

# 剛体・ばね要素により構成された柱の塑性座屈モデルの解析解

Analytical Solutions for the Plastic Buckling Model of a Column Composed of the Rigid Bodies-Spring Elements

都 井 裕\*・関 宝 仁\*・川 井 忠 彦\*

Yutaka TOI, Bao Ren GUAN and Tadahiko KAWAI

## 1. 序

著者の一人の川井により創始された剛体・ばねモデル<sup>1)</sup> (The Rigid Bodies-Spring Models) は、すでに多くの構造非線形問題に応用され、従来の塑性解析法をコンピュータの使用を前提として組織化、一般化した離散化解析手法としての立場を確立しているが、数々の応用例の中の特に重要な成果の一つとして、非弾性構造安定問題における Shanley model<sup>2)</sup> の一般化を挙げることができる。すなわち、都井・川井は文献3), 4)において、剛体・ばねモデルにより構成された柱の2自由度シミュレータがShanley modelと等価であることを数値的に実証し、さらに一般の薄肉構造に適用可能な剛体・ばねモデルである平板剛体要素モデルの非線形解析アルゴリズムを用いることにより、任意の板殻構造に対する低自由度の安定問題シミュレータを開発可能であり、非弾性構造安定問題の定性的研究に裨益するであろうことを、平板・円筒殻に対する数値例を通じて主張した。これらの研究においては数値的に安定問題がシミュレートされたが、もし可能な場合には、剛体・ばねモデルによる低自由度シミュレータに対し、解析的な考察を加えることも興味深い課題である。そこで手始めに本研究では、上述の柱の2自由度シミュレータを取り上げ、解析解を導くことを試みた。この種の解析解は一般には、現象全体を把握する際の見通しをよくし、数値解と比較することによる数値計算アルゴリズムチェックを可能にし、また設計公式・実験公式を誘導する際の基本形として使用するなどの意義を有する。

## 2. 柱の塑性座屈モデルの解析解

### 2.1 基本関係式

図1に示すように、2個の剛体要素にモデル化された両端支持H型断面柱の強軸方向の曲げ変形を伴う軸圧縮塑性座屈問題を考える。

図1のように変位自由度を設定すると、境界条件および問題の対称性より  $u_1 = u_3 = 0$ ,  $w_1 = -w_3$  が成立するので、 $w_3$  および  $u_2$  を独立変数とする2自由度モデルとして、この問題を扱えることになる。以下ではこれらの変数をそれぞれ単に  $w$  および  $u$  と記述する。すなわち、 $w$  は柱の軸方向の1/2縮み、 $u$  は柱中央部の横たわみである。

2つのフランジ断面における軸方向相対変位  $\delta_1(w, u)$  および  $\delta_2(w, u)$  は次のように与えられる<sup>3)</sup>。

$$\delta_1(w, u) = -2w \frac{2H(u-u_0)}{L} + \frac{2(u-u_0)^2}{L} \quad (1a)$$

$$\delta_2(w, u) = -2w + \frac{2H(u-u_0)}{L} + \frac{2(u-u_0)^2}{L} \quad (1b)$$

ここに、 $\delta_1$  および  $\delta_2$  などの下付き添字1, 2はそれぞれ座屈曲げ変形の圧縮側と引張側を表し、 $w$  は縮みを正とする。各フランジ断面上で応力  $\sigma_1$  および  $\sigma_2$  は一様分布と仮定し、ウェブの存在を無視すれば、フランジ上の応力と軸荷重  $P$  の関係は次式のように表現される。

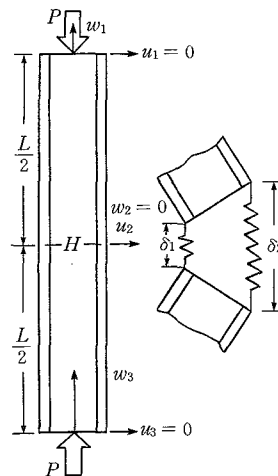


図1 剛体・ばね要素による柱の塑性座屈モデル

\*東京大学生産技術研究所 第2部

研 究 速 報

$$\sigma_1 = \frac{P(H+2u)}{AH} \quad (2a)$$

$$\sigma_2 = \frac{P(H-2u)}{AH} \quad (2b)$$

ここで、荷重  $P$  は圧縮側を正とし、2つのフランジの断面積はおのおの  $A/2$  としている。相対変位とひずみの関係を

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 &= \epsilon_1 L \\ \delta_2 &= \epsilon_2 L \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

