

乱流混合層のLESによる $k-\epsilon$ モデルの定数の評価

Estimate of Constants in the $k-\epsilon$ Model by an LES of Turbulent Mixing Layer

半場 藤 弘*

Fujihiro HAMBA

1. はじめに

$k-\epsilon$ モデルを用いて乱流場の数値計算を行うには、それに含まれるモデル定数の値を選ぶ必要がある。今までの研究から得られた標準的な値^{1,2)}が知られているが、流れ場の種類によっては必ずしも最適でなく、平均速度や乱流エネルギーなどの計算結果を実験と比較しながら値の調整が行われる。また、実験のデータを使って定数を直接評価することも可能である。たとえば、後述の(3)式に含まれているすべての統計量がわかれば定数 C_i が求められる。しかしエネルギー散逸率や圧力速度相関などは精度よく測定することがむずかしい。そこで、実験値の代わりにナビエ・ストークス方程式の直接数値計算や Large Eddy Simulation (LES) の 3次元データを用いる方法が考えられる。特にLESは、それ自身モデルを

含んでいるという欠点を持つが、高レイノルズ数の計算ができるという利点がある。本報では、乱流混合層のLES^{3,4)}の計算結果を用いて定数の評価を行う。

2. 乱流混合層のLES

計算対象は図1に示す領域で、主流 (x) 方向とスパン (z) 方向に周期境界条件を課し、時間とともに発達する混合層として扱った。 $x-z$ 平面で平均をとるので統計量は y 座標のみの関数になる。図2は平均速度分布である。より信頼できる統計量を得るため、さらに11のアンサンブルについて平均をとった。すなわち初期の乱れ速度を作る乱数を変えて11の異なる初期値を作り、それぞれ同じ時間の計算を行った。数値計算の詳細については前報³⁾および文献4を参照されたい。

3. $k-\epsilon$ モデルの基礎方程式

速度と圧力(密度で割ったもの)の平均部分と擾乱部分をそれぞれ (U_i, P) と (u'_i, p') で表すと、平均速度の方程式は、

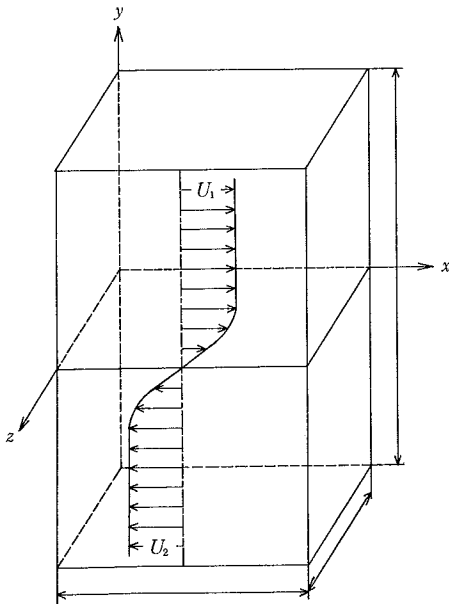


図1 乱流混合層の座標系

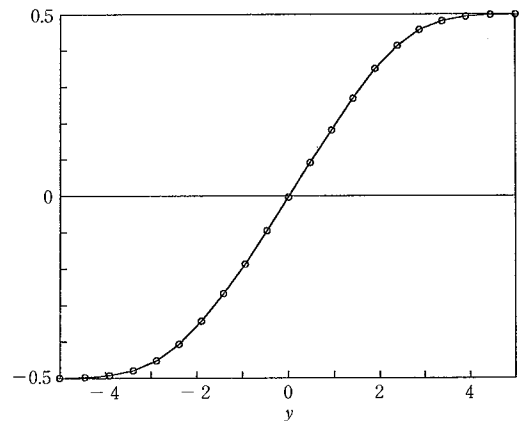


図2 平均速度分布

*東京大学生産技術研究所 第1部 (吉澤研)

