

改定 $k-\epsilon$ モデル—Revised $k-\epsilon$ Model—

竹光信正*

Nobumasa TAKEMITSU

1. はじめに

乱流場には、そのエネルギーを担う比較的大きなスケールから、エネルギーの散逸に寄与する極めて小さなスケールまで多様なスケールが存在する。したがって、これらを同等に扱うことは、理論的にも数値解析的にも困難を極める。実際、現存する最大のスーパーコンピュータを使って大計算を行ったとしても、エネルギー散逸に寄与する小さなスケールには、遠く及ばない。そこで、工学上重要な壁乱流、流体機械内の乱流、建物周辺の乱流、噴流などの乱流場を予測するのに、小さなスケールの乱れを何らかの方法によってモデル化する方法がとられている。このようなモデルの代表的なものとして、LES、 $k-\epsilon$ モデルをあげることができる。事実、これらのモデルを使った計算例は極めて多い^{1),2)}。

以下、 $k-\epsilon$ モデルに話を限る。従来、上記の種々の乱流場を予測するのにJonesとLaunder³⁾による標準 $k-\epsilon$ モデルが多く使われてきた。それは、境界条件の与え方に困難はあるものの、主として計算の簡便さと得られる結果の妥当性によるものと思われる。しかし、標準 $k-\epsilon$ モデルを、たとえば流体機械内の乱流や噴流に適用すると、実験と異なる結果が得られることはよく知られていることであり、したがってこうした場合には他の乱流モデルが使われてきた。このことを勘案しても、しかし、標準 $k-\epsilon$ モデルが代表的な乱流モデルであることには間違いない。

さて、この標準 $k-\epsilon$ モデルは、モデル定数にかなり敏感である。このことは、うまく計算しないと解が求まらないことを意味している。しかし、実際の物理現象に立ち返って見たとき、モデル定数を数%変化させたら、現象が大きく異なる、つまり結果に数割の差がでてくるとは、とても思えない。すなわち、標準 $k-\epsilon$ モデルには、何か根本的に考え直さなければならないところがあるものと思われる。さらに、 $k-\epsilon$ モデルが正しい乱流モデルであるとしたら、これからよく知られた壁乱流の対数則も導かれ

なければならないはずである。著者は、この立場に立つて標準 $k-\epsilon$ モデルを解析的に研究したところ、標準 $k-\epsilon$ モデルから壁乱流の対数則が導けることを示した⁴⁾。さらに、この研究で標準 $k-\epsilon$ モデルを壁乱流に適用した場合、標準 $k-\epsilon$ モデルは1次の漸近解のみで構成されていて、2次の漸近解は発散項をもつことがわかった。すなわち、標準 $k-\epsilon$ モデルは、0次の漸近解として対数則をもつならば、適正なモデル方程式ではないのである。

以上に示した理由から、標準 $k-\epsilon$ モデルを根本的に見直し、適正で普遍性のある $k-\epsilon$ モデルを構成する必要がある。これが標題の「改定 $k-\epsilon$ モデル」である。以下、改定 $k-\epsilon$ モデルについて述べる。

2. Yoshizawaの統計理論による $k-\epsilon$ モデル^{5),6)}

改定 $k-\epsilon$ モデルの原形として、Yoshizawa^{5),6)}による統計理論の結果を使う。Yoshizawaの理論的研究によると、時空間に関する展開パラメータの1次の項までの近似で $k-\epsilon$ モデルは、

$$\frac{DU_i}{Dt} = \frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_j}, \quad (1)$$

$$D = \frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{Dk}{Dt} = P - \epsilon + E_D, \quad (3)$$

$$\frac{D\epsilon}{Dt} = C_{\epsilon p} \frac{\epsilon}{k} P - C_{\epsilon D} \frac{\epsilon^2}{k} + \gamma_{\epsilon k} \frac{\epsilon}{k} E_D, \quad (4)$$

$$P = R_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}, \quad (5)$$

$$E_D = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(C_{kk} \frac{k^2}{\epsilon} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(C_{k\epsilon} \frac{k^3}{\epsilon^2} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right). \quad (6)$$

と書ける。ここで、 U_i は平均流の速度ベクトル ($i=1, 2, 3$), x_i は位置ベクトル, t は時間, D/Dt はLagrange微分, ρ は流体の密度, p は平均流の圧力, D は膨脹速度を表し、くり返し下つき添字については、1から3まで

