

2次元BEM解析の特異積分の高精度化

Accurate Numerical Integration for Singular Kernels in the Two-Dimensional Boundary Element Method

結 城 良 治*・佐 藤 満*
Ryoji YUUKI and Mitsuru SATO

1. 結 言

境界要素法 (BEM) は領域内の支配微分方程式をその方程式を満たす基本解を用いて境界積分方程式に変換し、これを離散化して解析する手法であり、近年急速にその適用分野を拡大しつつある¹⁾。しかしBEM直接法では、特異積分を行う必要があり、この特異積分の精度が解の精度を支配し、数値解析上の大きな制約となっている²⁾。このため境界を解析積分しやすい低次近似の要素で離散化することが多かった。最近では精度向上の要求に伴い高次要素も用いられているが、その特異積分の精度向上および効率化については検討すべき問題がまだ残されているのが現状である。

特異積分の評価方法としては従来種々の方法が提案されているが³⁾⁴⁾⁵⁾、実用上簡便に用いることができるものが少なく、扱いが難しい。たとえば解析積分を用いる手法は高精度な解が得られるが、直線要素しか適用できず、汎用性に欠けている。また二重指数型積分を用いる手法は高精度な解を得るには計算時間がかかりすぎるなどの問題がある。3次元BEMにおいては直交座標を極座標に変換することにより特異性を1階下げの手法が有効であり¹⁾、手法としても一般的なものになりつつあるが、2次元問題においてはまだ定まった手法は確立されていない。

本研究では1次元の写像変換によって2次元BEMの基本解のもつ特異性を低減することにより、計算時間を増大させることなく精度良い結果が得られる簡便な手法を提案する。

2. BEMの基礎式

本研究では、例として2次元定常熱伝導問題のBEM解析を取り扱う。図1のように境界および領域を定義したとき、発熱のない2次元定常熱伝導の直接法による境界積分方程式は次のように表現される。

$$cT(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} q^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) T(\mathbf{y}) d\Gamma = \int_{\Gamma} T^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) q(\mathbf{y}) d\Gamma \quad (1)$$

ここで、 T は温度、 q は外向法線方向熱流束であり、 Γ は境界を表す。 c は境界形状によって定まる係数である。境界が滑らかなときは $c=1/2$ となる。 T^* と q^* は2次元定常熱伝導問題の基本解であり、次式で表される。

$$T^* = -\frac{1}{2\pi\lambda} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \quad (r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \quad (2)$$

$$q^* = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial n} = -\lambda \frac{\partial T^*}{\partial n} \quad (3)$$

r は基本解のソース点 \mathbf{x} と観測点 \mathbf{y} との距離であり、 λ は熱伝導率、 n は外向き法線方向を表す。式(1)の境界 Γ に関する積分項を要素分割によって離散化し、各要素ごとの節点に関する量に書き直せば次のようになる。

$$cT(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_i} q^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \sum_{j=1}^M \phi_j T_j d\Gamma_i = \sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_i} T^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \sum_{j=1}^M \phi_j q_j d\Gamma_i \quad (4)$$

N は要素数、 M は要素の内挿関数の次数であり、たとえば2次元要素を用いた場合、内挿関数 ϕ_i および形状関数は次のように表すことができる。

$$\left. \begin{aligned} x(\xi) &= \sum_{k=1}^3 \phi_k(\xi) x_k, \quad y(\xi) = \sum_{k=1}^3 \phi_k(\xi) y_k \\ \phi_1 &= \frac{1}{2} \xi(\xi-1), \quad \phi_2 = 1 - \xi^2, \quad \phi_3 = \frac{1}{2} \xi(1+\xi) \end{aligned} \right\} (5)$$

ξ は要素ごとの局所座標であり x_k, y_k は節点座標である。この写像により図2のように Γ_i 上の積分は ξ 空間上の $[-1, 1]$ の範囲の積分として表される。たとえば(4)の右辺を ξ 空間上の積分で表すと次のようになる。

$$\sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_i} T^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \sum_{j=1}^M \phi_j q_j d\Gamma_i = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \left[\int_{-1}^1 T^*(\mathbf{x}, \xi) \phi_j J_i d\xi \right] q_j \quad (6)$$