研 究 速 報

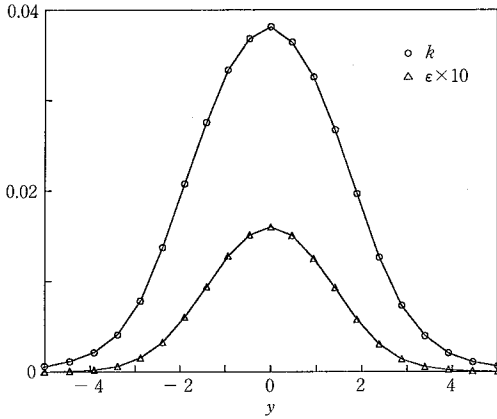


図 3 乱流エネルギーとその散逸率の分布

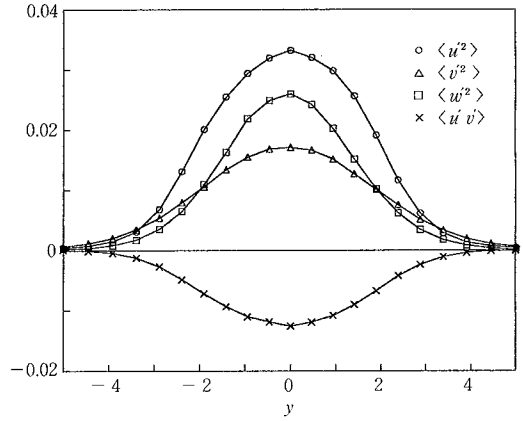


図 4 レイノルズ応力の分布

$$\frac{DU_i}{Dt} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) U_i$$

$$= -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(-\langle u'_i u'_j \rangle + \nu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_j} = 0, \quad (2)$$

で与えられる。νは動粘性率、⟨ ⟩はアンサンブル平均を表す。また、i, j = 1, 2, 3はそれぞれx, y, z方向に対応し、くりかえし記号は1~3の和をとることとする。レイノルズ応力は乱流エネルギーk(=⟨u'²⟩/2)とエネルギー散逸率ε(=ν⟨∂u'_i/∂x_j⟩^2)を用いて、

$$-\langle u'_i u'_j \rangle = -\frac{2}{3} k \delta_{ij} + C_\nu \frac{k^2}{\varepsilon} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right), \quad (3)$$

とモデル化されている。ただしδ_{ij}はクロネッカーのデルタ、C_νはモデル定数である。

kとεの輸送方程式は次のように表される。

$$\frac{Dk}{Dt} = -\langle u'_i u'_j \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(-\frac{1}{2} \langle u_i'^2 u'_j \rangle - \langle p' u'_j \rangle + \nu \frac{\partial k}{\partial x_j} \right), \quad (4)$$

$$-\frac{1}{2} \langle u_i'^2 u'_j \rangle - \langle p' u'_j \rangle = C_k \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial k}{\partial x_j}, \quad (5)$$

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = -C_\varepsilon \frac{\varepsilon}{k} \langle u'_i u'_j \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - C'_\varepsilon \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(C_\varepsilon \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right), \quad (6)$$

(4)式はkに対する厳密な表式であり、生産項(右辺第1項)に含まれるレイノルズ応力、拡散項(右辺第3項)に含まれる三体速度相関と圧力速度相関がそれぞれ(3)、(5)式によってモデル化されている。一方、εに対する厳密な式も書き下せるが、複雑であり、(6)式と直接には

対応していない。(6)式のモデル化はkに対する(4)、(5)式からの類推と次元解析により行われている。つまり、右辺全体が一度にモデル化されているわけである(最近、εの方程式を統計理論を用いて導く試みもなされている^{5,6)}。

4. モデル定数の評価

LESで得られるデータは速度や圧力そのもの(u_i, p)ではなくフィルター平均の量(ū_i, p̄)なので、それらを用いて乱流エネルギーとその散逸率を次のように近似する。

$$k = \langle \bar{u}_i'^2 \rangle / 2, \quad (7)$$

$$\varepsilon = \langle \nu_G \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \rangle, \quad (8)$$

ただし

$$\nu_G = (C_S \Delta)^2 \left\{ \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (9)$$

C_SはLESモデルの定数、Δはフィルターの幅である。その他の統計量(レイノルズ応力や三体速度相関など)もフィルター平均の量を用いて評価する。(u'_i → ū_i)

4.1 レイノルズ剪断応力

今回扱った乱流混合層は平均流がx成分のみであり、統計量がyにしかよらないことから、レイノルズ剪断応

表1 レイノルズ剪断応力のモデル式の定数

	C _{ν1}	C _{ν2}
Case 1.1	0.069	—
Case 1.2	0.072	0.00071
標準k-ε ¹⁾	0.09	—
理論 ^{5),7)}	0.079	0.0041
チャンネル実験 ⁸⁾	0.087 ± 0.02	—

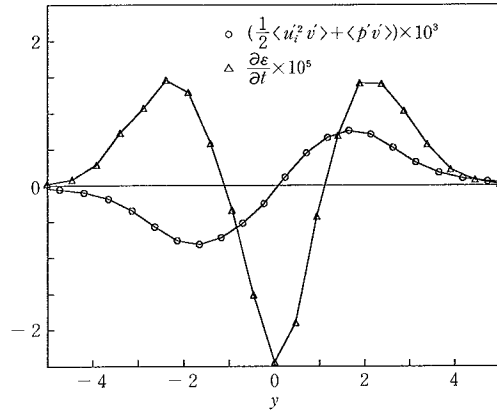


図5 三体速度相関と圧力速度相関の和, およびエネルギー散逸率の時間微分の分布

力は次のようにモデル化される。

$$-\langle u'v' \rangle = C_{v1} \frac{k^2}{\epsilon} \frac{\partial U}{\partial y} + C_{v2} \frac{k^5}{\epsilon^3} \frac{\partial^3 U}{\partial y^3}, \quad (10)$$

