研 究 速 報
特 集 12
UDC 532.517.4：533.6.011.1：519.22

非等方$k-\varepsilon$モデルの改良

Improvment of an Anisotropic $k-\varepsilon$ Model

西 島 勝 一*
Shoiti NISIZIMA

1．はじめに

計算機の発展に伴い自然および工学的現象に現れるせん断乱流の数値解析が多く試みられ，種々の乱流モデルが考案されている．代表的なものとしてはLES，応力モデル，$k-\varepsilon$モデルを挙げることができる．その中で，$k-\varepsilon$モデルは計算時間が比較的短く，モデルが比較的簡単である等の理由で非常に多く用いられている．しかし，通常の等方$k-\varepsilon$モデルはレイノルズ応力の等方的渦粘性表現に基づいているため，溝乱流での乱流強度の非等方性や矩形管内乱流での二次流を再現することができない．以上の困難を解決したのが吉澤が統計理論的に導出した非等方$k-\varepsilon$モデルである[1]．このモデルは，レイノルズ応力の非等方表現に基づき，先に挙げた通常の$k-\varepsilon$モデルの欠点を解決するものであることは数値解析的にも実証されている[2),3)]．さらに，吉澤はエネルギー散逸率ε方程式を統計理論的に導き[4)]同方程式および乱流エネルギー(k)方程式におけるクロス・ディフュージョン(cross diffusion)効果[5)]，たとえばk方程式におけるεの拡散効果の潜在的重要性を示した．

他方，竹光は最近対数速度分布等の壁法則を境界条件とする溝乱流の境界値問題では$k-\varepsilon$モデルは数学的にイル・ポーズド (ill-posed) であることを示した[6)]．竹光はこの困難を解決するには上述のクロス・ディフュージョンほかの統計理論から示唆される効果を積極的に取り入れることを提案した[7),8)]．

本論文ではすでにその有効性が示された非等方$k-\varepsilon$モデルと上述の統計理論的および竹光の研究結果を組み合わせ，改良非等方$k-\varepsilon$モデルを提起する．主な改定はエネルギーk方程式にεの拡散項を，また，ε方程式にkの拡散項をおのおの加えたこと，壁減衰関数は平均流速およびk方程式のみに用い，ε方程式には導入しなかった点にある．このモデルを3つの異なるレイノルズ数の溝乱流に適用し，その結果を実験値と比較検討する．その結果，壁の極近くでの乱流エネルギー，渦粘性の形状が著しく改善されることが示される．

*東京大学生産技術研究所　第1部（吉澤研）

2．改良非等方$k-\varepsilon$モデル

速度，圧力（密度で割ったもの）の平均部分とそれからのずれを示す擾乱部分をそれぞれ ($\bar{v}$, $\bar{p}$) と (v', p') で表すと，三次元非圧縮・粘性流体に対する平均部分の基本方程式は，

$$\frac{D\bar{v}_\alpha}{Dt}\equiv\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{v}_a\frac{\partial}{\partial x_a}\right)\bar{v}_\alpha$$

$$=-\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial}{\partial x_a}\left(R_{\alpha a}+\nu\frac{\partial\bar{v}_\alpha}{\partial x_a}\right),\quad \frac{\partial\bar{v}_a}{\partial x_a}=0 \qquad (1)$$

で与えられる．νは動粘性率であり，$R_{\alpha\beta}$はいわゆるレイノルズ応力であり，(1)は$R_{\alpha\beta}$と$\bar{v}$との間に何らかの関係付けを与えなければ解くことができない．そのため非等方$k-\varepsilon$モデルでは擾乱場の基本的統計量として乱流エネルギーkとエネルギー散逸率εを選び，レイノルズ応力を[1)-3)]，

$$R_{\alpha\beta}=-\frac{2}{3}k\delta_{\alpha\beta}+\nu_e\left(\frac{\partial\bar{v}_\alpha}{\partial x_\beta}+\frac{\partial\bar{v}_\beta}{\partial x_\alpha}\right)$$

$$+\frac{1}{3}\left(\sum_{m=1}^{3}\tau_m S_{maa}\right)\delta_{\alpha\beta}+R'_{\alpha\beta} \qquad (2)$$

$$\nu_e=C_\nu\frac{k^2}{\varepsilon},\quad \tau_m=C_{\tau m}\frac{k^3}{\varepsilon^2},\quad S_{1\alpha\beta}=\frac{\partial\bar{v}_\alpha}{\partial x_a}\frac{\partial\bar{v}_\beta}{\partial x_a},$$

$$S_{2\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\bar{v}_\alpha}{\partial x_a}\frac{\partial\bar{v}_a}{\partial x_\beta}+\frac{\partial\bar{v}_\beta}{\partial x_a}\frac{\partial\bar{v}_a}{\partial x_\alpha}\right),$$

$$S_{3\alpha\beta}=\frac{\partial\bar{v}_a}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\bar{v}_a}{\partial x_\beta},\quad R'_{\alpha\beta}=-\sum_{m=1}^{3}\tau S_{m\alpha\beta} \qquad (3)$$

