研 究 速 報
UDC 519.6：621.771.23

# 塑性加工の複合数値解析に関する研究　第5報
## ——定常変形問題に対する複合数値解析の構成およびその圧延加工への適用——

Study on Combined Numerical Analysis 5th Report
——General Concept of Combined Numerical Analysis for Steady-state Metal Forming——

木 内　学*・柳 本　潤*
Manabu KIUCHI and Jun YANAGIMOTO

## 1．緒　　言

帯板および異形材の圧延加工においては，被加工材は複雑な三次元変形をし，それを事前に予測することは容易ではない．したがって，この分野に関し従来より行われてきた研究は比較的少なく[1]，近年は三次元変形の数値解析も行われているが[2)-4)]，これらは比較的単純な加工条件および工具形状を想定した個別的・限定的なものであり，今後予想される解析対象の高度化・複雑化に関しては，いまだ多くの問題が残されている．

筆者らは，複数の解析法をそれぞれの特長を生かす形で複合化した解析法（複合数値解析法：図1参照）につき検討を行ってきた．既報[5)6)]においては，剛塑性FEMとUBETとを複合化した解析法を提案し，鍛造加工への適用を行ったが，本報および次報においては，圧延・押し出し・引き抜きなどの定常変形問題を対象とした，剛塑性FEMとスラブ法との複合化による新たな複合数値解析法を提案し，帯板圧延および孔型圧延への適用を行い，その特性につき検討を加える．

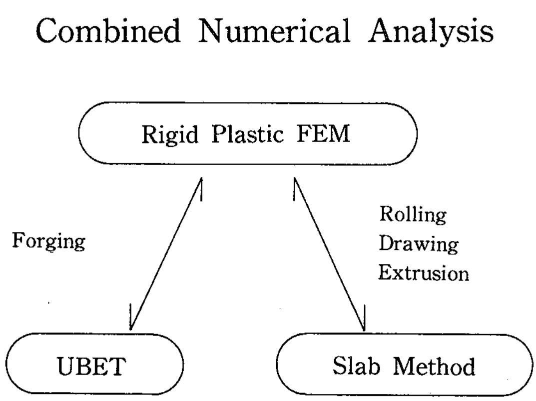


図1　複合数値解析の概要

## 2．解　析　法

### 2.1　複合数値解析による定常変形解析モデルの基本的な考え方

解析モデルの概略を図2に示す．図中に示すように，長手方向を$z$軸とし，幅方向・高さ方向をそれぞれ$x$軸・$y$軸とする．なお，ロール出口面を$z=0$（原点）とし，ロール入口面より$\Delta z$上流の面よりロール出口面までを変形域とする．また，解析を行ううえで，以下に示す仮定を導入する．

① 被加工材は，剛塑性体である．

② 長手方向歪速度$\dot{\varepsilon}_{zz}$は，長手方向（$z$方向）に垂直な任意の断面内において，均一に分布する（図3参照）．この仮定により，素材の三次元速度分布を，長手方向（$z$方向）歪速度$\dot{\varepsilon}_{zz}$＋長手方向垂直断面内の速度$\dot{u}_x$，$\dot{u}_y$により表すことが可能となる．

変形域入口・出口における境界条件は，圧延・押し出し・引き抜きなどの定常変形問題に対し，一般的に次のように与えられる．

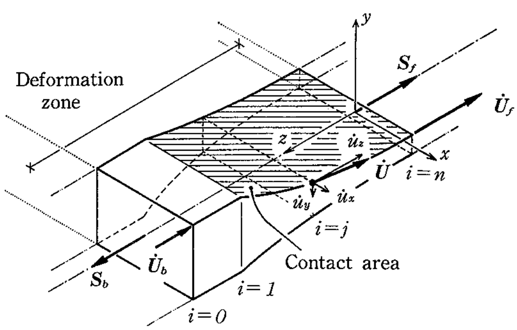


図2　変形域および境界条件

*東京大学生産技術研究所　第2部

研　究　速　報

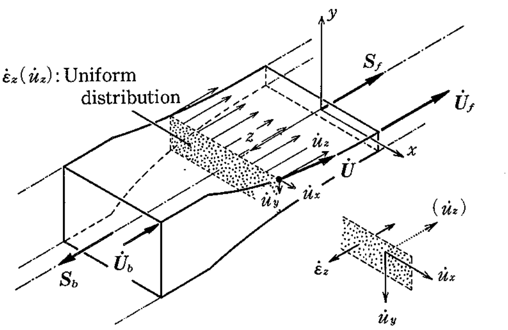


図3　三次元速度分布の近似方法

**変形域入口において**

(速度)

$$\dot{u}_z=(\dot{U}_b)_z \quad \dot{u}_x=(\dot{U}_b)_x=0 \quad \dot{u}_y=(\dot{U}_b)_y=0 \tag{1}$$