右辺第1項は(3)式の渦粘性表現であり, 第2項はそれからのずれを表す高次の項である⁷⁾。kとεの分布を図3に, <u'v'>の分布を図4に示す。-4 ≤ y ≤ 4の17点の値を使い, (10)式に最小二乗法を適用して, モデル定数C_{v1}とC_{v2}を求めた。表1のCase 1. 1は(10)式の右辺第1項だけを考えた場合, Case 1. 2は第2項も含めた場合の結果である。比較のため, 標準k-εモデルの値¹⁾, 統計理論から導かれた値^{5,7)}, チャンネル流の実験値から求めた値⁹⁾も示す。

表1から, LESで求めたC_{v1}の値は標準値や実験値に比べてやや小さいことがわかる。C_{v2}は理論値と同様に, 小さい正の値であり, これはなめらかな壁と粗い壁にはさまれた非対称チャンネル流の実験で, ∂U/∂y = 0の点と<u'v'> = 0の点がずれることに対応している⁷⁾。しかしC_{v2}はC_{v1}よりずっと小さく, Case 1. 1とCase 1. 2でC_{v1}の値がそれほど変化しないことから, 実際の数値計算で第2項を組み入れる必要はあまりないと思われる。

4.2 三体速度相関と圧力速度相関

kの輸送方程式の拡散項に含まれる2つの相関の和(図5)は

表2 三体速度相関と圧力速度相関のモデル式の定数

	C _{k1}	C _{k2}
Case 2.1	-0.15	-
Case 2.2	-0.34	0.12
標準k-ε ¹⁾	-0.09	-
チャンネルk-ε ⁹⁾	-0.08	0.03
理論 ⁵⁾	-1.3	0.72

表3 乱流エネルギー成分のモデル式の定数

	C _{τ1}	C _{τ2}	C _{τ3}	C _{τ4}	C _{τ5}
Case 3.1	0.012	-0.0066	-	-	-
Case 3.2	0.012	-0.0082	-0.14	0.18	-0.055
チャンネルk-ε ⁹⁾	0.057	-0.0067	-	-	-

表4 ε方程式の定数 (C_{ε2}=1.9)

	C _{ε1}	C _{ε3}	C _{ε4}	C _{ε5}	C _{ε6}	C _{ε7}
Case 4.1	0.085	0.033	-	-	-	-
Case 4.2	0.085	0.0051	0.045	-	-	-
Case 4.3	0.074	0.013	-	8.5	-11	3.6
Case 4.4	0.080	0.0023	0.036	8.7	-11	3.8
標準k-ε ¹⁾	0.13	0.069	-	-	-	-
チャンネルk-ε ⁹⁾	0.072	0.1	-0.1	-	-	-
理論 ⁵⁾	0.13	-1.2	2.2	4.3	-5.8	2.4

$$\frac{1}{2} \langle u_i^2 v' \rangle + \langle p'v' \rangle$$

$$= C_{k1} \frac{k^2}{\epsilon} \frac{\partial k}{\partial y} + C_{k2} \frac{k^3}{\epsilon^2} \frac{\partial \epsilon}{\partial y}, \quad (11)$$

とモデル化される。右辺第1項は通常の拡散項, 第2項はεの勾配がkのフラックスを作ることを意味するクロス拡散項である。最小二乗法の結果を, 標準値¹⁾, 理論値⁵⁾, およびチャンネル流に適用されたk-εモデルでの値⁹⁾とともに表2に示す。|C_{k1}|, |C_{k2}|ともに標準値より大きい。しかしC_{k1}とC_{k2}の比はチャンネル流のk-εモデルの値と理論値に近いことがわかる。最近, 竹光⁸⁾によってC_{k1} ~ -2 C_{k2}であることと, クロス拡散項をとり入れた改定k-εモデルはチャンネル流の渦粘性の分布を正しく表現できることが示された。

4.3 乱流エネルギーの非等方性

乱流エネルギーの各成分(図4)は次のようにモデル化できる。

$$\begin{pmatrix} \langle u'^2 \rangle \\ \langle v'^2 \rangle \\ \langle w'^2 \rangle \end{pmatrix} = \frac{2}{3} k + \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} C_{\tau1} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} C_{\tau2} \right\} \\ \times \frac{1}{3} \frac{k^3}{\epsilon^2} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \left\{ C_{\tau3} \frac{k^2}{\epsilon^2} \left(\frac{\partial k}{\partial y} \right)^2 \right. \\ \left. + C_{\tau4} \frac{k^3}{\epsilon^3} \frac{\partial k}{\partial y} \frac{\partial \epsilon}{\partial y} + C_{\tau5} \frac{k^4}{\epsilon^4} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right)^2 \right\} \quad (12)$$

