

鉄筋コンクリート薄肉構造の離散化極限解析 (その1) ——コンクリート平板剛体要素モデルの誘導——

Discrete Limit Analysis of Thin-Walled Reinforced Concrete Structures (Part 1)
——Derivation of the flat rigid plate element for concrete structures——

都 井 裕*・井 根 達比古*・川 井 忠 彦**
Yutaka TOI, Tatsuhiko INE and Tadahiko KAWAI

1. 序

鉄筋コンクリート構造の崩壊解析は、非常に複雑であり通常の連続体力学に基づく解析手法ではその挙動を詳細に追跡することは極めて困難であると言われている。川井は、このような強非線形問題の解析のための新離散化モデルとして1976年「Rigid Bodies-Spring Model」(以下RBSMと呼ぶ)と称する一連の離散化極限解析モデルを提案した。

鉄筋コンクリート構造に対するRBSMの応用としては、すでに壁板のせん断破壊問題などの平面問題に対する解析が試みられており、鉄筋の異方性の取り扱い、コンクリートの脆性破壊のモデル化(引張亀裂と圧縮破壊におけるひずみ軟化特性の考慮)などに関する先駆的研究成果が得られているが³⁾、一般の鉄筋コンクリート板殻構造に対するRBSMの応用はいまだなされていない。

コンクリートシェル構造は今後海洋あるいはエネルギー関連の機器・構造物としても広汎な利用が予想されており⁴⁾、極限強度解析において効果的な新離散化モデルであるRBSMの応用を試みることは意義深いものと考えられる。

そこで本研究では、すでに都井・川井により開発されている薄肉構造解析のための平板剛体要素モデル^{1),2)}に、鉄筋コンクリート板殻構造の崩壊シミュレーションのためのアルゴリズムを追加し、数値計算例を通じ、その有効性について考察したい。本報告ではその第1報として、コンクリート材料のモデル化に関する部分について述べる。

2. 平板剛体要素モデルの定式化

Total Lagrange流の増分理論に基づく、有限変形問題に対する平板剛体要素モデルの定式化の一般的手順は、文献2)に詳しく述べられているので、ここでは鉄筋コンクリート構造への応用を念頭に、簡単にその概要を説

*東京大学生産技術研究所 第2部

**東京大学名誉教授

明する。

2.1 諸座標系の定義

定式化に必要な座標系はFig.1とFig.2に示される5座標系である。すなわち、各節点の空間的な位置を定める全体座標系(0; x, y, z), 各平板剛体要素の面内変位成分を定義するための要素座標系(5; x_A, y_A, z_A), (6; x_B, y_B, z_B), 各節点における面外変位を定義するための節点座標系(i; z_i) (i=1, 2, 3, 4), 剛体要素間の相対変位成分を定義するための要素境界座標系(M; x', y', z') および鉄筋軸の方向を定めるための鉄筋軸座標系(M; x^r, y^r, z^r)である。これらはいずれも直角座標系である。これらの局所座標系の原点は肉厚中央面に設けられ、z軸は法線方向、x, y軸は接線方向を定義している。鉄筋軸座標系以外の座標系の定め方は、文献1)に詳細に述べられている。鉄筋軸座標系については、要素境界上で定義されz^r軸と要素境界座標系のz'軸は一致すると仮定する。また、鉄筋軸方向をy^r軸、鉄筋軸直角方向をx^r軸とする。

2.2 要素境界の剛性特性

(i) 要素の剛体変位関数

要素Aの要素座標表示された剛体変位関数は、次式により与えられる。

$$\left. \begin{aligned} u_A(x_A, y_A, z_A) &= a_2^A z_A - a_3^A y_A + a_4^A \\ &\quad - (a_2^A)^2 x_A / 2 + a_1^A a_2^A y_A / 2 \\ v_A(x_A, y_A, z_A) &= a_5^A x_A - a_1^A z_A + a_6^A \\ &\quad - (a_1^A)^2 y_A / 2 + a_1^A a_2^A x_A / 2 \\ w_A(x_A, y_A, z_A) &= a_1^A y_A - a_2^A x_A + a_6^A \end{aligned} \right\} (1)$$

ここに、未知数a₁^A, a₂^A, a₃^Aは要素座標系におけるx_A, y_A, z_A軸まわりの回転変位であり、a₄^A, a₅^A, a₆^Aはx_A, y_A, z_A軸方向の並進変位である。要素Bの剛体変位関数は、(1)式における添字AをBとして表す。