*東京大学生産技術研究所 第1部

の和をとるものとする。また、 k は乱流エネルギー、 ϵ はエネルギー散逸率で、擾乱速度ベクトル u_i と流体の動粘性率 ν を使うとそれぞれ

$$k = \frac{1}{2} \langle u_i u_i \rangle, \quad \epsilon = \nu \langle \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \rangle \quad (7, 8)$$

で定義される。 $\langle \rangle$ はアンサンブル平均を表す。

式(1)における R_{ij} はReynolds応力で、通常

$$R_{ij} = -\langle u_i u_j \rangle = -\frac{2}{3} k \delta_{ij} + \nu_e \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (9)$$

とモデル化されている。ただし、 δ_{ij} はKroneckerのデルタ記号で、 ν_e はうず粘性率である。うず粘性率 ν_e は、乱流エネルギー k と、エネルギー散逸率 ϵ を使って、

$$\nu_e = C_\nu \frac{k^2}{\epsilon}, \quad C_\nu = \text{const}, \quad (10)$$

と表せる。また、式(3)における P と E_D は、それぞれ乱流エネルギーの発生項、拡散項である。式(4)、(6)における C_{ϵ_p} 、 C_{ϵ_D} 、 $\gamma_{\epsilon k}$ 、 C_{kk} 、 $C_{k\epsilon}$ はモデル定数で、統計理論では、

$$C_{\epsilon_p} = C_{\epsilon_D} \approx 1.7, \quad \gamma_{\epsilon k} \approx 1.7, \quad C_{kk} \approx 1.27, \\ C_{k\epsilon} \approx -0.72 \quad (11)$$

と評価されている。

方程式系(1)~(6)と標準 k - ϵ モデルを比較すると、いくつかの相違が見られる。まず、 k 方程式(3)には、 k の拡散項のみならず、 ϵ の拡散項も導入されている(標準 k - ϵ モデルには、 k の拡散項しかない)。この ϵ の拡散項の重要性は、Yoshizawa⁶⁾が初めて明確に指摘したが、従来はこの項の重要性を支持する有力な根拠がなかった。著者の研究⁴⁾によると、この項は k - ϵ モデルの漸近解が y のべきに展開できるとすると、漸近解が発散しないためには必要不可欠な項である。次に、 ϵ 方程式(4)を見ると、標準 k - ϵ モデルとの相違はやはり拡散項にあり、統計理論からは、 ϵ の拡散項のみならず k の拡散項も必要なことが示唆されている(標準 k - ϵ モデルには、 ϵ の拡散項しかない)。ただ、不幸なことに、統計理論から導かれる結果は、 $C_{\epsilon_p} = C_{\epsilon_D} = \gamma_{\epsilon k}$ であるので、 $D/Dt = 0$ である流れ場(たとえば、2次元平行平板間の流れ場)では k 方程式と ϵ 方程式は独立でない。これは高次の近似を考慮することによって解決できると考えられている⁷⁾。また、統計理論から導かれる結果では、 ϵ 方程式の ϵ の拡散項の係数は負である。高次の項まで考慮して本当に負であるかどうかは、いまのところわからないが、実際の計算では数値的不安定をひきおこす。

以上のことを考慮して、 ϵ 方程式についてさらに考察する。

3. 改定 k - ϵ モデル⁸⁾

壁乱流の場合、実験結果⁹⁾もLESの結果¹⁰⁾も壁近傍の乱流エネルギーのバランスをみると、拡散項の影響は小さい。このことから、ただちに ϵ 方程式の拡散項の影響も小さいとするのは、もちろん検討の余地がある。しかし、物理的に ϵ の拡散項のみ、乱流エネルギーの発生項と消滅項と同じ大きさのオーダーであるとは考えにくい(標準 k - ϵ モデルではそうなっている)。そこで、 ϵ 方程式においても、 ϵ の拡散項は小さいはずであるという立場からモデルを考え直してみる。

式(4)を書き直して、

$$\frac{D\epsilon}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(C_{\epsilon 1} \nu_e \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right) + C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon}{k} P - C_{\epsilon 3} \frac{\epsilon^2}{k} \\ - \frac{\epsilon}{k} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(C_{\epsilon 4} \nu_e \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) - C_{\epsilon 5} \frac{\nu_e}{\epsilon} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right)^2 \\ + C_{\epsilon 6} \frac{\nu_e}{k} \left(\frac{\partial k}{\partial x_j} \right) \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right) - C_{\epsilon 7} \left(\frac{\partial k}{\partial x_j} \right)^2 \quad (12)$$