標準k-εモデルは右辺第1項しか含まず, 非等方性を表すことができない。C_{τ1}とC_{τ2}の項は統計理論⁷⁾によって導出され, チャンネル流の非等方性を再現することがわ

研究速報

かっている¹⁰⁾。C_{e3}~C_{e5}の項は次元解析によりさらにつけ加えられた項である。

表3のCase 3. 1ではC_{e2}はチャンネル流の値とほぼ等しいがC_{e1}は小さい。これはチャンネル流と混合層の非等方性のちがいのためと考えられる。1組のモデル定数で種々の流れ場を記述できることが望ましいので、1つの試みとしてC_{e3}~C_{e5}の項を導入したのがCase 3. 2である。チャンネル流とのくわしい比較は今後の課題である。

4.4 εの輸送方程式

εのモデル方程式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon}{\partial t} = & C_{e1} k \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - C_{e2} \frac{\epsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial y} \left(C_{e3} \frac{k^2 \partial \epsilon}{\epsilon \partial y} \right. \\ & + C_{e4} k \frac{\partial k}{\partial y} \left. \right) + C_{e5} \left(\frac{\partial k}{\partial y} \right)^2 + C_{e6} \frac{k}{\epsilon} \frac{\partial k}{\partial y} \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \\ & + C_{e7} \frac{k^2}{\epsilon^2} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right)^2, \end{aligned} \quad (13)$$

と書き表せる。時間とともに発達する混合層なので移流項の代わりに∂ε/∂t(図5)が左辺に残る。また、標準k-εモデルはC_{e1}~C_{e3}を含む項までであり、C_{e4}~C_{e7}を含む項は統計理論⁵⁾により提案された。C_{e4}の項はクロス拡散項、C_{e5}~C_{e7}の項は生産項あるいは散逸項に分類される。新しく提案された項がどの程度必要かははっきりしていない。しかし前述のように、おのおのの項がモデル化されるk方程式と異なり、ε方程式は右辺全体がモデル化されるので表式の自由度が多く残されている。最小二乗法の結果を表4に示す。ただしC_{e2}は格子乱流の実験値1.9に固定した。

すべてのCaseで生産項のC_{e1}の値が標準値より小さくチャンネル流の値に近い。拡散項のC_{e3}も標準値より小さく、Caseによってばらつきがある。これは新しく項を追加することにより別の項の定数も影響を受けることを意味する。また、k方程式((11)式)の場合と異なり、クロス拡散項のC_{e4}が通常の拡散項のC_{e3}と同じ符号である。

C_{e5}~C_{e7}の値は他の定数に比べて非常に大きい。そこで(13)式の3つの項の値を調べると、それぞれの値は大きい³⁾が、打ち消し合って、3項の和は他の項(たとえばC_{e1}の項)と同程度の大きさになっている。これは図3に見られるようにkとεが似た分布をするという乱流混合層の特殊性によると考えられる。信頼できる定数値を求めるには、kとεの分布の特徴が異なる他の流れ場での評価が必要である。

5. おわりに

乱流混合層のデータを用いてk-εモデルの定数値を評価し、この方法が実際のk-εモデルの数値計算での定数最適化の目安となり、モデルの改良にも有用であることを示した。しかしε方程式のように定数の数が増えると最小二乗法の誤差が大きくなるので、より正確なLESの計算が望まれる。また、今回の評価は乱流混合層のデータにもとづくものであり、さらにさまざまな流れ場のLESに適用して、応用範囲の広いモデル式と定数値をさがすことが必要である(チャンネル流への適用例は文献11を参照されたい)。(1987年10月8日受理)

参考文献

- 1) P. Bradshaw, T. Cebeci, and J.H. Whitelaw: Engineering Calculation Methods for Turbulent Flow (Academic, New York, 1981)
- 2) B.E. Launder and D.B. Spalding : Mathematical Models of Turbulence (Academic, London, 1972)
- 3) 半場, 吉澤 : 生産研究, 38 (1986) 588
- 4) F. Hamba: J. Phys. Soc. Jpn.56 (1987) 2721
- 5) A. Yoshizawa: Phys. Fluids 30 (1987) 628
- 6) F. Hamba: J. Phys. Soc. Jpn. 56 (1987) 3771
- 7) A. Yoshizawa: Phys. Fluids 27 (1984) 1377
- 8) 竹光 : 機論 (1987), submitted to J. Fluid. Eng.
- 9) 西島 : 機論 (1987), submitted to AIAA J.
- 10) S. Nisizima and A. Yoshizawa: AIAA J. 25 (1987) 414
- 11) 堀内 : 生産研究, 40 (1988)