(外力)

$$\sigma_{zz}\cdot A_b=\sigma_b\cdot A_b=(S_b)_z \quad (S_b)_x=0 \quad (S_b)_y=0 \tag{2}$$

**変形域出口において**

(速度)

$$\dot{u}_z=(\dot{U}_f)_z \quad \dot{u}_x=(\dot{U}_f)_x=0 \quad \dot{u}_y=(\dot{U}_f)_y=0 \tag{3}$$

(外力)

$$\sigma_{zz}\cdot A_f=\sigma_f\cdot A_f=-(S_f)_z \quad (S_f)_x=0 \quad (S_f)_y=0 \tag{4}$$

ただし　$\dot{U}_b$, $\dot{U}_f$ ：変形域入口面および出口面での速度ベクトル

$S_b$, $S_f$ ：変形域入口面および出口面での外力ベクトル

$A_b$, $A_f$ ：変形域入口面および出口面の断面積

$\sigma_b$, $\sigma_f$ ：後方および前方張力

長手方向（$z$方向）の境界条件は，各定常変形に対し，表1に示すように，入口・出口におけるおのおの一個の量が，既知量として与えられる．既知量として与えられる長手方向境界条件の組み合わせは，各定常変形ごとに異なっているが，これが，解析を行ううえでの，各定常変形の基本的相違を成すものであり，換言すると，以下に述べる圧延についての解析法は，長手方向の境界条件の取り扱いを変更することにより，他の定常変形問題に拡張することが可能である．

圧延加工においては，外力ベクトルの長手方向（$z$方向）成分$(S_b)_z$，$(S_f)_z$が既知量であり，速度ベクトルの長手方向成分$(\dot{U}_b)_z$，$(\dot{U}_f)_z$は未知量である．そこで変形域入口面における$(\dot{U}_b)_z$を基本変数として仮定し，長手方向に垂直な断面により構成される要素（スラブ要素）を考え，このスラブ要素について，スラブ法による釣り合いを考慮しつつ下流側への解析を長手方向に段階的に行うことにより，入口速度$\dot{U}_b$に対応する速度分布および変形を求めるものとする（図4参照）．また，スラブ法による釣り合いの結果として，ある仮定した$(\dot{U}_b)_z$に対応した変形域出口面での面力の長手方向成分$(S_f)_z^*$が得られ，この$(S_f)_z^*$が$(S_f)_z$と近い値となった場合を正解であるとする．

すなわち，この解析法における長手方向の解析は，各スラブ要素についての，連続した圧縮加工の解析として取り扱われており，またこれは，定常変形を非定常変形の連続として解析するのに相当している．ただし，解析は，常に長手方向に垂直な断面（$xy$面）につき行うため，対象とする工具形状は長手方向の各段階ごとに異な

表1　定常変形問題の長手方向境界条件

| | Entrance | | Exit | |
|---|---|---|---|---|
| | Velocity $\dot{U}_b$ | Traction $S_b$ | Velocity $\dot{U}_f$ | Traction $S_f$ |
| Rolling | ? | Given | ? | Given |
| Drawing | ? | Given | Given | ? |
| Extrusion | Given | ? | ? | Given |

