

# 単層スペースフレームの構造挙動 (その1)

## ——単層ドームの座屈荷重評価式——

Structural Behaviours of Single-Layer Space Frames (Part 1)

——Formulae for Buckling Loads of Single-Layer Domes——

半 谷 裕 彦\*

Yasuhiko HANGAI

### 1. は じ め に

部材を立体的に構成するスペースフレーム (立体骨組構造) は“軽量化”と“強度”の両面よりすぐれた構造システムで、多目的ホール、スポーツ施設等の公共施設、工場、タンク、温室等の生産施設、などにおいて多用されている。スペースフレームは、部材配置上、単層および複層に大別される。スペースフレームでスパンの増大をはかろうとする場合、部材応力の低減や座屈荷重の増大のためには曲げ剛性の確保が重要であり、そのため、通常では2層の部材配置としている。しかし、2層の場合には部材配置や接合部が複雑になり、また、部材の種類も多くなることから、ある程度のスパンの大きさまでは単層のスペースフレームを採用したほうが有利となる場合も多い。

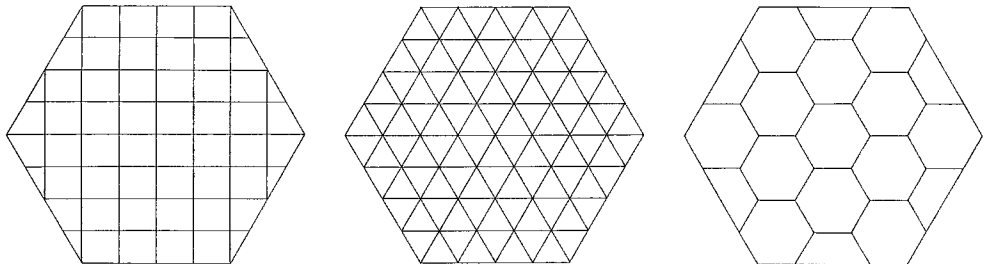
スパンの増大や曲げ剛性の低下によって、座屈挙動および振動性状が重要な設計要因となっている。一方、スペースフレームの構造特性を支配する項目としては、(1)形態、(2)規模、(3)境界、(4)部材構成、(5)部材(形状と材料)、(6)接合部、があげられる。本研究では、単層スペースフレームについて、(1)~(6)の諸項目が座屈および振動挙動にどのように影響するかを調べることを目的としている。

単層スペースフレームの座屈には、(a)部材座屈、(b)局部座屈、(c)全体座屈、があり、これらの特徴は文献<sup>1,2)</sup>で詳細に述べられている。本論文では、単層ドームに対して座屈荷重を定式化する。本論文で扱う単層ドームは、形態としては接合部が球面上に位置するドーム形状で、接合部は剛接合とする。

スペースフレームの持つ最も顕著な性質として、繰返しパターンによる規則的な部材構成がある。図-1に3種類の具体例を示す。この性質を利用した解析法として、有効剛性を利用した連続体置換法<sup>3,4)</sup>があり、スペースフレームの座屈荷重を評価する有効な方法ともなっている<sup>5,6)</sup>。そこで、本論文(その1)では、文献<sup>3)~6)</sup>を利用することにより、座屈荷重とドームの半径(R)、部材長( $l$ )、部材の断面積(A)、断面2次モーメント(I)、ヤング率(E)との関係を定式化する。

### 2. 有 効 剛 性

連続体置換法を用いる場合にはスペースフレームの部材配列(格子パターン)に応じた有効剛性が必要である。規則的な部材配列により直交異方性として評価されるとすると、合応力・ひずみ関係式および合モーメント・曲率変化関係式は次式となる。



(a) 直交2方向型格子

(b) 3方向型格子

(c) 正六角形型格子

図-1 格子パターン

\*東京大学生産技術研究所 第5部

研 究 速 報

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 \\ K_{21} & K_{22} & 0 \\ 0 & 0 & K_{33} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \tau \end{Bmatrix} \quad (2)$$

上式において係数マトリクスは対称であり、さらに、等方向の場合には次式が成立する。

$$K_{11} = K_{22} = K_{12} + 3K_{33}, \quad D_{11} = D_{22} = D_{12} + 2D_{33} \quad (3)$$