J_i は全体空間から ξ 空間への各要素ごとの座標変換ヤコビアンである。この積分には一般にGaussの積分公式⁶⁾が用いられており、たとえば被積分関数を F とすればその積分値 I は次のように求められる。

*東京大学生産技術研究所 第1部

研究速報

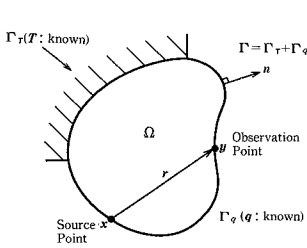


図1 境界および領域の定義

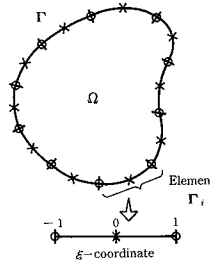


図2 離散化とxi空間への変換

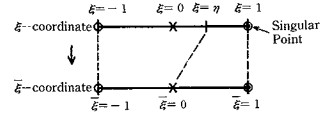


図3 xi空間からxi-bar空間への写像

$$I = \int_{-1}^1 F(x) dx \cong \sum_{i=1}^{NG} F(x_i) w_i \quad (7)$$

NGは積分次数, x_i は積分点の座標, w_i は x_i に対応する重み係数である。これを用いて式(6)の各節点に対応する積分が求められ, 最終的に式(4)は次のようなマトリックスとして書き表される。

$$[H] \{T\} = [G] \{q\} \quad (8)$$

$\{T\}$ は節点温度ベクトル, $\{q\}$ は熱流束ベクトルで, $[H], [G]$ は係数マトリックスである。上式に境界条件を代入して境界上の未知量が決定される。

しかしながら前述した基本解 T^* および q^* には $\ln r$ や $1/r$ という特異性が含まれており, r が0に近い場合の積分は式(7)では正確に評価できない。ところで q^* の $1/r$ の特異積分は均一温度場における恒等式から間接的に求めることができ, 精度的にも十分なものが得られることがわかっている。しかし T^* の対数特異積分はそのような間接条件からは求めることができず, 特に高次要素・曲線要素では数値積分が避けられない。そこでこの $\ln r$ の特異積分を精度良く求める手法について以下に示す。

3. 写像変換法の基礎理論

3.1 2次の写像変換法(手法1)

いま, 特異点がxi空間の積分区間 $[-1, 1]$ の端点($\xi = 1$)にある場合を考える。このときxi空間の被積分関数をさらに次式によってxi-bar空間上に写像する(図3)。

$$\xi = \bar{\xi} + (1 - \bar{\xi}^2)\eta \quad (0 \leq \eta \leq 1/2) \quad (9)$$

この変換は積分区間 $[-1, 1]$ は不変だが, 特異点付近が拡大され, 反対側が縮小されて写像される。変換のヤコビアン J_η は次のようになる。

$$J_\eta = d\xi/d\bar{\xi} = 1 - 2\eta\bar{\xi} \quad (10)$$

ここで(9)の変換によって積分精度がどのように変化するかをみるために, 次のようなモデルにより精度を評価した。xi=1に特異点のある直線形状の2次要素を考え, 式(4)の右辺の特異積分項に相当する積分をとり出すと次のようになる。

$$I = 2\pi\lambda \int_{\Gamma} T^* \phi_s d\Gamma = \int_{-1}^1 \xi \frac{(1+\xi)}{2} \ln r \cdot J d\xi \quad (11)$$

$$\equiv \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi$$

ただし r は全体座標系でのソース点と観測点との距離, J は全体空間からxi空間への変換ヤコビアンである。ここでは直線形状のため $J=L/2$ であり, また $r=L(1-\xi)/2$ となる。 L は要素の長さである。式(11)の被積分関数 $f(\xi)$ は図4のようにxi=1で $-\infty$ となる特異性をもっている。これを式(9)による写像変換を施すとxi-bar空間での積分は,

$$I = 2\pi\lambda \int_{\Gamma} T^* \phi_s d\Gamma = \int_{-1}^1 \bar{\xi} \frac{(1+\bar{\xi})}{2} \ln r \cdot J \cdot J_\eta d\bar{\xi} \equiv \int_{-1}^1 g_\eta(\bar{\xi}) d\bar{\xi} \quad (12)$$