と表す．ただし，上式中の$\delta_{\alpha\beta}$はクロネッカーのデルタ記号である．k，εの支配方程式は，吉澤により統計理論的に次のとおりモデル化されている[4),5)]．

$$\frac{Dk}{Dt}=R_{ab}\frac{\partial\bar{v}_b}{\partial x_a}-\varepsilon+\frac{\partial}{\partial x_a}\left(C_{kk}\frac{k^2}{\varepsilon}\frac{\partial k}{\partial x_a}\right)$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_a}\left(C_{k\varepsilon}\frac{k^3}{\varepsilon^2}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_a}\right)+\frac{\partial}{\partial x_a}\left(\nu\frac{\partial k}{\partial x_a}\right) \qquad (4)$$

$$\frac{D\varepsilon}{Dt}=C_{\varepsilon1}\frac{\varepsilon}{k}R_{ab}\frac{\partial\bar{v}_b}{\partial x_a}-C_{\varepsilon2}\frac{\varepsilon^2}{k}+\frac{\partial}{\partial x_a}\left(C_{\varepsilon\varepsilon}\frac{k^2}{\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_a}\right)$$
$$+\frac{\partial}{\partial x_a}\left(C_{\varepsilon k}k\frac{\partial k}{\partial x_a}\right)+\frac{\partial}{\partial x_a}\left(\nu\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_a}\right)+C'_{\varepsilon1}\left(\frac{\partial k}{\partial x_a}\right)^2$$
$$+C'_{\varepsilon2}\frac{k}{\varepsilon}\frac{\partial k}{\partial x_a}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_a}+C'_{\varepsilon3}\frac{k^2}{\varepsilon^2}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_a}\right)^2 \tag{5}$$

壁法則を用いた竹光の最近の溝乱流の研究では[8]，モデル定数C_{kk}，$C_{k\varepsilon}$，$C_{\varepsilon\varepsilon}$，$C_{\varepsilon k}$，$C'_{\varepsilon n}(n=1,\ 2,\ 3)$を含む項すべてを残すことが最良であると示されているが，本研究では特に重要性の高いクロス・ディフュージョン効果に注目し，次の最適化を行った．

$$C_\nu\sim0.09,\ C_{kk}\sim0.08,\ k_\varepsilon\sim-0.03,\ C_{\varepsilon1}\sim0.8,$$
$$C_{\varepsilon2}\sim1.9,\ C_{\varepsilon\varepsilon}\sim0.1,\ C_{\varepsilon k}\sim-0.1,\ C_{\tau1}\sim0.057,$$
$$C_{\tau3}\sim-0.0067,\ C'_{\varepsilon1}=C'_{\varepsilon2}=C'_{\varepsilon3}=0 \tag{6}$$

以上の(1)−(5)を連立させることにより解が得られる．

なお，この改良モデルと通常の等方k—εモデルあるいは既存の非等方k—εとの違いは(2)，(4)，(5)に現れている．すなわち，等方モデルでは(2)は右辺第1，2項だけからなり，第3，4項の非等方項は省略され，かつ，既存の非等方モデルとともに(4)と(5)の両方の右辺第4項も省かれている．今回の改良結果は(4)，(5)の右辺第4項の拡散項を組み入れただけでも結果が大きく改善されることを示している．

3．溝乱流への適用

A. 無次元化

このモデルを図1の溝乱流に適用してみる．流れ方向x_1と壁に垂直なx_2の両方に直交するx_3方向は無限長であると仮定すると，次の条件が成立する．

$$\frac{\partial\bar{v}_1}{\partial x_1}=0,\ \bar{v}_2=\bar{v}_3=0,$$
$$\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_1}=constant,\ \frac{\partial\bar{p}}{\partial x_2}=\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_3}=0 \tag{7}$$

さらに，壁間の半分の長さDと，Dおよび平均圧力勾配$-(d\bar{p}/dx_1)$で表される速度$\sqrt{-D(d\bar{p}/dx_1)}$を用いて以上の式を無次元化する．