と仮定すれば、

$$\delta_2 - \delta_1 = L(\epsilon_2 - \epsilon_1) \quad (4)$$

のような関係が得られる。材料の降伏応力を  $\sigma_y$  とし、塑性比例限を  $k\sigma_y$  と仮定すれば、両フランジの応力・ひずみ関係とその微分関係を

a)  $|\sigma_i/\sigma_y| < k$  のとき (弾性域)

$$\epsilon_i = \frac{\sigma_i}{E} \quad (i = 1, 2) \quad (5a)$$

b)  $|\sigma_i/\sigma_y| \geq k$  のとき (塑性域)

$$d\epsilon_i = \frac{d\sigma_i}{E_t} \quad (i = 1, 2) \quad (5b)$$

と表現される。ただし、 $k$  は  $0 < k < 1$  なる定数であり、 $E$  はヤング率、 $E_t$  は接線係数を表す。ここで

$$E_t = \frac{E}{1-k} \left(1 - \frac{\sigma_i}{\sigma_y}\right) \quad (i = 1, 2) \quad (5c)$$

と仮定すれば(5b)式より、塑性変形時の応力・ひずみ関係は

$$\epsilon_i = \frac{\sigma_y}{E} \left( k' \ln \frac{k' \sigma_y}{\sigma_y - \sigma_i} + k \right) \quad (6)$$

( $i = 1, 2$ )

と計算される。ただし、ここに  $k' = 1 - k$  である。

なお、最高荷重  $P_{max}$  における平均応力を最高応力  $\sigma_{max}$  と呼ぶことにする。

初期たわみ  $u_0$  を有する柱において、荷重の増大とともにフランジに生じる応力状態としては、以下の4ケースを考える必要がある。

- (I) 圧縮側と引張側がともに弾性域にある場合
- (II) 圧縮側が塑性域に、引張側が弾性域にある場合
- (III) 圧縮側と引張側がともに塑性域にある場合
- (IV) 圧縮側が塑性域に、引張側が除荷域にある場合

これらの各応力状態での解を接続することにより、初期状態から最高荷重に至る荷重・変位関係を得ることが出来る。また、最高荷重時の応力状態としては(II)、(III)、(IV)の3ケースを考えればよい。

## 2.2 圧縮側と引張側がともに弾性域にある場合

この場合の圧縮側ひずみ  $\epsilon_1$  および引張側ひずみ  $\epsilon_2$  はともに(5a)式により与えられる。これらのひずみと(1)式

の相対変位を(4)式に代入し、さらに(2)式を用いると、荷重  $P$  と横たわみ  $u$  の関係として次式が得られる。

$$P = \frac{AEH^2}{L^2} \left(1 - \frac{u_0}{u}\right) \quad (7)$$

上式で  $u \rightarrow \infty$  とした場合の極限荷重値

$$P_{cr} = \frac{AEH^2}{L^2} \quad (8)$$

は、考えているモデルの弾性座屈荷重である。

## 2.3 圧縮側が塑性域に、引張側が弾性域にある場合

この場合は、圧縮側のひずみ  $\epsilon_1$  および引張側のひずみ  $\epsilon_2$  がそれぞれ(6)式および(5a)式により定まる。これらのひずみおよび(1)式の相対変位を(4)式に代入し、さらに(2)式を用いると、荷重  $P$  と横たわみ  $u$  の関係として次式を得る。

$$\frac{\sigma_y}{E} \left[ k' \ln \frac{k' AH \sigma_y}{P(H+2u) + AH \sigma_y} + k \right] + \frac{P(H-2u)}{AHE} + \frac{4H}{L^2} (u - u_0) = 0 \quad (9)$$