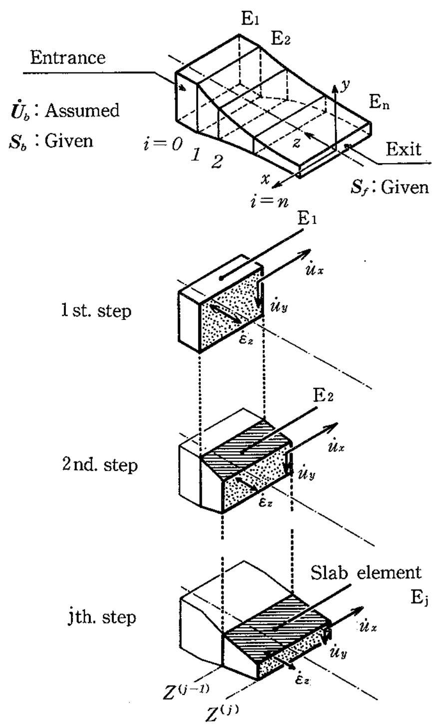


図4　長手方向解析の進め方

研　究　速　報

り，中心軸を含む面での孔形形状を$xy$面内に投影したものとなることに注意されたい．

## 2.2　スラブ法による長手方向垂直力の釣合条件および長手方向せん断力に関する近似釣合条件

図5に示す，長手方向に垂直な断面$j-1$ $(z=Z^{(j-1)})$と$j(z=Z^{(j)})$により構成されるスラブ要素$E_j$についての長手方向の力の釣り合い条件は，次式により表される．

$$s_z^+ + s_z^- + f_z + f_z' + p_z + p_z' = 0 \tag{5.1}$$

$$s_z^+ = -\int_A \left(\frac{2\bar{\sigma}}{3\dot{\bar{\varepsilon}}}\dot{\varepsilon}_{zz} + \sigma_m\right)^{(j)} dA_j$$

$$s_z^- = \int_A \left(\frac{2\bar{\sigma}}{3\dot{\bar{\varepsilon}}}\dot{\varepsilon}_{zz} + \sigma_m\right)^{(j-1)} dA_{j-1}$$

ただし　$s_z^+$，$s_z^-$　：断面$j(z=Z^{(j)})$，$j-1$ $(z=Z^{(j-1)})$における面力の$z$方向成分

$f_z$，$f_z'$　：上下ロールとの接触面における摩擦力の$z$方向成分

$p_z$，$p_z'$　：上下ロールからの圧下力の$z$方向成分

$A_j$，$A_{j-1}$　：断面$j$，$j-1$の面積

このスラブ要素$E_j$に，長手方向（$z$方向）・幅方向（$x$方向）・高さ方向（$y$方向）にそれぞれ$1\times N_x\times N_y$の有限要素分割を施し，断面$j-1$における節点速度$\dot{u}_x^{(j-1)}$，$\dot{u}_y^{(j-1)}$および長手方向の垂直歪速度$\dot{\varepsilon}_{zz}^{(j-1)}$が既知であるとすると，式(5.1)は，断面$j$における節点速度$\dot{u}_x^{(j)}$，$\dot{u}_y^{(j)}$および歪速度$\dot{\varepsilon}_{zz}^{(j)}$についての非線形方程式となる．また，式(5.1)を$\dot{\varepsilon}_{zz}^{(j)}$について展開し，式(5.2)を得る．

$$-s_z^+ \fallingdotseq \int_A \left(\frac{2\bar{\sigma}}{3\dot{\bar{\varepsilon}}}\dot{\varepsilon}_{zz} + \sigma_m\right)^{(j)}{}_{K-1} dA_j + \int_A \left(\frac{2\bar{\sigma}}{3\dot{\bar{\varepsilon}}}\Delta\dot{\varepsilon}_{zz}\right)^{(j)}{}_K dA_j$$
$$+ \int_A \left\{\frac{4}{9\dot{\bar{\varepsilon}}^3}\left(\dot{\bar{\varepsilon}}\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\dot{\bar{\varepsilon}}} - \bar{\sigma}\right)\dot{\varepsilon}_{zz}^2\right\}^{(j)}{}_{K-1}(\Delta\dot{\varepsilon}_{zz})^{(j)}{}_K dA_j \tag{5.2}$$

