

低磁気レイノルズ数MHD乱流の $K-\epsilon$ モデル

The $K-\epsilon$ Model of Magnetohydrodynamic Turbulent Flows at Low Magnetic Reynolds Number

下 村 裕*
Yutaka SHIMOMURA

1. は じ め に

導電性流体 (液体金属等) の流動を利用した電磁ポンプ、電磁流量計、MHD発電機などでは、磁場が流れ場に大きな影響を与える。このような系は、実用上重要な乱流領域で、高レイノルズ数、低磁気レイノルズ数のMHD流体として記述される。すなわち、流れ場は乱流状態、磁場は層流状態となっているのである。非導電性の通常の乱流では、レイノルズ応力と呼ばれる揺らぎの相関が重要な量であることが認識されており、これと平均速度場を結びつける渦粘性表現が知られている¹⁾。

本研究は、低磁気レイノルズ数MHD乱流のレイノルズ応力が、平均速度場や平均磁場でどのように表現されるかを統計理論を用いて調べたものである。また、得られた結果にもとづいて、磁場の効果を組み込んだ乱流の二方程式 ($K-\epsilon$) モデルを提案する。この理論的に導出されたモデルは、その最低次のレベルで従来経験的に用いられたモデル^{2),3)}と類似する。さらに直交磁場をかけられた弱導電性流体の平板乱流を実際にシミュレートし、その数値結果と実験との比較からモデルの有効性について議論する。

2. 基 礎 方 程 式

考える流体は非圧縮のMHD流体で、無次元化された以下の方程式を満足する。

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (u^\alpha u^\alpha - S b^\alpha b^\alpha) = -\frac{\partial p}{\partial x^\alpha} + \frac{1}{R_e} \frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial x^\alpha \partial x^\alpha}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial b^\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (u^\alpha b^\alpha - u^\alpha b^\alpha) = \frac{1}{R_m} \frac{\partial^2 b^\alpha}{\partial x^\alpha \partial x^\alpha}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial b^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0. \quad (3)$$

ここで u^α , b^α はそれぞれ無次元化された速度場、磁場の α 成分で、 p は

$$p \equiv p_t + \frac{S}{2} b^\alpha b^\alpha, \quad (4)$$

と定義され p_t は無次元化された圧力である。この方程式系 (1) - (3) には 3 個の独立なパラメーター、 R_e , R_m , S , が現れているが、それらは

$$R_e = \frac{1}{\nu} V_0 L_0, \quad R_m = \sigma \mu V_0 L_0, \quad S = \frac{1}{\rho \mu} \left(\frac{B_0}{V_0} \right)^2, \quad (5)$$

と定義され、それぞれレイノルズ数、磁気レイノルズ数、磁気圧力数と呼ばれる。ここで ν , ρ , μ , σ はそれぞれ一様と仮定された動粘性率、流体密度、透磁率、電導率で、 V_0 , B_0 , L_0 はそれぞれ速度場、磁場、長さスケールの代表値である。今回解析するパラメーターは、大きな R_e と小さな R_m の場合で (5) 式から弱導電性乱流に対応しているのがわかる。さらに二つのパラメーターを導入しよう。それらはハルトマン数 H_a と相互作用パラメーター N であって

$$H_a = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho \nu}} B_0 L_0, \quad N = \frac{\sigma}{\rho} \frac{B_0^2 L_0}{V_0}, \quad (6)$$

と定義するので次の関係式を満足する。

$$N = \frac{H_a^2}{R_e} = S R_m. \quad (7)$$

次に物理量をアンサンブル平均 $\langle \rangle$ の意味で平均部分と揺らぎの部分に分ける。

$$u^\alpha = U^\alpha + u'^\alpha, \quad p = P + p', \quad b^\alpha = B^\alpha + b'^\alpha, \quad (8)$$

$$U^\alpha = \langle u^\alpha \rangle, \quad P = \langle p \rangle, \quad B^\alpha = \langle b^\alpha \rangle.$$

同様にして平均場の方程式は (1) - (3) によって

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} U^\alpha &\equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + U^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right) U^\alpha \\ &= -\frac{\partial P}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (S B^\alpha B^\alpha + R_{uu}^{\alpha\alpha} - S R_{bb}^{\alpha\alpha} \\ &\quad + \frac{1}{R_e} \frac{\partial U^\alpha}{\partial x^\alpha}), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\frac{D}{Dt} B^\alpha \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + U^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right) B^\alpha$$