となる。なお, 上式の積分 I の厳密な解析積分分解は次のように与えられる。

$$I = \frac{1}{6} \left[\ln L - \frac{17}{6} \right] \quad (13)$$

図5は, パラメータ η を変えて, 数値積分の相対誤差をみたものである。積分には通常のGauss積分公式を用い, 積分次数は5次, 10次, 15次, 20次とした。計算は倍精度で行っている。10次以上の高次の積分では, η が0.5付近において誤差が急激に低下することがわかる。

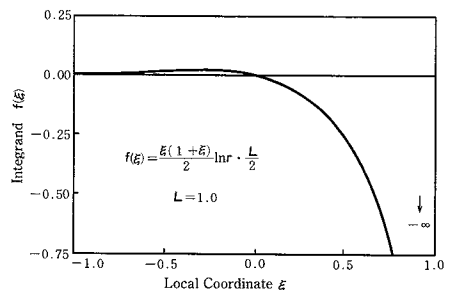


図4 xi空間上の被積分関数f(xi)の形状

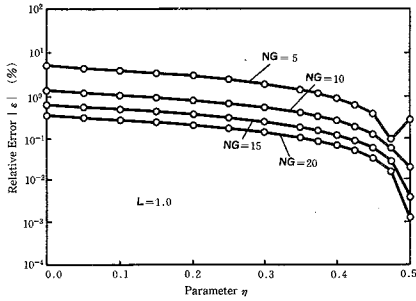


図5 ηの変化に対する数値積分の誤差

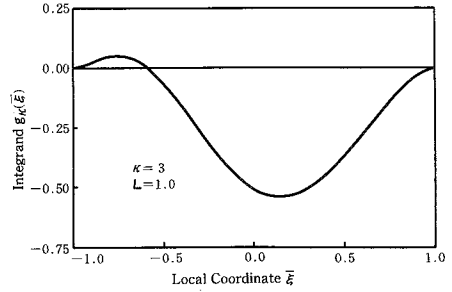


図7 ξ̄空間上の被積分関数g_κ(ξ̄)の形状 (κ=3)

が0.5のとき精度が向上する理由は次のように説明できる。ηが0.5のとき式(9)および変換のヤコビアンJ_ηは、

$$\xi = \frac{1}{2}(-\bar{\xi}^2 + 2\bar{\xi} + 1),$$

$$J_\eta = d\xi/d\bar{\xi} = 1 - \bar{\xi} = \sqrt{2(1-\xi)} = 2\left(\frac{r}{L}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (14)$$

となる。この場合の変換はき裂問題でよく用いられている特異要素の内挿関数と一致する。ヤコビアンはr^1/2のオーダーをもっているため、結果としてξ̄空間での被積分関数g_η(ξ̄)は図6のように特異性が消失しており、Regularな関数となる。この結果、通常のGauss積分公式でも精度良い結果が求められることになる。要素が曲率をもつ場合でもξ→1のときJ_ηはr^1/2のオーダーで0に近づく。したがって特異性は同様に消失し、本手法がそのまま適用できる。

以上では特異点がξ=1にある場合を示したが、ξ=-1にある場合にはξとξ̄をそれぞれ-ξと-ξ̄に変更すれば対応した式が得られる。また2次要素の中間節点(ξ=0)に特異点がある場合には区間[-1, 1]を[-1, 0], [0, 1]に分割し、特異点が区間の端にくるようにすればよい。

3.2 高次の写像変換法 (手法2)

き裂問題における応力特異性の解析に用いる内挿関数

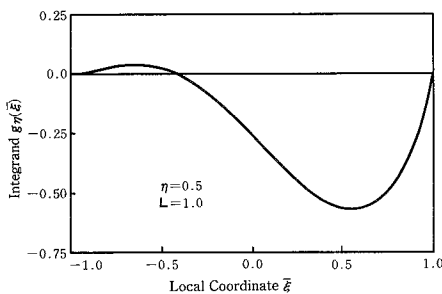


図6 ξ̄空間上の被積分関数g_η(ξ̄)の形状 (η=0.5)