(ii) 変位自由度

面外せん断変形とねじり変形を無視することを前提として、変位自由度としては、各節点(Fig.1における点1

研究速報

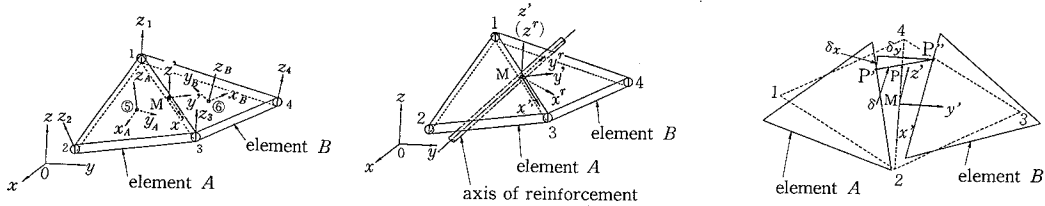


Fig. 1 Flat rigid plate element Fig. 2 Reinforcement axis coordinates Fig. 3 Definition of relative displacements

～点4)に節点座標軸方向の横たわみの自由度 w_1, w_2, w_3, w_4 , 要素座標原点(通常は要素重心点, Fig. 1)における点5と点6)に要素座標系による面内変位の自由度 $(u_A)_5, (v_A)_5, (\theta_A)_5, (u_B)_6, (v_B)_6, (\theta_B)_6$ を設定する。これらの変位自由度と $a_i^A, a_i^B, (i=1, 2, \dots, 6)$ の關係は次式のように表される。

$$\{a\} = [A]\{u\}$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} \{a\}^t &= \llbracket a_1^A a_2^A \dots a_6^A a_1^B a_2^B \dots a_6^B \rrbracket \\ \{u\}^t &= \llbracket w_1 w_2 w_3 w_4 (u_A)_5 (v_A)_5 (\theta_A)_5 \\ &\quad (u_B)_6 (v_B)_6 (\theta_B)_6 \rrbracket \end{aligned} \right\} (2)$$

各変位自由度をいずれも平板要素中央面上に設ければ、(2)式における $[A]$ マトリックスとして文献1)のTable 2をそのまま用いることができる。

(iii) 相対変位

鉄筋コンクリート構造の一般的な非線形解析では、肉厚方向の塑性域あるいは亀裂の進展過程を考慮する必要性から、要素境界断面上の各点Pにおける並進変位成分を用い要素間相対変位を定義する。非線形項まで含めた相対変位増分 $\Delta\delta_x, \Delta\delta_y$ は次式のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \{\Delta d^*\} &= \{\Delta d(\text{linear})\} + \{\overline{\Delta d}(\text{non linear})\} \\ &= [B]\{\Delta a\} + \{\overline{\Delta d}\} \end{aligned} \right\} (3)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} \{\Delta d^*\}^t &= \llbracket \Delta\delta_x^* \Delta\delta_y^* \rrbracket \\ \{\Delta d\}^t &= \llbracket \Delta\delta_x \Delta\delta_y \rrbracket, \{\overline{\Delta d}\}^t = \llbracket \overline{\Delta\delta_x} \overline{\Delta\delta_y} \rrbracket \end{aligned} \right\}$$

δ_x および δ_y はFig. 3に示すようにそれぞれ要素境界座標系 x' 軸および y' 軸方向に定義されている。また、(3)式中の $[B]$ および $\{\overline{\Delta d}\}$ の具体形は文献2)のTable 1および(15)式に示されている。

(iv) 応力

要素境界面上の各点Pにおける応力増分は(3)式に与えられている相対変位増分の線形成分 $\{\Delta d\}$ にばね定数を乗ずることにより計算される。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} \{\Delta s\} &= [D]\{\Delta d\} \\ \{\Delta s\}^t &= \llbracket \tau \sigma \rrbracket, [D] = \begin{Bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{Bmatrix} \end{aligned} \right\} (4)$$

(4)式の τ は面内せん断応力, σ は境界断面法線方向の直応力を意味する。

(v) 増分形剛性方程式

要素境界断面 (S_{AB}) に対する増分形の仮想仕事式は、次式のように表せる。

$$\left. \begin{aligned} \int_{S_{AB}} \{ \Delta\tau\delta(\Delta\delta_x) + \Delta\sigma\delta(\Delta\delta_y) + \tau\delta(\overline{\Delta\delta_x}) \\ + \sigma\delta(\overline{\Delta\delta_y}) \} dx' dz' \\ = \llbracket \delta(\Delta u) \rrbracket \{ \Delta f \} + \llbracket \llbracket \delta(\Delta u) \rrbracket \{ f \} \\ - \int_{S_{AB}} \{ \tau\delta(\Delta\delta_x) + \sigma\delta(\Delta\delta_y) \} dx' dz' \end{aligned} \right\} (5)$$