と書く。漸近解を使って、式(12)の各項を評価すると、2次元平行平板間の乱流場(Fig. 1参照)で、 y の小さいところからの近似では、

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\nu_e \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right) \sim O(y^{-2}), \quad \frac{\epsilon}{k} P \sim O(y^{-2}), \quad \frac{\epsilon^2}{k} \sim O(y^{-2}), \\ \frac{\epsilon}{k} \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu_e \frac{\partial k}{\partial y} \right) \sim O(y^{-1}), \quad \frac{\nu_e}{\epsilon} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right)^2 \sim O(y^{-2}), \\ \frac{\nu_e}{k} \left(\frac{\partial k}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right) \sim O(y^{-1}), \quad \left(\frac{\partial k}{\partial y} \right)^2 \sim O(y^0) \quad (13)$$

となる。この評価から、 ϵ の小さいところで ϵ の拡散項がききすぎないようにするためには、 $\partial(\nu_e \partial \epsilon / \partial y) / \partial y$ の項のほかに、 $(\nu_e / \epsilon) (\partial \epsilon / \partial y)^2$ の項も必要であることがわかる。実際に漸近解を代入すると、

$$\alpha(C_{\epsilon 1} - C_{\epsilon 5}) + C_{\epsilon 2} - C_{\epsilon 3} = 0 \quad (14) \\ \alpha = \kappa^2 / \sqrt{C_\nu}, \quad \kappa: \text{Kármán定数}$$