横たわみ  $u$  に関する荷重  $P$  の極値条件  $dP/du = 0$  より、最高荷重時の横たわみ  $u_{max}$  として次式が得られる。

$$u_{max} = \frac{k' \sigma_y AHL^2}{4AH^2 E - 2L^2 P_{max}} + \frac{AH \sigma_y}{2P_{max}} - \frac{H}{2} \quad (10)$$

(10)式を用いて(9)式の横たわみを消去すれば、最高荷重  $P_{max}$  に関する陰関数式が得られ、これを数値的に解くことにより最高荷重  $P_{max}$  が計算される。

## 2.4 圧縮側と引張側がともに塑性域にある場合

圧縮側、引張側いずれにも、応力・ひずみ関係として(6)式を用いれば、荷重  $P$  と横たわみ  $u$  の関係として次式が導かれる。

$$\frac{k' \sigma_y}{E} \ln \frac{P(H-2u) + AH \sigma_y}{P(H+2u) + AH \sigma_y} + \frac{4H}{L^2} (u - u_0) = 0 \quad (11)$$

最高荷重時の横たわみ  $u_{max}$  は

$$u_{max} = \frac{1}{2} \sqrt{H^2 \left(1 + \frac{A \sigma_y}{P_{max}}\right)^2 - \frac{k' \sigma_y L^2}{E} \left(1 + \frac{A \sigma_y}{P_{max}}\right)} \quad (12)$$

となり、この式を(11)式に代入すれば、最高荷重  $P_{max}$  を与える陰関数式が得られる。この式を数値的に解いて計算される最高荷重は、除荷の発生を考慮に入れない、いわゆる接線係数理論論の考え方に従う理論解であり、柱の初期たわみが零の場合は、通常の接線係数荷重 (tangent modulus load) に一致する。なお、2.3節および2.4節の  $P_{max}$  に対応する応力を  $\sigma_{max}$  と記すことにする。

## 2.5 圧縮側が塑性域に、引張側が除荷域にある場合

$\sigma_2$  を引張側圧縮応力の最大値(極値)、すなわち除荷発生時の応力と仮定し、さらに(6)式を用いれば、引張側応力・ひずみ関係は次式のように表される。

$$\epsilon_2 = \frac{\sigma_y}{E} (k' \ln \frac{k' \sigma_y}{\sigma_y - \sigma_{2r}} + k) + \frac{\sigma_2 - \sigma_{2r}}{E} \quad (13)$$

これを利用して、荷重  $P$ ・横たわみ  $u$  の関係として次式が導かれる。

$$\frac{k' \sigma_y}{E} \ln \frac{(\sigma_y - \sigma_{2r}) AH}{P(H + 2u) + AH\sigma_y} + \frac{P(H - 2u) + AH\sigma_y}{AHE} + \frac{4H}{L^2} (u - u_0) = 0 \quad (14)$$

この段階では  $\sigma_{2r}$  は未知である。  $d\sigma_2/du = 0$  の条件と荷重  $P$ ・横たわみ  $u$  の関係を利用して、除荷開始時の横たわみ  $u_r$  における荷重  $P_r$  (いわば除荷開始荷重) が次式のように導かれる。

$$P_r = \frac{AHE\sigma_y(H - 2u_r)}{k' \sigma_y L^2 E (H^2 - 4u_r^2)} \quad (15)$$

この式を (14) 式の荷重・横たわみの関係式に代入して、数値的に解いた  $u_r$  を再び上式に代入すれば、引張側圧縮応力の最大値 (極値) における荷重  $P_r$  が得られる。さらに、 $\sigma_{2r}$  は (2b) 式より計算される。初期たわみ  $u_0 = 0$  ならば  $P_r$  の計算は簡単になり、その時の  $P_r$  は接線係数荷重 (tangent modulus load) と一致する。なお、荷重  $P_r$  に対応する応力を  $\sigma_r$  と記す。

(14) 式を利用して、2.3 節と同様の方法で最高荷重  $P_{max}$  が計算される。その際、(10) 式もそのまま利用可能である。また、本節の  $P_{max}$  に対応する応力を  $\sigma_{max}$  と記すことにする。