*東京大学生産技術研究所 第1部 (吉澤研)

研 究 速 報

$$= -\frac{\partial}{\partial x^\alpha} (B^\alpha U^\alpha + R_{ub}^{\alpha\alpha} - R_{ub}^{\alpha\alpha}) + \frac{1}{R_m} \frac{\partial B^\alpha}{\partial x^\alpha}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial U^\alpha}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial B^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0, \quad (11)$$

となる。ここでレイノルズ応力 $R_{uu}^{\alpha\beta}$ とさらに二つの応力 $R_{ub}^{\alpha\beta}$, $R_{bb}^{\alpha\beta}$ は

$$R_{uu}^{\alpha\beta} \equiv -\langle u'^\alpha u'^\beta \rangle, \quad R_{ub}^{\alpha\beta} \equiv -\langle u'^\alpha b'^\beta \rangle, \\ R_{bb}^{\alpha\beta} \equiv -\langle b'^\alpha b'^\beta \rangle, \quad (12)$$

と定義されているが、 $R_{ub}^{\alpha\beta}$ と $R_{bb}^{\alpha\beta}$ は磁気レイノルズ数が小さい場合無視できるといことが以下の解析でわかる。したがって通常の乱流と同様に、レイノルズ応力が、平均場で表現できれば支配方程式系(9), (10), (11)は閉じることになる。一方、揺らぎの場の支配方程式系も(9)-(11)式を(1)-(3)式から引き去ることによって得られるが、ここでは省略する。

3. 統計論的結果

平均場の支配方程式系(9)-(11)を閉じさせるために、速度場の揺らぎ相関であるレイノルズ応力 $R_{uu}^{\alpha\beta}$ を、速度場と磁場の揺らぎの支配方程式から統計論的に計算する。用いた解析方法は、吉澤¹⁴⁾が考案した2スケールDI近似(TSDIA)と呼ばれるものに、磁気レイノルズ数 R_m と相互作用パラメータ N の2重展開を結合したもので、以前著者が回転系乱流を解析した⁵⁾際の手法と本質的に同じものである。解析の詳細は省略するが、特徴的なことは磁場の揺らぎの R_m に関する最低次 $O(R_m^1)$ の項(電場の揺らぎの最低次 $O(R_m^0)$ の項)は、速度場の揺らぎに対して N の一次の効果を与えるということである。これは関係式(7)による結果である。

レイノルズ応力は最終的に次のように表現される。

$$R_{uu}^{\alpha\beta} = -\frac{2}{3} K \delta^{\alpha\beta} + \tau^{\alpha\beta} + N \tau_m^{\alpha\beta}. \quad (13)$$

ここで

$$\tau^{\alpha\beta} \equiv \nu_e e^{\alpha\beta}, \quad (14)$$

$$\tau_m^{\alpha\beta} \equiv \nu_m e^{\alpha\beta} - \frac{2}{5} a_2 (B^\alpha B^\beta - \frac{1}{3} B^\alpha B^\alpha \delta^{\alpha\beta}) \\ - \frac{13}{7} a_3 (B^\alpha B^\alpha e^{\alpha\beta} + B^\beta B^\alpha e^{\alpha\alpha} - \frac{2}{3} B^\alpha B^\beta \\ e^{\alpha\beta} \delta^{\alpha\beta}) - a_3 (B^\alpha B^\alpha \Omega^{\alpha\beta} + B^\beta B^\alpha \Omega^{\alpha\alpha}), \quad (15)$$

$$K \equiv a_1 - N (a_2 B^\alpha B^\alpha - a_3 B^\alpha B^\beta e^{\alpha\beta}), \quad (16)$$

$$\nu_e \equiv \frac{16\pi}{15} g_1, \quad \nu_m \equiv \frac{18}{7} a_3 B^\alpha B^\alpha, \quad (17)$$

$$e^{\alpha\beta} \equiv \frac{\partial U^\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial U^\beta}{\partial x^\alpha}, \quad \Omega^{\alpha\beta} \equiv \frac{\partial U^\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{\partial U^\beta}{\partial x^\alpha}, \quad (18)$$