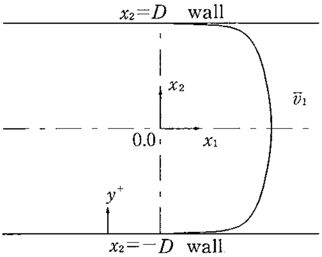


図1　座　標

B. 滑り無し境界条件

非等方k—εモデルは，(3)の第一，第二項の非等方渦粘性表現がモデルの重要な基礎となっている．しかし，通常の等方k—εモデルの場合と同様に，この表現は動粘性率νが重要となる壁近くのいわゆる粘性底層内では成り立たない．そこで，以上の非等方渦粘性表現にかかわるすべての項，すなわち，k^2/ε，k^3/ε^2を持つ項に壁近くで減衰する壁減衰関数を掛け合わせる必要がある[2),3)]．その場合，平均流速，乱流エネルギーの式とエネルギー散逸率の式では壁減衰関数が必ずしも同一でないことが，モデルの統計理論的導出経過より示唆されるので[4),5)]，既存のモデルと異なり(1)・(4)だけに次の関数を乗ずる．

$$f_{dvk}=1-exp(-y^+/A),\ A=23 \tag{8}$$

ここで，y^+は壁座標で，

$$y^+=\frac{x'_2v^*}{\nu},\ v^*=\sqrt{\nu\left(\frac{d\bar{v}_1}{dx_2}\right)_{wall}} \tag{9}$$

と定義される．x'_2は壁からの距離，v^*は摩擦速度である．なお(8)の定数Aは，数値解析結果が最適になるように定めた．以上を考慮して整理すると次の式が得られる．

$$\frac{\partial\bar{v}_1}{\partial t}=1+\frac{\partial}{\partial x_1}\left(f_{dvk}C_\nu\frac{k^2}{\varepsilon}\frac{\partial\bar{v}_1}{\partial x_2}\right)+\frac{1}{R}\frac{\partial^2\bar{v}_1}{\partial x_2^2} \tag{10}$$

$$\frac{\partial k}{\partial t}=C_\nu f_{dvk}\frac{k^2}{\varepsilon}\left(\frac{\partial\bar{v}_1}{\partial x_2}\right)^2-\varepsilon+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(C_{kk}f_{dvk}\frac{k^2}{\varepsilon}\frac{\partial k}{\partial x_2}\right)$$
$$+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(C_{k\varepsilon}f_{duk}\frac{k^3}{\varepsilon^2}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_2}\right)+\frac{1}{R}\frac{\partial^2k}{\partial x_2^2} \tag{11}$$

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}=c_\nu C_{\varepsilon1}k\left(\frac{\partial\bar{v}_1}{\partial x_2}\right)^2-C_{\varepsilon2}\frac{\varepsilon^2}{k}+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(C_{\varepsilon\varepsilon}\frac{k^2}{\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_2}\right)$$
$$+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(C_{\varepsilon k}k\frac{\partial k}{\partial x_2}\right)+\frac{1}{R}\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x_2^2} \tag{12}$$

なお，Rは

$$R=v^*D/\nu \tag{13}$$

と定義される．壁減衰関数を導入することにより，境界条件は滑り無しとする．すなわち壁上で

$$\bar{v}_1=k=0,\ \varepsilon=\frac{1}{R}\frac{\partial^2k}{\partial x_2^2} \tag{14}$$

となる．

C. 数値計算方法

差分方法は空間に関しては不当間隔[2),3)]，時間差分は*Crank-Nicolson*スキームを各時間ステップごと収束するまで繰り返し用いた．時間刻み幅は等間隔，空間に関しては$-1<x_2<+1$を，

$$x_2=tanh(Y)\quad(-3.5\le Y\le3.5\ for\ R=1400\ or\ R_e=32454;$$
$$-3.1\le Y\le3.1\ for\ R=600\ or\ R_e=12581;$$
$$-2.4\le Y\le2.4\ for\ R=200\ or\ R_e=3666)$$

のように表し，Yを等間隔に60分割して適用した．

4．結　　　果

図2－9に，R_e=32454，12581，3666（最大流速v_{1max}と壁間の半分の長さDに基づくレイノルズ数）の発達した乱流の数値解析結果と実験値を示す．なお，実験値はモデル定数を最適化するときに比較したR_e=12581に近い値のものを主に採用してある．