### 3. 数値計算例

前章で誘導した解析解に対する数値例を以下に述べる。計算に用いた各定数は  $A=0.2$ ,  $H=1$ ,  $E=100$ ,  $\sigma_y = -1$ ,  $k=0.7$  である。細長比  $L/r (=4H/L)$  および初期たわみ  $u_0$  を変化させたパラメータ計算を実施した。

最高荷重の計算から付随的に、除荷の発生を考慮する必要のある範囲が図 2 のように得られた。すなわち、図 2 の「必要域」においては、最高荷重時に両フランジが

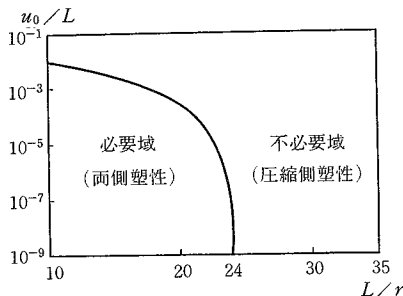


図 2 除荷の発生を考慮する必要のある範囲

塑性化しており、引張側のフランジについては除荷の発生をチェックしておく必要がある。

図 3 と図 4 はそれぞれ、2.3 節、2.4 節の諸式による除荷の発生を考慮しないコラムカーブ、および 2.5 節の諸式を用いた除荷の発生を考慮したコラムカーブである。図 4 からは、初期たわみが  $u_0/L = 10^{-4}$  程度より小さくな

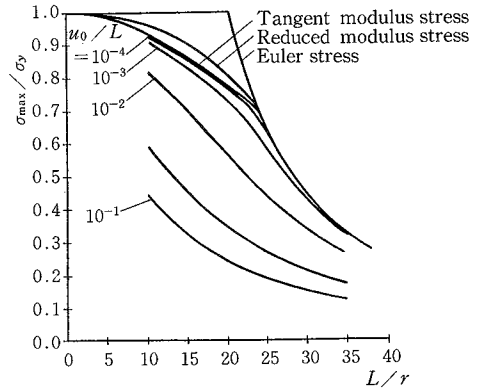


図 3 コラムカーブ (除荷の発生を無視した場合)

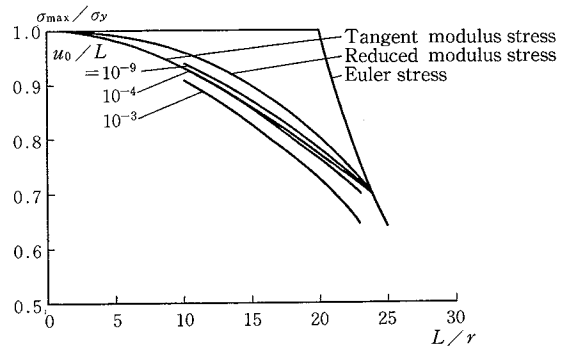


図 4 コラムカーブ (除荷の発生を考慮した場合)

表 1 除荷を考慮した最高応力  $\sigma_{max}^r$  と接線係数応力  $\sigma^t$  および等価係数応力  $\sigma^e$  の相対関係

$$\eta = \frac{\sigma_{max}^r - \sigma^t}{\sigma^e - \sigma^t}$$

$u_0/L = 10^{-9}$	
$L/r$	$\eta$
10	0.30
14	0.30
18	0.31
22	0.33

研究速報

表2 最高応力に関する解析解と増分法数値解の比較

L/r	$\sigma_{max}^r / \sigma_y$ ( )内は増分法数値解 <sup>3)</sup>		
	$u_0/L=10^{-8}$	$u_0/L=10^{-4}$	$u_0/L=10^{-7}$
10	0.9082 (0.9141)	0.9289 (0.9320)	0.9385 (0.9388)
14	0.8420 (0.8486)	0.8704 (0.8741)	0.8839 (0.8841)
18	0.7673 (0.7720)	0.8006 (0.8035)	0.8162 (0.8164)
22	0.6730 (0.6779)	0.7233 (0.7243)	0.7387 (0.7388)