であり、 $a_1 - a_3$ と g_1 は一様等方乱流の応答関数と揺らぎの相関によって表される量である。

(13)式の右辺第二項までが通常の渦粘性表現で、 K が乱流エネルギー、 ν_e が渦粘性である。磁場の影響は結合定数として N を持った項に現れている。すなわち(13)式右辺第三項と(16)式右辺第二項である。(15)式の右辺第一項は磁場による渦粘性を表しており、形式的には渦粘性が $\nu_e + \nu_m$ となる(この解析で ν_m は正の量であることが保証されている)。また $\tau_m^{\alpha\beta}$ の定義式(15)を見て気づくことは、平均磁場の空間微分がレイノルズ応力の表現(13)に現れないということである。これは平均速度場の場合と対照的である。

4. $K-\epsilon$ モデル

せん断乱流のシミュレーションにおいては、 $K-\epsilon$ モデルと呼ばれる二方程式のモデルが実用上よく用いられる。これはアンサンブル平均型のシミュレーションであり、自由度を大幅に減らしていることから、計算時間と計算容量の縮小化が期待される。ところがそのモデル方程式を見つけることは必ずしも容易でない。特に

$$\epsilon = \frac{1}{R_e} \langle \frac{\partial u'^\alpha}{\partial x^\beta} \frac{\partial u'^\alpha}{\partial x^\beta} \rangle, \quad (19)$$

で定義されるエネルギー散逸率 ϵ に対する方程式は不定要素が多い。しかし最近吉澤¹⁵⁾は、このTSDIAの枠組みの中で ϵ に対する方程式の主要部分を導く手法を見つけた。そこで本研究でもその方法を用いることによって、磁場の影響を組み込んだ ϵ の方程式を3.で得られた結果をもとに導く。一方、乱流エネルギー K に対する方程式は、比較的直接的な計算によって得られる。紙面の都合上詳細は省略するが、理論的に示唆される $K-\epsilon$ モデルを一般的な形で得ることができる。ここではこのモデルを単純な流れに適用した場合の方程式系を書き下すことにする。その単純な流れとは、直交磁場下のMHD平板流れで、 z 方向にかけられた一定磁場を $B_0 (= 1)$ として、主流 U 、主流方向の誘導磁場 B 、エネルギー K 、エネルギー散逸率 ϵ が z 方向にしか依存しないことに注意すると、以下のように方程式系が構成される。

$$\frac{\partial}{\partial t} U = -\frac{\partial (P + \frac{2}{3} K)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} (SBB_0 \\ + (\nu_e + \frac{1}{R_e}) \frac{\partial U}{\partial z}) + N \frac{\partial}{\partial z} (-\nu_e BB_0 \\ + f_K \frac{K^3}{\epsilon^2} (C_{KNA} B_0^2 - C_{KNB} B^2) \frac{\partial U}{\partial z}), \quad (20)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} B = \frac{\partial}{\partial z} (B_0 U) + \frac{1}{R_m} \frac{\partial^2 B}{\partial z^2}, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} K = & \nu_e \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial z} \left(\left(C_{KK} f_K \frac{K^2}{\varepsilon} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{R_e} \right) \frac{\partial K}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(C_{K\varepsilon} f_K \frac{K^3}{\varepsilon^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) \\ & - N \left(C_{KN_1} K (B^2 + B_0^2) + C_{KN_2} \nu_e B B_0 \frac{\partial U}{\partial z} \right. \\ & \left. - f_K \frac{K^3}{\varepsilon^2} (C_{KNA} B_0^2 - C_{KNB} B^2) \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right), \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon = & C_\nu C_{\varepsilon 1} K \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{K} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\left(C_{\varepsilon\varepsilon} \frac{K^2}{\varepsilon} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{R_e} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(C_{\varepsilon K} K \frac{\partial K}{\partial z} \right) - N \left(C_{\varepsilon N_1} \varepsilon \right. \\ & \left. \times (B^2 + B_0^2) + C_{\varepsilon N_2} K B B_0 \frac{\partial U}{\partial z} \right. \\ & \left. - \frac{K^2}{\varepsilon} (C_{\varepsilon NA} B_0^2 - C_{\varepsilon NB} B^2) \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right). \end{aligned} \quad (23)$$