連続体シェルの場合には伸び剛性と曲げ剛性の間には定まった関係が存在するが、スペースフレームの場合には一般に独立となる。それに応じて、有効ポアソン比は次式で定義される。

$$\nu_m = \frac{K_{12}}{K_{11}}, \quad \nu_b = \frac{D_{12}}{D_{11}} \quad (4)$$

種々の格子パターンに対する有効剛性は日置<sup>9)</sup>により誘導され、整理されている。特に、Makowski<sup>7)</sup>は直交2方向型格子の有効剛性を導き、平板状2層立体トラス構

表-1 有効剛性

格子パターン剛性	直交2方向型格子	3方向型格子	定六角形型格子
伸び剛性	$K_{11}$	$\frac{EA}{l}$	$\frac{3\sqrt{3}EA}{4l}$
	$K_{22}$	$\frac{EA}{l}$	$\frac{3\sqrt{3}EA}{4l}$
	$K_{12}$	0	$\frac{\sqrt{3}EA}{4l}$
	$K_{21}$	0	$\frac{\sqrt{3}EA}{4l}$
曲げ剛性	$K_{33}$	$\frac{6EI}{l^3}$	$\frac{4\sqrt{3}EI}{l^3} \cdot \frac{1}{\Psi_2}$
	$D_{11}$	$\frac{EI}{l}$	$\frac{3\sqrt{3}EI + \sqrt{3}GJ}{4l + 4l} \cdot \Psi_4$
	$D_{22}$	$\frac{EI}{l}$	$\frac{3\sqrt{3}EI + \sqrt{3}GJ}{4l + 4l} \cdot \Psi_4$
ポアソン比	$D_{12}$	0	$\frac{\sqrt{3}EI - \sqrt{3}GJ}{12l} \cdot \Psi_4$
	$D_{21}$	0	$\frac{\sqrt{3}EI - \sqrt{3}GJ}{12l} \cdot \Psi_4$
	$D_{33}$	$\frac{GJ}{2l}$	$\frac{\sqrt{3}EI + \sqrt{3}GJ}{12l + 4l} \cdot \Psi_4$
ポアソン比	$\nu_m$	0	$\frac{\Psi_3}{\Psi_1}$
	$\nu_b$	0	$\frac{EI - 3GJ\Psi_4}{3EI + 3GJ\Psi_4}$

$$\nu_m = \frac{K_{12}}{K_{11}} \quad \Psi_1 = 1 + \frac{36I}{l^2 A} \quad \Psi_3 = 1 - \frac{12I}{l^2 A}$$

$$\nu_b = \frac{D_{12}}{D_{11}} \quad \Psi_2 = 1 + \frac{12I}{l^2 A} \quad \Psi_4 = \frac{1}{1 + \frac{2GJ}{9EI}}$$

造の応力および変位性状を詳細に調べている。また、Wright<sup>8)</sup>はブカレスドームの被害調査のため、3方向型格子の有効剛性を導き、利用している。正六角型格子に対しては、接合部をピン接合とした場合の伸び剛性が日置<sup>9)</sup>により誘導され、剛接合された場合の伸びおよび曲げ剛性は原田<sup>10)</sup>により導かれている。以上をまとめると表-1となる。

以上の結果より、次式の関係が得られる。

$$K_{11} \propto \frac{EA}{l}, \quad D_{11} \propto \frac{EI}{l} \quad (5)$$

3. 全 体 座 屈

最初に、全体座屈に対する関係式を誘導する。全体座屈は連続体シェルに生じる座屈と同一の現象である。そのため、理論的扱いは連続体シェルと同一方法で行うことが可能である。しかし、スペースフレームを連続体に置換した場合、伸び剛性、曲げ剛性、ポアソン比等の間の関係は通常の連続体シェルの関係とは異なっており、その相異が座屈性状に影響する。

一様分布荷重qを受ける偏球形シェル(固定境界)を考える。del Pozo F. and del Pozo V.<sup>9)</sup>はリブ付きシェルの座屈荷重として次式を提案している。

$$q_{cf} = 0.228 \frac{E\alpha^{1.5}}{(1-\nu_m^2)^{0.7}} \left(\frac{t_m}{R}\right)^2 \quad (6)$$

ここに、 $q_{cf}$ : 全体座屈に対する座屈荷重、 $\alpha = t_b/t_m$ 、 $t_b$ : 曲げ剛性に対する有効厚さ、 $t_m$ : 伸び剛性に対する有効厚さ、である。 $t_m$ 、 $t_b$ は $K_{11}$ 、 $D_{11}$ より次式で得られる。

$$K_{11} = \frac{Et_m}{1-\nu_m^2}, \quad D_{11} = \frac{E(t_b)^3}{12(1-\nu_b^2)} \quad (7)$$