ると、接線係数荷重よりも大きい最高荷重値が得られていることがわかる。表1に示すように、 $u_0/L=10^{-9}$ のときの除荷を考慮した最高応力 $\sigma_{max}^r$ は、接線係数理論の解を越え、接線係数応力と等価係数応力の間の約1/3のところに位置している。

表2は文献3)の研究で求められた増分法数値解と本計算結果との比較であり、このような比較から通常の荷重増分法による計算の精度が検証される。表2の結果より、増分法数値解はいずれもやや高めの最高荷重値を与えているが、その誤差は最大でも0.7%程度であることがわかる。

図5は、 $L/r=16$ の柱に対し初期たわみを変化させた場合の $\sigma_{max}^r$ 、 $\sigma_{max}^i$ 、 $\sigma_r$ の相対関係図である。図5に示すように、初期たわみが零に近い場合には除荷を考慮しない最高応力 $\sigma_{max}^i$ は除荷開始応力 $\sigma_r$ と一致するが、初期たわみが増大するにつれて $\sigma_{max}^i$ より小さい荷重レベルで除荷が発生していることがわかる。また、除荷を考慮した最高応力 $\sigma_{max}^r$ は初期たわみの増大とともに $\sigma_{max}^i$ に近づいてくることが理解される。

4. 結 語

本研究では、剛体・ばね要素により構成された柱の塑性座屈モデルに対し解析的検討を加え、最高荷重に関する陰関数式を誘導し、いくつかの数値例を示した。本研究で取り上げた、軸荷重を受ける柱の曲げ塑性座屈問題は、最も基本的な非弾性構造安定問題であり、解析的な

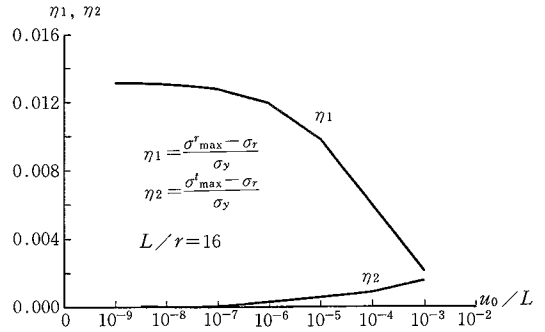


図5 除荷を考慮した最高応力 $\sigma_{max}^r$ 、除荷を無視した最高応力 $\sigma_{max}^i$ および除荷開始応力 $\sigma_r$ の相対関係

考察例も数多い(たとえば、文献5)、6)など)。しかしながら、剛体・ばねモデルの非線形解析アルゴリズムに従えば、板殻を含む一般の構造要素の低自由度塑性座屈シミュレータを系統的に導出可能であり、これらのモデルに同様な解析的考察を加えることにより、工学的に有意義な結果を得られる可能性もあるので、数値シミュレーションと並行して、その方面へも研究の進展を図りたい。

なお、本原稿作成に際し、種々のご助力をいただいたソフトハウス インディード松山光男氏(元ダイヤコンサルタント勤務)に謝意を表します。

(1987年6月9日受理)

参 考 文 献

- 1) 川井忠彦: New Element Models in Discrete Structural Analysis, 日本造船学会論文集, 第141号(1977), 174
- 2) F.R. Shanley: The Column Paradox, J. of Aeronautical Research, Vol. 13, No 12 (1946), 678
- 3) 都井 裕・川井忠彦: 薄肉構造の離散化極限解析 (その3: 平板剛体要素モデルによる安定問題のシミュレーション), 日本造船学会論文集, 第152号 (1982), 441
- 4) 都井 裕・川井忠彦: 薄肉構造の離散化極限解析 (その5: 軸荷重を受ける円筒殻の非軸対称塑性座屈モード), 日本造船学会論文集, 第154号 (1983), 353
- 5) 倉西正嗣: 塑性座屈, 日本機械学会誌, 第58巻, 第435号 (1955), 315
- 6) 山本善之: 初期撓みを有する柱と板の塑性変形を伴う座屈, 造船協会論文集, 第97号 (1955), 57