed Flow at Entry, J. Fluid Mech., 57, part 3 (1973), 603
8) Singh, D. and Azad, R.S., Turbulent Kinetic Energy Balance in a Conical Diffuser, Proc. of Turbulence 1981, 21