

鉄筋コンクリート薄肉構造の離散化極限解析 (その2) ——鉄筋のモデル化および鉄筋コンクリート平板の崩壊解析例——

Discrete Limit Analysis of Thin-Walled Reinforced Concrete Structures (Part 2)

——Modeling of reinforcements and collapse analysis of reinforced concrete slabs——

都 井 裕*・井 根 達比古*・川 井 忠 彦**

Yutaka TOI, Tatsuhiko INE and Tadahiko KAWAI

1. 序

前報¹⁾では、鉄筋コンクリート薄肉構造の離散化極限解析に関する研究の第1報として平板剛体要素モデル^{2),3)}の定式化とコンクリート材料の構成則のモデル化について述べた。本報告では続いて、鉄筋材料の構成則のモデル化および多軸降伏条件の扱いに関する補足事項について述べたうえで、横荷重を受ける鉄筋コンクリート矩形平板の崩壊問題に対する数値解析を行い、実験結果⁴⁾と比較する。

2. 鉄筋材料のモデル化

鉄筋は方向性を有する線材としてコンクリート内に配置されるが、本解析では計算の便宜上、一様厚さの等価な異方性平板要素に置換してその剛性特性を評価する。

鉄筋の異方性は鉄筋軸座標系によって表示し、系のつり合いは要素境界座標系により表示するのが便利であるから、鉄筋の応力、ひずみ、相対変位について鉄筋軸座標系と要素境界座標系との間の変換則を誘導することが必要となる。

2.1 鉄筋応力の変換則

鉄筋軸座標系 ($M; x^r, y^r, z^r$) 表示による鉄筋応力と要素境界座標系 ($M; x', y', z'$) 表示による鉄筋応力との間の変換則は、次式のように表される (Fig. 1 を参照)。

$$\{s\} = |\vec{x'} \cdot \vec{x^r}| [T] \{s_r\} \quad (1)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \{s\}^t &= \begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \end{bmatrix}, \{s_r\}^t = \begin{bmatrix} \tau_r \\ \sigma_r \end{bmatrix} \\ [T] &= \begin{bmatrix} \vec{x'} \cdot \vec{x^r} & \vec{x'} \cdot \vec{y^r} \\ \vec{y'} \cdot \vec{x^r} & \vec{y'} \cdot \vec{y^r} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

(2)式中の \cdot は内積を表す。上式の τ_r と σ_r は鉄筋軸座標系表示による鉄筋のせん断応力と直応力であり、鉄筋の

せん断応力 τ_r は主としてダウエル効果 (dowel effect) によって生ずる。 τ と σ は要素境界座標系表示によるせん断応力と直応力であり、 $[T]$ は座標変換マトリックスである。

2.2 鉄筋ひずみの変換則

鉄筋軸座標系表示による鉄筋の相対変位・ひずみ関係については、従来から金属構造物や地盤などの離散化極限解析で使用されている差分近似に基づく方法^{2),3)}に従い、次式のように定める。

$$\left. \begin{aligned} \gamma_r &= 2 \delta_{rx} / d_s \\ \epsilon_r &= \delta_{ry} / d_s \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ここで、 γ_r と ϵ_r は鉄筋軸座標系表示による鉄筋のせん断ひずみと直ひずみであり、 δ_{rx} と δ_{ry} は鉄筋軸直角方向と平行方向の相対変位である。 d_s は鉄筋の相対変位に関与するひずみの集積長さであり、厳密には隣接要素に含まれる鉄筋長さの1/2を採用するべきであるが、ここではコンクリート部分のモデル化に倣い要素境界の支配長さ $d_s + d_0$ の範囲に含まれる鉄筋軸長を d_s とした (Fig. 2 を参照)。

$$d_s = (d_s + d_0) / |\vec{x'} \cdot \vec{x^r}| \quad (4)$$

要素境界座標系表示による相対変位・ひずみ関係式は前報におけるコンクリート部分の定式化で説明したものと同じである。ひずみの変換則は、相対変位の変換則 (Fig. 3 を参照) :

$$\left. \begin{aligned} \{d_r\} &= [T]^t \{d\} \\ \{d\}^t &= \begin{bmatrix} \delta_x & \delta_y \end{bmatrix}, \{d_r\}^t = \begin{bmatrix} \delta_{rx} & \delta_{ry} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