についてはEzawaら⁸⁾、Tanakaら⁹⁾が任意のオーダーの特異性が表現できるものを提案している。この内挿関数を積分空間の写像に適用することにより、さらに高次の写像変換ができる。たとえばξ空間上のξ=1に特異点のある場合、次の写像を行う。

$$\xi = -\frac{1}{2^{\kappa-1}}(1-\bar{\xi})^\kappa + 1 \quad (15)$$

このとき座標変換ヤコビアンJ_κは次のようになる。

$$J_\kappa = d\xi/d\bar{\xi} = \frac{\kappa}{2^{\kappa-1}}(1-\bar{\xi})^{\kappa-1} \quad (16)$$

κ=1.0のとき恒等写像となり、κ=2.0ならば前述の2次の写像(η=0.5)と一致する。式(15)を用いて式(11)を写像変換すると

$$I = 2\pi\lambda \int_\Gamma T^* \phi_3 d\Gamma = \int_{-1}^1 \frac{\xi(1+\xi)}{2} \ln r \cdot J \cdot J_\kappa d\bar{\xi} \equiv \int_{-1}^1 g_\kappa(\bar{\xi}) d\bar{\xi} \quad (17)$$

となる。式(11)の写像によりξ空間のGauss積分点はκを大きくするにしたがって特異点に近づいてゆく。ただし計算機の精度により積分点を区別できる限界があることに注意する必要がある。図7は写像パラメータκが3.0のときのξ̄空間における被積分関数g_κ(ξ̄)の形状である。

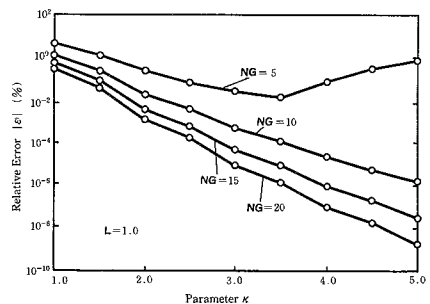


図8 κの変化に対する数値積分の誤差

研 究 速 報

表 1 温度と熱流束の計算値およびCPU時間比

画像手法	写像パラメータ	温度 $T(x=100, y=75)$		熱流束 $q(x=25, y=0)$		CPU比
		計算値 (°C)	誤差 (%)	計算値 (W/mm ²)	誤差 (%)	
なし	—	4.9948107486×10^1	-1.038×10^{-1}	$-8.0173326104 \times 10^{-2}$	2.167×10^{-1}	1.00
手法1	$\eta=0.5$	5.0000754843×10^1	1.510×10^{-3}	$-7.9997489696 \times 10^{-2}$	-3.138×10^{-3}	1.01
	$\kappa=3$	4.9999979288×10^1	-4.142×10^{-4}	$-8.0000068859 \times 10^{-2}$	8.607×10^{-6}	1.01
手法2	$\kappa=4$	5.0000000945×10^1	1.900×10^{-6}	$-7.9999996833 \times 10^{-2}$	-3.952×10^{-6}	1.01
	$\kappa=5$	4.9999999942×10^1	-1.200×10^{-7}	$-8.0000000167 \times 10^{-2}$	2.143×10^{-7}	1.01

表 2 変位と表面力の計算値およびCPU時間

画像手法	写像パラメータ	変位 $u_x(x=75, y=100)$		表面力 $f_x(x=25, y=0)$		CPU比
		計算値 (°C)	誤差 (%)	計算値 (W/mm ²)	誤差 (%)	
なし	—	$4.3233739054 \times 10^{-3}$	-2.298×10^{-1}	-1.0004971674	4.972×10^{-2}	1.00
手法1	$\eta=0.5$	$4.3334783494 \times 10^{-3}$	3.347×10^{-3}	$-9.9999286071 \times 10^{-1}$	-7.139×10^{-4}	1.01
	$\kappa=3$	$4.3333293476 \times 10^{-3}$	-9.197×10^{-5}	-1.0000001988	1.988×10^{-5}	1.02
手法2	$\kappa=4$	$4.333335083 \times 10^{-3}$	4.045×10^{-6}	$-9.999999384 \times 10^{-1}$	-6.160×10^{-7}	1.02
	$\kappa=5$	$4.333333157 \times 10^{-3}$	-3.992×10^{-7}	-1.0000000033	3.300×10^{-7}	1.02