すでに導いた(2), (3), (4)の諸關係式を(5)式に代入して整理すると、次の増分形剛性方程式を得る。

$$\left. \begin{aligned} ([k] + [k_G])\{\Delta u\} &= \{\Delta f\} + \{f_r\} \\ [k] &= \int_{S_{AB}} ([A]'[B]'[D][B][A]) dx' dz' \\ [k_G] &= \int_{S_{AB}} \{ [A]'([k_G(\tau)] + [k_G(\sigma)]) \\ &\quad [A] \} dx' dz' \\ \{f_r\} &= \{f\} - \int_{S_{AB}} ([A]'[B]'\{s\}) dx' dz' \end{aligned} \right\} (6)$$

(6)式における $[k]$ は初期変形の影響を含む増分剛性マトリックス, $[k_G]$ は初期応力マトリックスであり, $[k_G(\tau)]$ および $[k_G(\sigma)]$ の具体形は文献2)のTable 2に示されている。 $\{f\}$ および $\{f_r\}$ はそれぞれ外力および不平衡力ベクトルである。

(vi) 断面剛性マトリックスの計算

(6)式の剛性マトリックス $[k]$ および $[k_G]$ は弾性変形のみ場合は陽な形で計算することも可能であるが、塑性変形あるいは亀裂の進展などを含む一般の場合には数値積分により計算することになる。すなわち、境界線方向、肉厚方向の積分点数をそれぞれ M, N とすれば境界断面の接線剛性マトリックス $[k_T]$ は次のように計算される。

$$[k_T] = l_3 H \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N w_{i,j} ([k_{i,j}] + [k_{Gi,j}]) \quad (7)$$

ここに、 l_3 は要素境界長, H は肉厚, $w_{i,j}$ は適当な重み係数, $[k_{i,j}], [k_{Gi,j}]$ は(6)式、被積分項の積分点 (i,j) における値である。

なお、(6)式における不平衡力ベクトル $\{f_r\}$ に対して

も以下に示す同様の数値積分が必要となる。

$$\{f_r\} = \{f\} - I_3 H \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N w_{i,j} [A]^t [B_{i,j}]^t \{s_{i,j}\} \quad (8)$$

2.3 境界要素

構造の境界線上、あるいはシェル曲面における勾配、断面定数、材料定数などの不連続線上には1次元的な剛体要素を設けると都合がよい。これらの場合の剛体線要素と三角形要素間の剛性特性の算定法は、文献1)に示されている。

3. コンクリート材料の構成則のモデル化⁷⁾

本章では、平板剛体要素モデルに対するコンクリート材料の構成則の導入に関し、圧縮挙動と引張挙動の2つの領域に分けて説明する。コンクリートの圧縮挙動は、弾性、完全塑性、圧壊の3つの応力状態によって記述できると仮定し、引張挙動は、弾性、引張亀裂、テンションステイフィング、引張破壊の4つの応力状態によって定義した (Fig. 4を参照されたい)。

3.1 コンクリート材料の弾性構成式

コンクリートに引張亀裂、または圧縮降伏の発生しない状態では、コンクリートは等方均質の弾性体と同様に扱うことができる。(3)式で与えた相対変位増分を用いて、点Pにおけるせん断ひずみ増分 $\Delta\gamma$ と直ひずみ増分 $\Delta\varepsilon$ を次のように近似する。

$$\left. \begin{aligned} \Delta\gamma &= 2 \Delta\delta_x / (d_5 + d_6) \\ \Delta\varepsilon &= \Delta\delta_y / (d_5 + d_6) \end{aligned} \right\} (9)$$

ここに、 d_5 と d_6 はそれぞれFig. 1における要素座標系原点5および6から境界辺13に降ろした垂線の長さである。(9)式を平面応力問題の構成式に代入し、(4)式の関係を用いると弾性状態のばね定数は次式のように決定される。

$$\left. \begin{aligned} k_{11}^e &= E / (1 + \nu) (d_5 + d_6) \\ k_{22}^e &= E / (1 - \nu^2) (d_5 + d_6) \\ k_{12}^e &= k_{21}^e = 0 \end{aligned} \right\} (10)$$