図3は乱流エネルギの分布を，図4－6は乱流強度の各成分を表している．図3（b）の壁近くのkの最大値が顕著な頂を示し，値も大きくなった点は，既存のモデルより改良されている．この改善は数値計算上も$k<0$の不安定性を回避するのに役立っている．図4－6の乱流強度の非等方性の再現は，通常の$k-\varepsilon$モデルでは不可能であり，図にもあるように三成分とも皆同一の値になってしまい，実験結果と矛盾する．これに比べ，非等方モデルによる今回の解析結果は，壁の近くを省いて実測値と良い一致を示している．壁の近くでいくらかバラツキが見られるもののMoin Kim[13]，堀内[14]のLESによる数値解析結果と同程度のもとなっている．

図9は渦粘性率の実測値との比較を表している．従来のモデルでは現せなかった，溝の中心部分の窪みをよく再現されており，数値的にも妥当である．この結果は竹

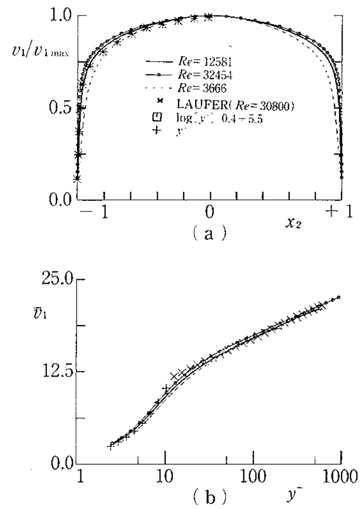


図2　平均流速

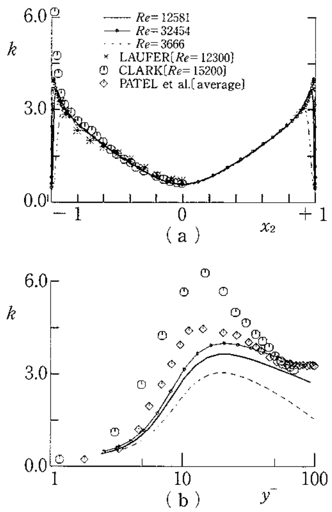


図3　乱流エネルギー

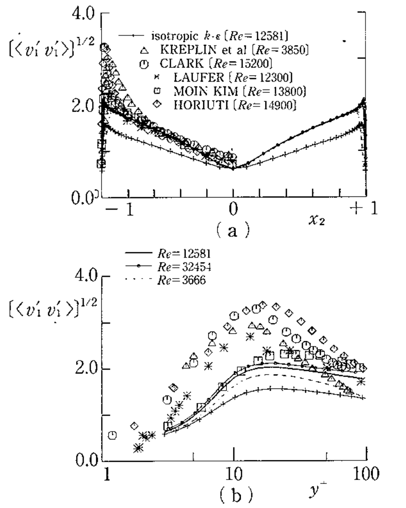


図4　乱流強度$\sqrt{\langle v_1'^2\rangle}$

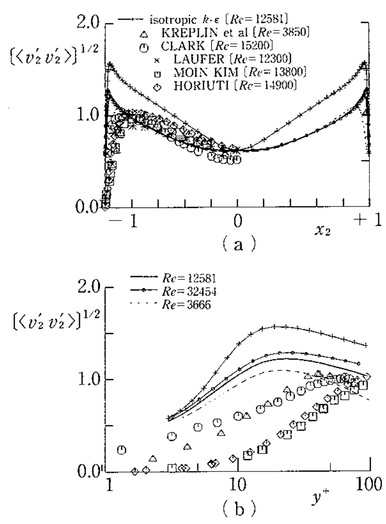


図5　乱流強度$\sqrt{\langle v_2'^2\rangle}$

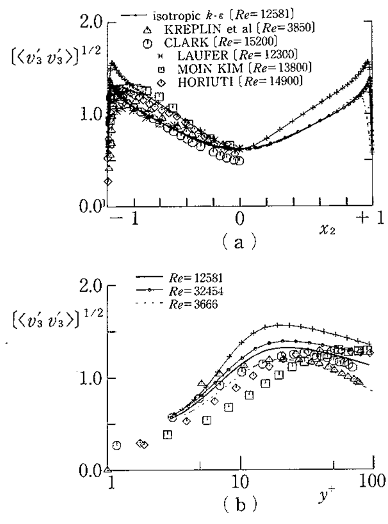


図6　乱流強度$\sqrt{\langle v_3'^2\rangle}$

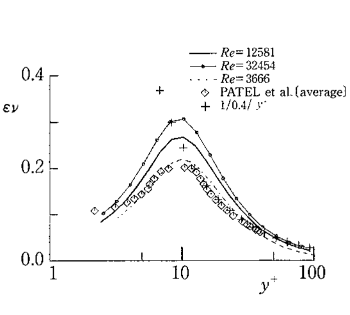
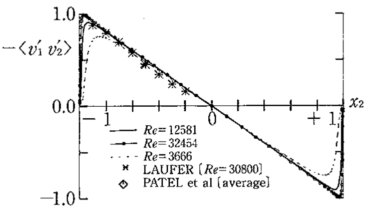