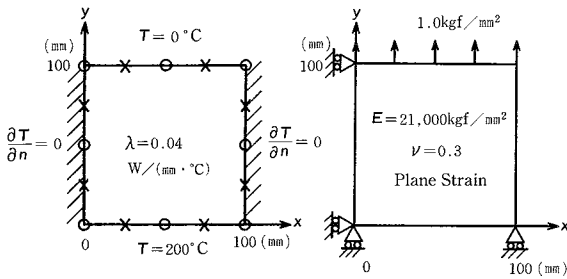


図 9 熱伝導解析モデル 図 10 弾性解析モデル

$\xi=1$ 近傍の形状が図 6 よりさらになだらかになっていることがわかる。図 8 は式(11)のモデルに本手法を適用し、写像パラメータ κ を 1.0 から 5.0 まで変化させた場合の数値積分の誤差を % で示したものである。 κ の増加につれて精度は飛躍的に向上する。

4. 数値計算例

前章で述べた方法にしたがって 2 次元定常熱伝導 BEM 解析を行った。離散化誤差が入らないように図 9 のような正方形領域をモデル化し、上面を 0°C、下面を 200°C に固定して側面を断熱とした場合の温度および熱流束について解析した。ただし熱伝導率 $\lambda=0.04W/(mm \cdot ^\circ C)$ とした。Gauss 積分次数 10 次としたときの写像を行わない場合と行った場合の数値解と誤差 (%) を表 1 に示す。ここではサンプルとして $(x, y) = (100, 75)$ の点の温度および $(x, y) = (25, 0)$ の点の熱流束の誤差をみた。CPU 時間は写像なしの場合との比として示した。粗い分割にもかかわらず高精度な結果が得られることがわかる。

また写像変換法を 2 次元静弾性問題に応用した例を示す。弾性解析では基本解の形は異なるが同様に $\ln r$ の特異性が含まれている。図 10 のモデルについて解析を行った結果を表 2 に示す。ただし要素分割は熱伝導モデルの場合と同一にし、弾性定数 $E=21000$ 、ポアソン比 $\nu=0.3$ 、平面ひずみ条件とした。Gauss 積分次数は 10 次である。こ

こでは $(x, y) = (75, 100)$ の y 方向変位 u_y と $(x, y) = (25, 0)$ の y 方向表面力の誤差をみた。数次のオーダの写像で十分な精度が得られる。以上の結果より写像変換法は計算時間を増加させることなく高精度な解を与えることがわかる。

なお、本解析例では写像なしの場合でも、2 分割のサブエレメント法を用い、精度の若干の向上が図られている。サブエレメント法を用いなければもっと精度が悪くなる。さらにサブエレメントを細かく分割すれば、精度が向上するが、計算時間も増加する。一方、本手法は、計算時間がふえず、精度が必要なだけ向上する。

5. 結 言

2 次元 BEM 解析において生ずる特異積分を写像変換を用いて高精度に数値的に評価する手法について示した。本手法は基本解が同じ特異性を有していれば問題および要素の種類のかんにかかわらず適用できる。特に CPU 時間を増加させずに高精度化が図られ、一般的な Gauss 積分公式のみですべての積分が評価できるため、BEM 解が効率的に求められる。(1987年 6 月 5 日受理)

参 考 文 献

- 1) C.A. Brebbia, J.C.F. Telles, and L.C. Wrobel: "Boundary Element Techniques", Springer-Verlag (1984)
- 2) 佐藤, 結城, 松本: 境界要素法論文集, 第 3 巻 (1986)
- 3) J.C. Lachat, J.O. Watson: Int. J. Num. Methods Eng., Vol. 10:991-1005 (1976)
- 4) 東町, 江沢, 岡本, 相沢: 日本機械学会論文集 A 編, 51 巻, 468 号, 1967-1972 (昭 60-8)
- 5) M.H. Lean, A. Wexler: Int. J. Num. Methods Eng., Vol. 21, 211-228 (1985)
- 6) A.H. Stroud, D. Secrest.: "Gaussian Quadrature Formulas", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- 7) 結城, 木須, 松本: 境界要素法論文集, 第 2 巻 (1985)
- 8) Y. Ezawa, N. Okamoto: Boundary elements VII, (1985)
- 9) M. Tanaka, H. Itoh: Boundary elements VIII, Springer-Verlag, 131-142, (1986)