式(5.2)より，$K-1$回目の収束計算における$\dot{\varepsilon}_{zz}{}^{(j)}{}_{K-1}$に対する修正量$\Delta\dot{\varepsilon}_{zz}{}^{(j)}{}_K$を求め，これにより$\dot{\varepsilon}_{zz}^{(j)}$を修正しつつスラブ法の収束計算を行うと同時に，剛塑性FEMの収束計算を行うことにより，断面$j$における解$\dot{u}_x^{(j)}$，$\dot{u}_y^{(j)}$および$\dot{\varepsilon}_{zz}^{(j)}$が得られ，断面$j+1$ $(z=Z^{(j+1)})$における節点座標を決定することが可能となる．この手順を，スラブ要素$E_1\to E_n$（断面1→n）に，段階的に適用することにより，ある仮定した変形域入口面での速度の長手方向成分$(\dot{U}_b)_z$に対応した変形形状，および変形域出口面での面力の長手方向成分$(\dot{S}_f)_z{}^*$が定まる．この$(\dot{S}_f)_z{}^*$が次式を満足した場合を正解であるとする．

$$|(S_f)_z{}^* - (S_f)_z| \leqq \omega\cdot\sigma_0\cdot A_f \tag{6}$$

ただし，$\sigma_0$：初期降伏応力，$\omega=0.01$

なお，スラブ要素$E_j$についての剛塑性FEM解析においては，ラグランジェ乗数法を用い，また，断面$j$内において各有限要素につき4点積分を行うが（ただし，$\dot{\varepsilon}_{zz}^{(j)}$に関係する部分は，次数低減積分を行う），積分点での歪速度成分としては，次式の2種類のうち，いずれかを選択することが可能である．

$$\{\dot{\varepsilon}\} = \lfloor \dot{\varepsilon}_{xx}\ \dot{\varepsilon}_{yy}\ \dot{\varepsilon}_{xy} \rfloor^T \quad \text{and } \dot{\varepsilon}_{zz} \tag{7.1}$$

$$\{\dot{\varepsilon}\} = \lfloor \dot{\varepsilon}_{xx}\ \dot{\varepsilon}_{yy}\ \dot{\varepsilon}_{xy}\ \dot{\varepsilon}_{yz}\ \dot{\varepsilon}_{zx} \rfloor^T \quad \text{and } \dot{\varepsilon}_{zz} \tag{7.2}$$

式(7.2)を用いる場合，被加工材の幅広がりに関し，より精度の高い解析が可能であると考えられるが，その場合には，断面$j$の$\dot{\varepsilon}_{zx}$・$\dot{\varepsilon}_{zy}$に対応した，この面より下流側の材料からのせん断力に関する釣り合い条件を考慮する必要がある．そこで，本解析においては，図6に示すように，断面$j$における$x$および$y$方向速度$\dot{u}_x$・$\dot{u}_y$をもとに，それが変形域出口面まで線形に減少する場合に対応した面力$\widetilde{T}$を式(8)より求め，これを節点力に換算し，剛塑性 FEM 解析において考慮することにより，せん断力に関する下流側からの釣り合い条件を，近似的に満足させることとする．