を基本にし、(3)、(4)式を用いると次のように定められる。

$$\{\epsilon_r\} = [T_d] \{\epsilon\} \quad (6)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} \{\epsilon\}^t &= \begin{bmatrix} \gamma & \epsilon \end{bmatrix}, \{\epsilon_r\}^t = \begin{bmatrix} \gamma_r & \epsilon_r \end{bmatrix} \\ [T_d] &= |\vec{x'} \cdot \vec{x^r}| \begin{bmatrix} \vec{x'} \cdot \vec{x^r} & 2(\vec{y'} \cdot \vec{x^r}) \\ \frac{1}{2}(\vec{x'} \cdot \vec{y^r}) & \vec{y'} \cdot \vec{y^r} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

*東京大学生産技術研究所 第2部

**東京大学名誉教授

研究速報

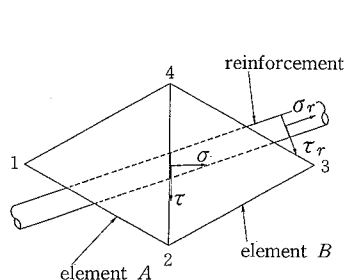


Fig. 1 Stresses on a reinforcement

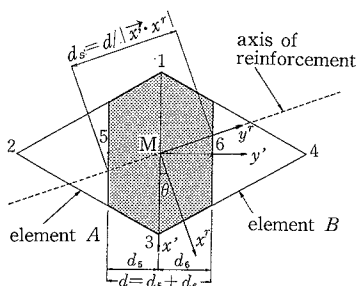
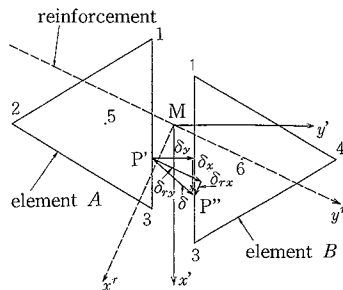
Fig. 2 Determination of d_s 

Fig. 3 Transformation of relative displacements

$\{d\}$ は要素境界座標表示による相対変位, $\{d_r\}$ は鉄筋軸座標表示による相対変位である。また, $\{\varepsilon_r\}$ は鉄筋軸座標系により表示されたひずみであり, $\{\varepsilon\}$ は要素境界座標系表示によるひずみである。

2.3 鉄筋材料の弾性構成式

鉄筋材料の弾性の構成式は, 鉄筋軸座標系で表示すると,

$$\{s_r\} = [D_r^e] \{d_r\} \quad (8)$$

ここに,

$$[D_r^e] = \frac{1}{d_s} \begin{pmatrix} \frac{2\beta G}{0} & \frac{0}{E} \end{pmatrix} \quad (9)$$

ただし, β はダウエル効果係数, G は鉄筋のせん断弾性係数, E は鉄筋のヤング係数である。

(1), (5), (8)式を用いて, 要素境界座標系で鉄筋の弾性構成式を表すと, 次式を得る。

$$\{s\} = |\vec{x}' \cdot \vec{x}'| [T] [D_r^e] [T]^T \{d\} \quad (10)$$

2.4 鉄筋材料の塑性構成式

鉄筋材料は, Mises則に従うと仮定し, 次式の降伏条件を適用する。

$$f(\sigma) = \bar{\sigma} = (\sigma_r^2 + 3\tau_r^2)^{1/2} = f_y \quad (11)$$

ここに, f_y は鉄筋の降伏応力である。

降伏後は関連塑性流れ則に従うと仮定する。剛体・ばねモデルでは, 塑性流れ則は応力と相対変位で記述され, 塑性での応力・相対変位関係が増分形で次のように表される。

$$\{\Delta s_r\} = [D_r^p] \{\Delta d_r\} \quad (12)$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} \{\Delta s_r\}^t &= \{\Delta \tau_r, \Delta \sigma_r\}^t, \{\Delta d_r\}^t = \{\Delta \delta_x, \Delta \delta_y\}^t \\ [D_r^p] &= [D_r^e] - \frac{[D_r^e] \{\partial f / \partial s\} \{\partial f / \partial s\}^T [D_r^e]}{A^* + \{\partial f / \partial s\} [D_r^e] \{\partial f / \partial s\}} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

ここで, A^* はひずみ効果係数 (H') の関数であり, 次式により与えられる。

$$A^* = H' / d_s \quad (14)$$

ひずみ効果係数 (H') は接線係数 (E_T) により次のように表される。

$$H' = EE_T / (E - E_T) \quad (15)$$

3. 平板剛体要素モデルにおける多軸降伏条件のモデル化

3.1 鉄筋材料の降伏条件

剛体・ばねモデルは, 多軸応力状態における固体をいくつかの剛体とこれを接続するばねによって近似する離散化極限解析モデルである。したがって, 応力をばねの反力 (内力) によって評価するものであり, 連続体力学での応力テンソルとは異なり剛体要素境界の表面力ベクトルとして応力が表示されている。そのため, 連続体力学で使用されている材料の降伏条件を平板剛体要素モデルに適用する場合, 応力成分の欠落に伴う特別の注意が必要となる。二次元応力状態に対するMisesの降伏条件式は

$$f(\sigma) = \{(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y) + 3\tau_{xy}^2\}^{1/2} = f_y \quad (16)$$