図7　エネルギー散逸率

研 究 速 報



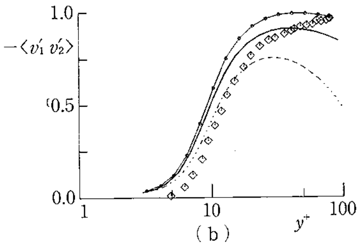


図8　レイノルズ応力

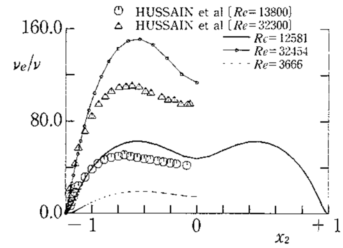


図9　渦粘性率

光の最近の研究[7),8)]の妥当性を支持している．

5．結　　　論

非等方k—εモデルは通常の等方k—εでは不可能な矩形管内乱流の非等方なレイノルズ応力分布や二次流等の再現が可能であることはすでに証明されている[3)]．今回の改良で結果がさらに改善され，かつ数値計算上の安定性も高くなった．また，壁上で滑り無し境界条件を課せられることも合わせ考えると，このモデルは従来のk—εモデルでは不十分であるとされている剝離を伴う乱流，あるいは，応力モデルでしか扱われてこなかった複雑な形状の乱流にも適用出来る可能性がある．これらへの適用は興味ある問題である．

謝　　　辞

この研究を進めるにあたり有益な御討論を頂いた吉澤徵，竹光信正，堀内潔の各博士に感謝いたします．さらに，数値計算にあたり計算機室員各位に多大な御援助をいただきましたことに対しても，合わせて感謝の意を表明いたします．　(1987年10月8日受理)

参 考 文 献

1) Yoshizawa, A: Statistical Analysis of the Deviation of Reynolds Stress from Its Eddy-Viscosity Representation, The Physics of Fluids. Vol. 27, 1984, p. 1377.

2) Nisizima, S. and Yoshizawa, A.: Turbulent Channel and Couette Flows Using an Anisotropic k—ε Model, AIAA Journal. Vol. 25, 1987, p. 414.

3) 西島勝一，吉澤徵：非等方k—εモデルによる矩形管内乱流の数値解析，ながれ．5 (1986) 147.

4) Yoshizawa, A.: Statistical Modeling of the ε Equation in the k—ε Model, The Physics of Fluids. Vol. 30, 1987, p. 628.

5) Yoshizawa, A.: A Statistically Derived System of Equations for Turbulent Shear Flows, The Physics of Fluids. Vol. 28, 1985, p. 59.

6) 竹光信正：k—εモデルの2次元平行平板間の流れの近似解，機論．494，(昭62-10)，B編

7) 竹光信正：改定k—εモデル，機論．494，(昭62-10)，B編

8) 竹光信正：改定k—εモデルII，機械学会論文講演前刷，第65期全国大会講演会 (1987—8) 論文NŌ 87-69 A.

9) Laufer, J.: Investigation of Turbulent Flow in a Two-Dimensional Channel, NACA Rept. 1053, 1951.

10) Clark, J.A.: A study of incompressible Turbulent Boundary Layers in Channel Flow, Transactions of the ASME (Journal of Basic Engineering). Vol. 90, 1968, p. 455.

11) Patel, V.C., Rodi, W., and Scheuerer, G.: Turbulence Models for Near-Wall and Low Reynolds Number Flows, A Review, AIAA Journal. Vol. 23, 1984, p. 1308.

12) Kreplin, H. and Eckelman, M.: Behavior of the Three Fluctuating Velocity Components in the wall Region of Turbulent Channel Flow, The physics of Fluids. Vol. 22, 1979, p. 1233.

13) Moin, P. and Kim, J.: Numerical Investigation of Turbulent Channel Flow, Journal of Fluid Mechanics. Vol. 118, 1982, p. 341.

14) Horiuti, K.: Comparison of Conservation and Rotational Forms in Large Eddy Simulation of Turbulent Channel Flow, Journal of Computational Physics. Vol. 71, 1987, p. 343.

15) Hussain, A.K.M.F. and Reynolds, W.C.: Measurements in Fully Developed Turbulent Channel flow, transactions of the ASME (Journal of Fluids Engineering). Vol. 97, 1975, p. 568.