上式に(5)式の関係代入すると、

$$t_m \propto \frac{EA}{l}, \quad t_b \propto \left(\frac{EI}{l}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (8)$$

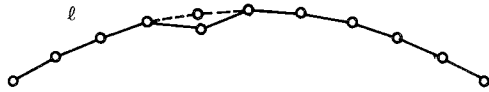
上式を(6)式へ代入することより全体座屈に対する座屈荷重評価式は次式となる。

$$q_G = C_G \frac{E\sqrt{AI}}{R^2 l} \quad (9)$$

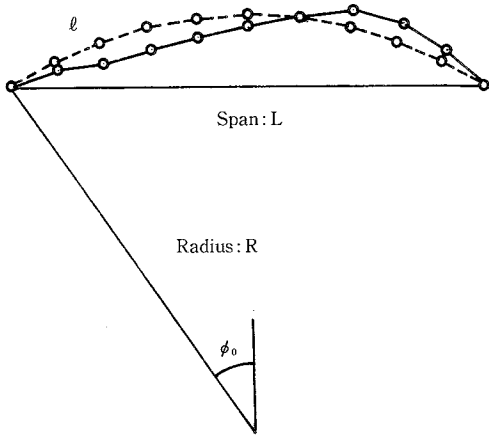
ここに、 $C_G$ は格子パターン、境界条件、荷重モード、初期不整、等に依存する係数である。その扱いについては(その2)以降で述べる。

4. 局 部 座 屈

局部座屈はスペースフレームに固有の座屈で、節点座屈とも呼ばれ、1個の節点に生じる飛移座屈を意味する(図-2)。飛移座屈は非線形性の強い現象であり、座屈前の非線形解析が不可欠である。図-3に示す3ヒンジトラス構造の荷重・変位関係式は次式となる。



(a) 局部座屈



(b) 全体形状と全体座屈

図-2 局部座屈と全体座屈

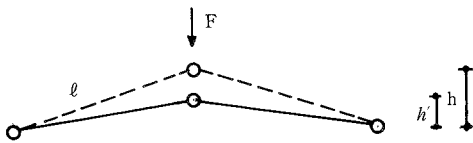


図-3 3 ヒンジトラス構造

$$F = \frac{AEh^1}{l^3} \{ h^2 - (h^1)^2 \} \tag{10}$$

この式により飛移座屈荷重は

$$F_{cr} = \frac{2}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{AEh^3}{l^3} \tag{11}$$

A, B 点は半径 R の球面上にあることから  $h \cong l^2/2R$ .  
次に, 単位面積当たりの荷重 q を集中荷重 F に置換する.  
節点ごとの支配面積を考えることにより, 図-1 の 3 種類  
の格子パターンに対して, それぞれ  $F = l^2q, \sqrt{3}l^2q/2, 3\sqrt{3}l^2/4$  となる. つまり,  $F \propto l^2q$ . この関係を (11)  
式に代入することにより局部座屈に対する座屈荷重評価  
式は次式となる.

$$q_L = C_L \frac{EA \ell}{R^3} \tag{12}$$

### 5. 部 材 座 屈

一様分布荷重を受ける球形シェルの面内力は

$$N_x = N_y = -\frac{qR}{2} \quad (\equiv N) \tag{13}$$

偏平球形シェルが一様分布荷重を受ける場合の幾何学的  
非線形解析<sup>10)</sup>による座屈直前の面内力の最大値は, (13)  
式と比較して  $N_x |_{max} = 1.23N_x, N_y |_{max} = 1.16N_y$  (y :  
母線方向) となっている. 本研究においては, これらの  
値は係数を決定する時点で考慮することにし, ここでは,  
座屈前の面内応力状態として (13) 式を採用することにす  
る.