3.2 コンクリートの圧縮挙動

コンクリートの圧縮側非線形挙動は、(i)降伏条件、(ii)塑性流れ則、(iii)圧壊条件の3つの塑性理論によって表現できる。

(i) 降伏条件

一般に、降伏条件は応力不変量の関数によって表されており、本研究では次のDrucker・Prager型の関数を採用した。

$$f(I_1, J_2) = [\beta(3J_2) + \alpha I_1]^{1/2} = \sigma_0 \quad (11)$$

ここで、 I_1 と J_2 は応力の不変量 α と β は材料定数であり、 σ_0 は単軸降伏応力である。本研究で用いた薄肉構造解析のための平板剛体要素モデルでは要素境界において σ_x と

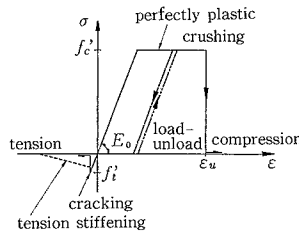


Fig. 4 One-dimensional representation of the concrete constitutive model

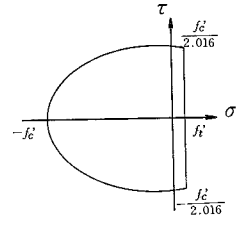


Fig. 5 Yield condition of concrete for RBMS

σ_x , τ_{xz} と τ_{yz} は存在しないので、降伏条件は次のように表される。

$$f(\sigma) = \{\beta(\sigma^2 + 3\tau^2) + \alpha \cdot \sigma\}^{1/2} = \sigma_0 \quad (12)$$

α および β の値としては、Kupferの研究⁹⁾に基づく次式の値を使用する。

$$\alpha = 0.355\sigma_0, \quad \beta = 1.355 \quad (13)$$

後述するtension cutoffを考慮した(12)、(13)式の降伏曲面をFig. 5に示す。ただし、ここでは完全塑性体を考えているため、 σ_0 は最大圧縮応力 f'_c と等しいと仮定している。

(ii) 塑性流れ則

圧縮塑性領域におけるコンクリートの応力・相対変位関係は、関連流れ則に従うと仮定すると、次のような増分形の関係式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \{\Delta s\} &= [D^P] \{\Delta d\} \\ \text{ここに} \\ [D^P] &= [D^e] \frac{[D^e] \{\partial f / \partial s\} + A \partial f / \partial s + [D^e]}{A + \partial f / \partial s + [D^e] \{\partial f / \partial s\}} \end{aligned} \right\} (14)$$

$[D^P]$ は、圧縮塑性状態での応力・相対変位関係マトリックスである。Aはひずみ硬化係数(H')に対応するものであり、次式により定まる。

$$A = H' / (d_5 + d_6) \quad (15)$$

ただし、

$$H' = \Delta\bar{\sigma} / \Delta\bar{\varepsilon}_p = EE_T / (E - E_T) \quad (16)$$

ここに、 E_T は接線係数である。

(iii) 圧壊条件

コンクリートの圧壊は、ひずみによって制御される現象である。現在のところ、多軸応力下での圧壊に関するひずみ、応力状態の実験データは非常に少なく、便宜的な方法として応力で記述される降伏条件を単にひずみ成分で置き換え、ひずみによる圧壊基準として使用することが多い。すなわち、

$$\beta(3J_2') + \alpha(I_1') = \varepsilon_u^2 \quad (17)$$

ここで、 I_1' , J_2' はひずみの不変量であり ε_u は圧壊時の総

研 究 速 報

ひずみ値 (ultimate total strain) である。材料定数 α , β は降伏条件に対し得られている値を用いればよい。二軸応力状態におけるひずみ成分で圧壊条件を表すと

$$1.355(\epsilon^2 + 0.75\gamma^2) + 0.355\epsilon_u \cdot \epsilon = \epsilon_u^2 \quad (18)$$

となる。

3.3 コンクリートの引張挙動

引張応力下のコンクリートの応答は、引張破壊面に達するまで線形弾性と仮定され、等方弾性体の構成関係式によって特性付けられる。引張破壊または亀裂は、最大引張応力基準(いわゆる tension cutoff)により表現され、要素境界面に垂直な応力 (σ) が引張強度 (f_t') に達すると要素境界面に沿って亀裂が形成される。亀裂発生後のコンクリートの応力・相対変位関係は、低減されたせん断弾性係数 G^c を用い、以下のように増分表示できる。

$$\{\Delta s\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{2G^c / (d_s + d_0)}{0} \\ \dots \\ \frac{0}{0} \end{array} \right\} \{\Delta d\} \quad (19)$$