が得られる。 α はある範囲の大きさをもった定数である

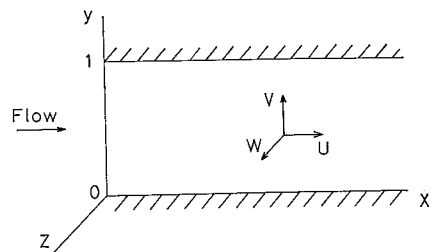


Fig. 1 Coordinate system

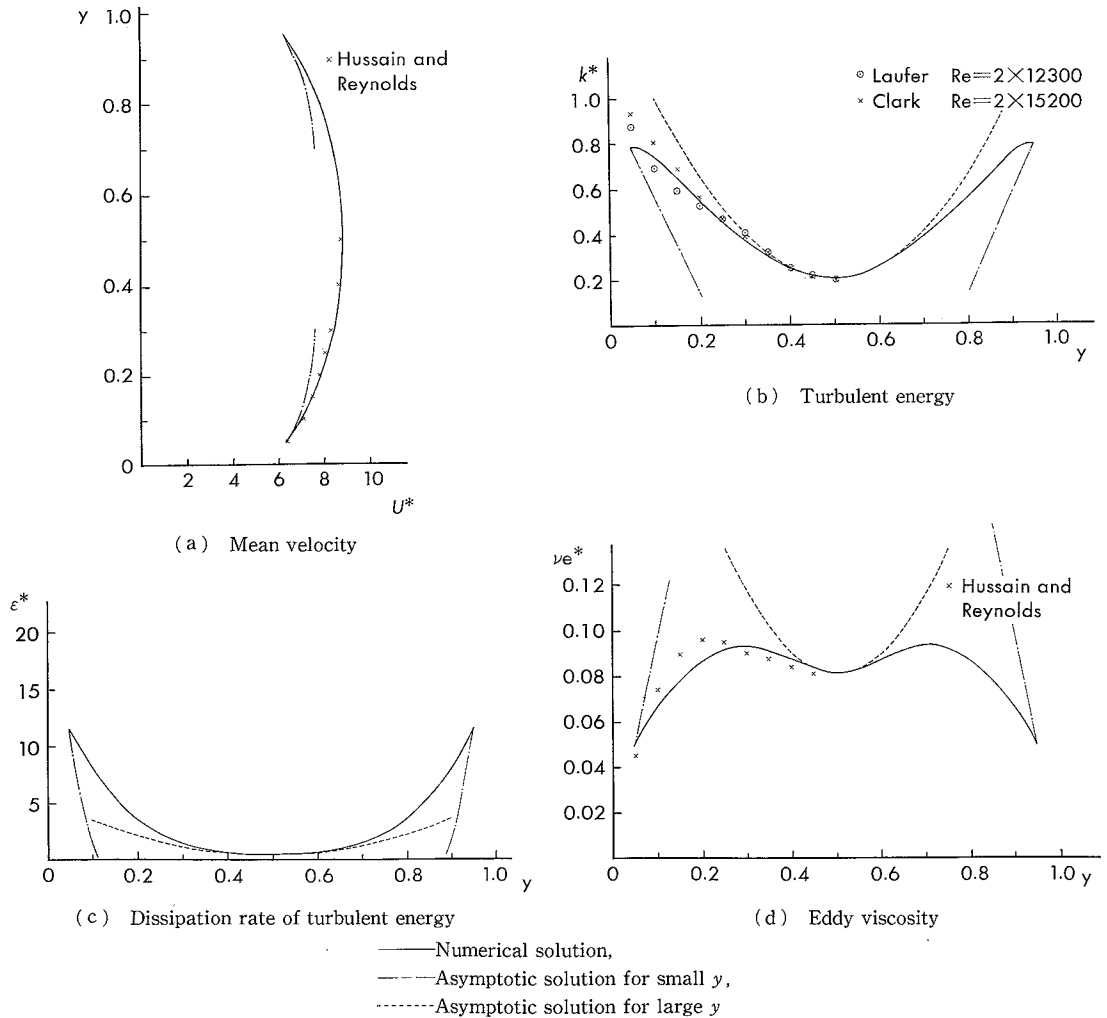


Fig. 2 A typical numerical and asymptotic solution

($C_{k1} = 3, C_{k2} = 1.2, C_{\epsilon1} = C_{\epsilon4} = C_{\epsilon5} = 1, C_{\epsilon2} = C_{\epsilon3} = 2.0, C_{\epsilon6} = C_{\epsilon7} = 0$)

から、式(14)が恒等的に成り立つためには、

$$C_{\epsilon1} = C_{\epsilon5}, C_{\epsilon2} = C_{\epsilon3} \quad (15)$$

でなければならない。

次に、式(12)を格子乱流に適用すると、

$$C_{\epsilon2} \approx 2, C_{\epsilon1} - C_{\epsilon4} + C_{\epsilon6} - C_{\epsilon7}/2C_v \approx 0 \quad (16)$$

の関係がでてくる。したがって、モデル定数 $C_{\epsilon1} \sim C_{\epsilon7}$ のうち、3つを何らかの方法で定めればよい。

k - ϵ モデルは、連立方程式であるから、 ϵ 方程式からだけではこれ以上のことは何も言えない。しかし、以上の簡単な考察から ϵ 方程式の具体的な形が与えられたから、

改定 k - ϵ モデルの具体的な形を書き下すと、

$$\frac{DU_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_j} \quad (17)$$

$$D = \frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{Dk}{Dt} = & \frac{\partial}{\partial x_j} \left(C_{k1} \nu_e \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + P - \epsilon \\ & - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(C_{k2} \nu_e \frac{k}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right) \end{aligned} \quad (19)$$

$$\frac{D\epsilon}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(C_{\epsilon1} \nu_e \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right) + C_{\epsilon2} \frac{\epsilon}{k} P - C_{\epsilon3} \frac{\epsilon^2}{k}$$

研究速報

$$-\frac{\varepsilon}{k} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(C_{\varepsilon 4} \nu_e \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) - C_{\varepsilon 5} \frac{\nu_e}{\varepsilon} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right)^2 + C_{\varepsilon 6} \frac{\nu_e}{k} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) \left(\frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + C_{\varepsilon 7} \left(\frac{\partial k}{\partial x_j} \right)^2 \quad (20)$$

$$\nu_e = C_\nu \frac{K^2}{\varepsilon} \quad (21)$$

$$R_{ij} = -\frac{2}{3} k \delta_{ij} + \nu_e \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (22)$$

$$P = R_{ij} \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \quad (23)$$

となる。ここで、 C_{k1} , C_{k2} , $C_{\varepsilon 1} \sim C_{\varepsilon 7}$, C_ν はモデル定数で、(15), (16)から

$$\begin{aligned} C_{k1} &\simeq 2 C_{k2}, \quad C_{\varepsilon 2} = C_{\varepsilon 3} \simeq 2 \\ C_{\varepsilon 1} &= C_{\varepsilon 5}, \quad C_{\varepsilon 1} - C_{\varepsilon 4} + C_{\varepsilon 6} - C_{\varepsilon 7} / 2 C_\nu \simeq 0 \end{aligned} \quad (24)$$