面内力  $N_x, N_y$  を受ける場合の部材軸力を各格子パ  
ターンに対して求めると (a) 直交 2 方向型格子 :  $P_1 =$   
 $P_2 = \ell N$ , (b) 3 方向型格子 :  $P_1 = P_2 = P_3 = \ell N / \sqrt{3}$ ,  
(c) 正六角形型格子 :  $P_1 = P_2 = P_3 = \sqrt{3} \ell N$  となる. 一  
般に, 軸力を P とすると

$$P \propto \ell N \tag{14}$$

部材の座屈は Euler 座屈荷重で生じるとすると

$$P_{cr} \propto \frac{EI}{\ell^2} \tag{15}$$

(13)~(15) 式の関係を用いると, 部材座屈に対する座屈  
荷重評価式は次式となる.

$$q_E = C_E \frac{EI}{R \ell^3} \tag{16}$$

### 6. 格子密度と座屈荷重

座屈荷重の性質のひとつとして, 格子密度 m (図-2 に  
おいて  $m \ell = 2R \phi_0$ ,  $\phi_0$  : 半開角, で定義する) と座屈荷  
重との関係を調べてみる. R,  $\phi_0$ , E, A を固定し, m  
をパラメータとする. (9), (12), (16) 式より  $\ell$  を消去  
すると

$$q_E \propto m, q_L \propto \frac{1}{m}, q_E \propto m^3 \tag{17}$$

つまり, 全体形状を決定した後, 部材構成の粗密によっ  
て, 3 種類の座屈荷重は上式のように変化する. 全体座  
屈および部材座屈は密にすることにより座屈荷重は増加  
し, 一方, 局部座屈においては部材構成を密にすると座  
屈荷重は低下する.

なお, 3 種類の座屈荷重の間には, (17) 式より次式の  
関係が成立している.

$$q_E^2 \propto q_L q_E \tag{18}$$

### 7. む す び

本論文では, 単層スペースフレームに生じる 3 種類の  
座屈に対して, 座屈荷重評価式を定式化した. しかし,

## 研 究 速 報

実際の設計に適用するためには、係数 $C_G$ ,  $C_L$ ,  $C_E$ の評価が必要である。これらの係数に影響する要因としては、格子パターン ( $\rho_1$ ), 境界条件 ( $\rho_2$ ), 荷重モード ( $\rho_3$ ), 部材性状 ( $\rho_4$ ), 接合部の性状 ( $\rho_5$ ), 初期不整 ( $\rho_6$ ), 等がある。さらに、本論文の定式化においては、連続体置換法を利用しているが、スペースフレーム (離散システム) を連続体シェルとの構造挙動の差を明らかにすることも重要な課題である。

## 謝 辞

東京大学名誉教授 坪井善勝博士ならびに日本建築学会シェル・空間構造運営委員会における「ラチスドームの安定解析作業委員会 (主査 日置興一郎)」の諸先生方の御指導および討論に深く感謝する。

(1987年9月21日受理)

## 参 考 文 献

- 1) 日置興一郎 (研究代表者): スペースフレーム (立体格子構造) の設計・解析・施工, 昭和57年度文部省科学研究費補助金, 総合研究(B), 研究報告書, 1983. 3.
- 2) IASS Working Group on Spatial Steel Structures (Y. Tsuboi, Chairman): Analysis, Design and Realization of Space Frames, IASS Bulletin, Vol. XXV-1/2, n. 84/85, 1984.
- 3) Wright, D.T.: Membrane Forces and Buckling in

Reticulated Shells, Journal of Structural Division, ASCE, Vol. 91, No. ST1, 1965, pp. 173-201.

- 4) 日置興一郎: 構造力学II, 朝倉書店, 1977.
- 5) Hangai, Y. and Tsuboi, Y.: Buckling Loads of Reticulated Single-Layer Space Frames, presented at the IASS International Congress-Theory and Experimental Investigation of Spatial Structures, USSR, Moscow, 1985.
- 6) 山田大彦: 単層ラチスドームの座屈耐力評価法, 第2回シェルと空間構造に関する日・韓コロキウム論文集, 東京大学生産技術研究所・シェルと立体構造に関する研究委員会編, 1987, pp. 143-150.
- 7) Makowski, Z.S.: Approximate Stress Analysis of Grid Frameworks obtained by Slab Analogies, Analysis, Design and Construction of Double-Layer Grids, edited by Z.S. Makowski, Applied Science Publishers, 1981, pp. 185-244.
- 8) 原田和明: 単層スペースフレームの力学的性状に関する研究, 東京大学修士論文, 1985, 3.
- 9) del Pozo F., F. and del Pozo V., F.: Elastic Buckling of Non-Perfect Spherical Shells of Constant Thickness, Proceedings of IASS Congress, Madrid, 1979, pp. 1.199-1.222.
- 10) Endow, A., Hangai, Y. and Kawamata, S.: Post-Buckling Analysis of Elastic Shells of Revolution by the Finite Element Method, Report of the Institute of Industrial Science, University, of Tokyo, Vol. 26, No. 2, 1976.