(i) テンションスティフニング

Fig. 4 に示すテンションスティフニング(tension stiffening)時のコンクリートの残存応力は軸ひずみの一次関数とし、亀裂コンクリートの除荷と再負荷は、次式によって与えられる仮の弾性係数 E_i に支配される線形挙動に従うと仮定する (Fig. 6 を参照)。

$$E_i = \alpha f_t' (1 - \epsilon_i / \epsilon_m) / \epsilon_i, \quad \epsilon_i \leq \epsilon_i \leq \epsilon_m \quad (20)$$

ここで、 α , ϵ_m はテンションスティフニングパラメータ (Fig. 6) であり、 ϵ_i は考えている点での引張ひずみの最大値である。

したがって、平板剛体要素モデルにおけるテンションスティフニング過程での直応力 σ は、負荷時および除荷時においてそれぞれ下式により表される。

$$\sigma = \alpha f_t' (1 - \epsilon / \epsilon_m), \quad \epsilon_i \leq \epsilon \leq \epsilon_m \quad (21)$$

または、

$$\sigma = \sigma_i \epsilon / \epsilon_i, \quad \epsilon < \epsilon_i \quad (22)$$

なお、テンションスティフニングの効果は厳密には鉄筋近傍の材料と離れた材料とは異なっていると考えられるが、本研究では薄肉構造を対象としており、肉厚方向には一様なテンションスティフニング効果を仮定した。

(ii) 亀裂面のせん断係数

コンクリートのせん断実験によれば、コンクリートの亀裂面を横断してかなりの量のせん断応力が伝達される。この亀裂面でのせん断伝達機構には骨材の寸法比、鉄筋比、鉄筋径等も関係因子と考えられるが、その第一因子は亀裂幅であることが知られている。本研究では、亀裂せん断係数 (G^c) を亀裂部の引張ひずみの関数であると仮定する⁹⁾。

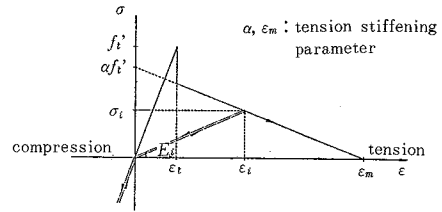


Fig. 6 Loading and unloading behavior of cracked concrete illustrating tension stiffening behavior

$$G^c = \begin{cases} 0.25G(1 - \epsilon/0.004), & 0 \leq \epsilon \leq 0.004 \\ 0, & \epsilon > 0.004 \end{cases} \quad (23)$$

もし、亀裂が閉じるとせん断係数は亀裂のないときの値に回復すると仮定する。

4. 結 言

本報告では、平板剛体要素モデルによる鉄筋コンクリート薄肉構造の離散化極限解析法に関する研究の第1報として、コンクリート材料のモデル化について述べた。すなわち、Drucker・Prager型降伏関数により圧縮降伏、圧壊現象を取り扱い、tension cutoffの概念によって引張亀裂(破壊)を処理する構成式を用いて平板剛体要素モデルの定式化を行った。

第2報では、鉄筋材料の構成則のモデル化および数値例について報告する予定である。(1987年2月24日受理)

参 考 文 献

- 1) 都井, 上田, 川井: 薄肉構造の離散化極限解析(その2) — 一般シェル構造解析のための平板剛体要素モデル —, 日本造船学会論文集, 第151号, (1982), 211
- 2) 都井, 川井: 薄肉構造の離散化極限解析(その3) — 平板剛体要素モデルによる安定問題のシミュレーション —, 日本造船学会論文集, 第152号, (1982), 441
- 3) 川井, 上田, 竹内, 渡辺, 樋口, 毛井: 鉄筋コンクリート構造物の離散化極限解析(その1)~(その3), 生産研究, 第38巻, (1986), 181, 208, 212
- 4) F.K. Kong et al. (editors): Handbook of Structure Concrete, Pitman Books Limited, (1983)
- 5) H. Kupfer, K.H. Hilsdorf and H. Rusch: Behavior of Concrete Under Biaxial Stresses, Proceedings, American Concrete Institute, Vol. 66, No. 8, (1963), 656
- 6) L. Cedolin and S. Dei Poli: Finite Element Studies of Shear Critical R/C Beams, ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division, Vol. 103, No. EM3, (1977), 395
- 7) E. Hinton, D. R. J. Owen: Finite Element Software for Plates and Shells, Pineridge Press, (1984)