の関係がある。

方程式系(17)~(23)を2次元平行平板間の乱流場に適用すると、よく知られた対数則がでてくることを解析的に示すことができる⁸⁾。この解と実験データを使って、モデル定数を評価すると、

$$\begin{aligned} 1.0 &\leq C_{k1} \leq O(10), \quad 0.4 \leq C_{k2} / C_{k1} \leq 0.6, \\ 1.0 &\leq C_{\varepsilon 1} = C_{\varepsilon 5} \leq O(10), \quad C_{\varepsilon 2} = C_{\varepsilon 3} \simeq 2, \\ 0 &\leq C_{\varepsilon 4} \leq O(10), \quad -10 \leq C_{\varepsilon 6} \leq 10, \\ -0.5 &\leq C_{\varepsilon 7} \leq 0.5 \end{aligned} \quad (25)$$

となる。

4. 数 値 計 算 例

Fig. 2 (a)~(b)に $R_\tau = 2 \times 13800$, $U_\tau = 0.0464$ としたときの計算例を示す。ただし、モデル定数は、

$$\left. \begin{aligned} \kappa &= 0.4088, \quad C_\nu = 0.08654, \\ C_{k1} &= 3, \quad C_{k2} = 1.2, \quad C_{\varepsilon 1} = C_{\varepsilon 4} = C_{\varepsilon 5} = 1, \\ C_{\varepsilon 2} &= C_{\varepsilon 3} = 2, \quad C_{\varepsilon 6} = C_{\varepsilon 7} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

とし、境界条件は、1次の漸近解で与えた。

これらの図からわかるように、実験結果と、計算結果

はよい一致を示す。とくに、乱流エネルギー k の分布に y の小さいところでピーク値をもつこと、うず粘性率の分布が実験とよい一致をみるのが特徴的で、これらのことは標準 k - ε モデルでは得られないものである。なお、2次元平行平板の乱流場の場合には、この例のように、 $C_{\varepsilon 6} = C_{\varepsilon 7} = 0$ として実験とよい一致が得られるが、たとえば

$$\begin{aligned} C_{k1} &= 4, \quad C_{k2} = 1.6, \quad C_{\varepsilon 1} = C_{\varepsilon 5} = 6, \\ C_{\varepsilon 2} &= C_{\varepsilon 3} = 2, \quad C_{\varepsilon 4} = 8, \quad C_{\varepsilon 6} = 2, \quad C_{\varepsilon 7} = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

としても、実験とよく一致する解が得られる。

5. 結 言

適正で普遍性のある改定 k - ε モデルの原形を構成した。各モデル定数は、噴流など他の流れ場に適用してさらに最適化すべきものである。

謝 辞

本研究を進めるにあたり、本所NST(乱流数値シミュレーション)研究グループの御支持と御討論を戴きました。とくに、吉澤徹助教授には貴重な御討論を戴きました。ここに記して厚く感謝致します。(1987年5月7日受理)

参 考 文 献

- 1) 生産研究, vol. 38, No. 12 (1986).
- 2) Brodshaw, P.ほか2名, Engineering Calculation Methods for Turbulent Flow, (1981), Academic Press Inc., London.
- 3) Jones, W. P. and Launder, B. E., Int. J. Heat and Mass Transfer, 15 (1972), 301.
- 4) 竹光, 文献1)のp. 601; 竹光, 機論, 投稿中; Takemitsu, N., J. Fluid Engineering, submitted.
- 5) Yoshizawa, A., Phys. Fluids, 30-3 (1987), 628.
- 6) Yoshizawa, A., J. Phys. Soc. Jpn., 51-7 (1982), 2326.
- 7) 吉澤, 私信.
- 8) 竹光, 機論, 投稿中; Takemitsu, N., J. Fluid Engineering, submitted.
- 9) Hinze, J. O., Turbulence, (1975), McGraw-Hill, New York.
- 10) Horiuti, K., J. Comput. Phys., to appear.

研究速報