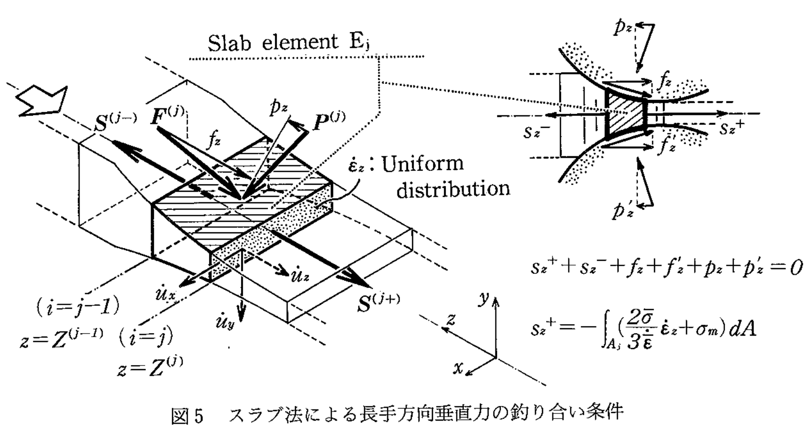


図5　スラブ法による長手方向垂直力の釣り合い条件

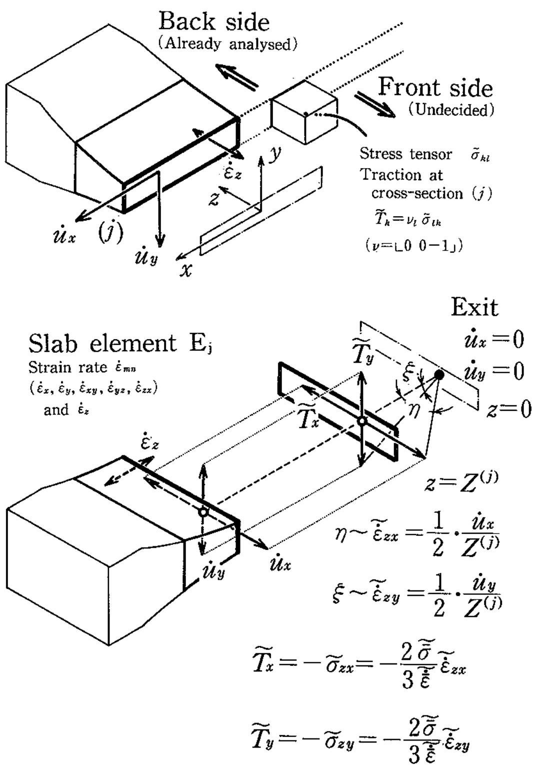


図6　出側材料からのせん断力に関する近似釣り合い条件

$$\tilde{T}_x = -\tilde{\sigma}_{zx} = -\frac{2\tilde{\bar{\sigma}}}{3\tilde{\bar{\varepsilon}}}\tilde{\dot{\varepsilon}}_{zx} \quad \tilde{\dot{\varepsilon}}_{zx} = \frac{1}{2}\ \frac{\dot{u}_x}{Z^{(j)}} \qquad (8.1)$$

$$\tilde{T}_y = -\tilde{\sigma}_{zy} = -\frac{2\tilde{\bar{\sigma}}}{3\tilde{\bar{\varepsilon}}}\tilde{\dot{\varepsilon}}_{zy} \quad \tilde{\dot{\varepsilon}}_{zy} = \frac{1}{2}\ \frac{\dot{u}_y}{Z^{(j)}} \qquad (8.2)$$

$$\tilde{\bar{\varepsilon}}^2 = \frac{2}{3}(\dot{\varepsilon}_{xx}^2 + \dot{\varepsilon}_{yy}^2 + \dot{\varepsilon}_{zz}^2 + 2\dot{\varepsilon}_{xy}^2 + 2\tilde{\dot{\varepsilon}}_{zx}^2 + 2\tilde{\dot{\varepsilon}}_{zy}^2)$$

図7に，解析のフローチャートを示す．

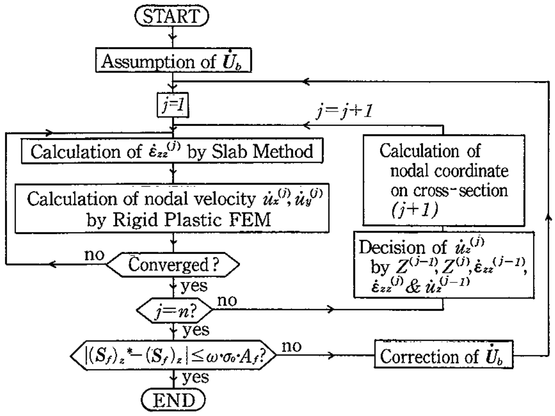


図7　フローチャート

## 3．結　　　言

剛塑性FEMとスラブ法とを複合化することにより構成された，定常変形用の複合数値解析法を新たに提案し，その概要および圧延加工への適用法を示した．本文中にて述べたように，この解析法は，長手方向境界条件の取り扱いを変更することにより，容易に圧延以外の定常変形（押し出し・引き抜き）の解析に拡張することが可能である．次報においては，本解析法の圧延加工への適用を行い，その特性につき検討を加える．

（1987年4月14日受理）

## 参　考　文　献

1)　たとえば　柳本左門：機論，27-178（1961），800．
2)　Oh, S. I. and Kobayashi, S.: Int. J. Mech. Sci., 17-4 (1975), 293.
3)　加藤和典・室田忠雄・小森和武：機論，51-469，A (1985)，2172．
4)　Mori, K., Osakada, K. and Fukuda, M.: Int. J. Mech. Sci., 25-11 (1983), 775.
5)　木内　学・柳本　潤：昭61春塑加講論，(1986)，443．
6)　柳本　潤・木内　学：第37塑加連講論，(1986)，93．