ここで

$$\nu_e = f_K C_\nu \frac{K^2}{\varepsilon}, \quad f_K = 1 - \exp(-z^+/A), \quad A = 23, \quad (24)$$

$$\begin{aligned} C_\nu = & 0.09, \quad C_{KK} = 0.08, \quad C_{K\varepsilon} = -0.03, \\ C_{\varepsilon 1} = & 0.8, \quad C_{\varepsilon 2} = 1.9, \quad C_{\varepsilon\varepsilon} = 0.1, \quad C_{\varepsilon K} = -0.1, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} C_{KN_1} = & 0.67, \quad C_{KN_2} = 1.0, \quad C_{\varepsilon N_1} = 0.95, \\ C_{\varepsilon N_2} = & 0.16, \quad C_{KNA} = 0.04, \quad C_{KNB} = 0.011, \\ C_{\varepsilon NA} = & 0.25, \quad C_{\varepsilon NB} = 0.018 \end{aligned} \quad (26)$$

上式で注意したいのは、(24)式の壁関数 f_K と(25)式の定数群は通常の乱流でも必要とされる量で、竹光⁷⁾によって提案された改定 $K-\varepsilon$ モデルを西島⁸⁾が最適化した値を採用している。なお、(26)式における C_{KNA} と $C_{\varepsilon NA}$ の値は今回数値計算によって最適化したもので、理論的に計算された値はそれぞれ

$$C_{KNA} = 0.077, \quad C_{\varepsilon NA} = 0.13, \quad (27)$$

となっている。その他の値はすべて理論値を採用した。

経験的に得られた北村²⁾らのモデルは、

$$C_{KN_1} = 0.5, \quad C_{\varepsilon N_1} = 1.0, \quad (28)$$

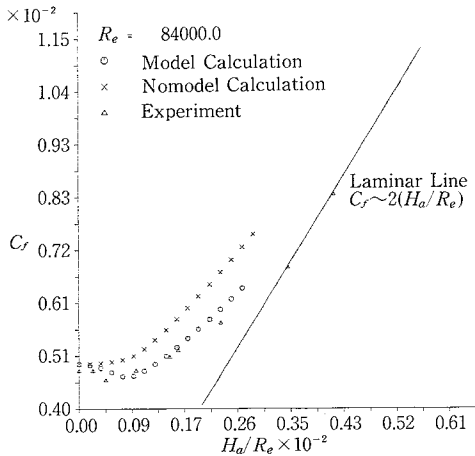


図1 壁面摩擦抵抗係数 C_f

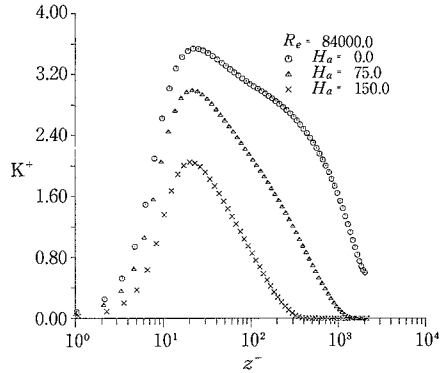


図3 エネルギー K^+ 分布

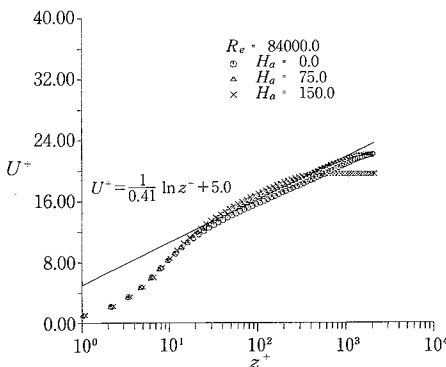


図2 主流 U^+ の対数法則

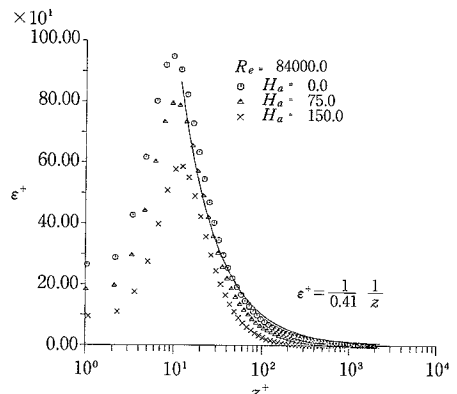


図4 エネルギー散逸率 ε^+ 分布

研 究 速 報

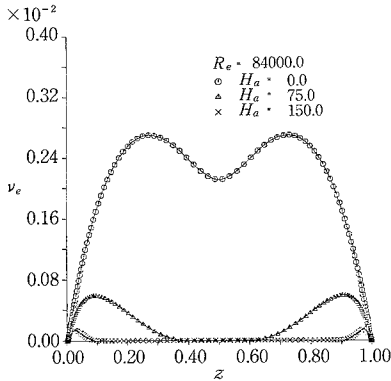


図 5 過粘性 ν_e 分布

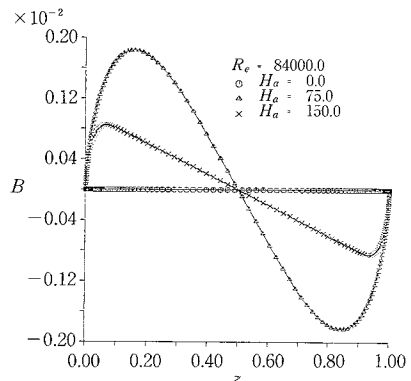


図 6 誘導磁場 B 分布

と選び、(20) - (23) 式の N を係数とするその他の項をすべて 0 と置いたものに対応している。

実際の数値計算は、 z 方向に 128 個の格子点を設けた差分計算で、壁での境界条件は

$$U = K = B = 0, B_0 = 1, \epsilon = \frac{1}{R_e} \frac{\partial^2 K}{\partial z^2}, \quad (29)$$

空間微分は中心差分

$$\left. \frac{\partial U}{\partial z} \right|_{z=z_k} = \frac{U_{k+1} - U_{k-1}}{z_{k+1} - z_{k-1}}, \quad (30)$$

によって近似した。また、誘導磁場 B はクランクニコルソン型の陰解法で、その他 U, K, ϵ はアダムスバッシュフォース型の陽解法で時間発展させた。なお、レイノルズ数と磁気レイノルズ数はチャンネルの全幅と、全流量に基づいた定義で

$$R_e = 84000, R_m = 0.1, \quad (31)$$

と選んだ。

5. 数値計算結果

図 1 は壁面摩擦抵抗係数 C_f を H_a/R_e に対してプロットしたもので、ここでいう Nomodel Calculation とは (20) - (23) 式の N を係数とする項をすべて落とした、つまり磁場の効果のモデル化がない場合の計算結果である。モデルを入れることによって実験結果⁹⁾ が良く再現されているのがわかる。

図 2 は主流の対数法則を示している。添え字の + は壁

速度で無次元化された量を表している。たとえば z^+ は壁座標である。磁場がかけられても、対数法則が成り立つ領域がかなりあるようである。

図 3, 4, 5 はそれぞれエネルギー、エネルギー散逸率、渦粘性の分布を示しているが、磁場が加えられることによってどれも減少していくようすがわかる。

図 6 は、 B_0 を単位とした誘導磁場の分布図である。

図 2 - 6 の物理量の実験値が待たれるところである。

6. ま と め

低磁気レイノルズ数の MHD 乱流に対するレイノルズ応力が求められ、それに基づいて提案された $K - \epsilon$ モデルは実験結果をよく説明する。(1987年10月9日受理)

参 考 文 献

- 1) A. Yoshizawa: Phys. Fluids 27 (1984) 1377.
- 2) K. Kitamura and M. Hirata: Proc. 6th IHTC 3 (1978) 159.
- 3) 日夏宗彦: 生研NSTシンポジウム講演論文集 2 (1987) 85.
- 4) A. Yoshizawa: Phys. Fluids 28 (1985) 59.
- 5) Y. Shimomura and A. Yoshizawa: J. Phys. Soc. Jpn. 55 (1986) 1904.
- 6) A. Yoshizawa: Phys. Fluids 30 (1987) 628.
- 7) 竹光信正: 機論印刷中 53 (1987).
- 8) 西島勝一: 機論印刷中 53 (1987).
- 9) E. C. Brouillette and P. S. Lykoudis: Phys. Fluids 10 (1967) 995.