である。著者の一人の都井は(16)式に対し, 以下の2種類の最大応力値 (σ_m, τ_m) を提示している²⁾。

$$\text{Mises-1} \quad \sigma_m = f_y, \tau_m = f_y / \sqrt{3} \quad (17)$$

$$\text{Mises-2} \quad \sigma_m = 2 / \sqrt{3} f_y, \tau_m = f_y / \sqrt{3} \quad (18)$$

(17)式は(16)式に対して単に $\sigma_x = 0$ とおいて得られた値であり, 他方(18)式は σ_x の存在を意識し, σ_m が主応力 (σ_1) の最大値 ($2 / \sqrt{3} f_y$) まで増大することができると考えて導かれた剛体・ばねモデル用の降伏応力である (Fig. 4を参照)。本研究でもMises則:

$$(\tau / \tau_m)^2 + (\sigma / \sigma_m)^2 = 1 \quad (19)$$

において, (17)式, (18)式の両者を仮定した (Fig. 5を参照)。すなわち,

$$\text{Mises-1} \quad (3\tau_r^2 + \sigma_r^2)^{1/2} = f_y \quad (20)$$

$$\text{Mises-2} \quad (3\tau_r^2 + \frac{3}{4}\sigma_r^2)^{1/2} = f_y \quad (21)$$

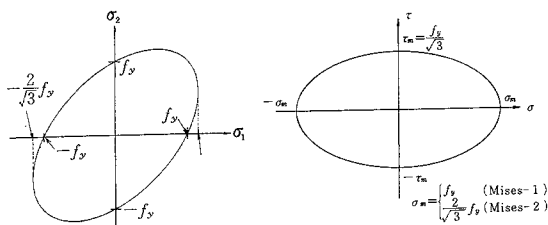


Fig. 4 Mises law on the σ_1 - σ_2 plane Fig. 5 Mises law for RBMS

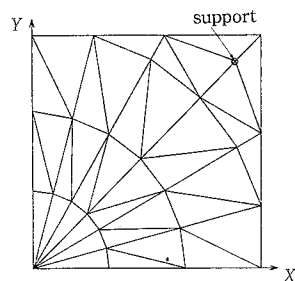
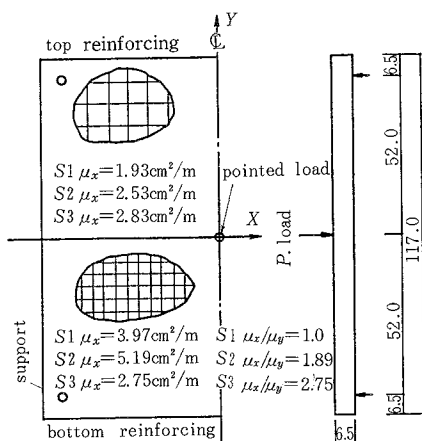


Fig. 7 Mesh subdivision



Material Property of Concrete and Reinforcement

Material Properties (cm;KN;rad)			
Concrete		Steel	
Young's Modulus	$E_c=1640.0$	Young's Modulus	$E_s=20100.0$
Poisson's Ratio	$\nu=0.0$	Yield Stress	$f_y=60.0$
Ult. Comp. st.	$f'_c=4.30$	Tangent Modulus	$E_t=0.0$
Ult. Tens. st.	$f'_t=0.30$	Shear Modules	$G=7730.8$
Ult. Comp. strn.	$\epsilon_u=0.0035$	Angle with x-axis	$\theta_1=0.0$
Tension Stiff. Coeff.	$\alpha=1.0$	Angle with x-axis	$\theta_2=1.57$
Tension Stiff. Coeff.	$\epsilon_m=0.0020$	Dowell effect	$\beta=0.005$

Fig. 6 Reinforced concrete square plate models

前述したようにMises-1は(16)式のうち剛体・ばねモデルで考慮していない成分を単に無視したものであり、Mises-2は直応力を主応力の取りうる最大値まで増大できるよう修正した降伏条件式である。

3.2 コンクリート材料の圧縮降伏条件

コンクリートの圧縮降伏条件としては前報で述べたよ

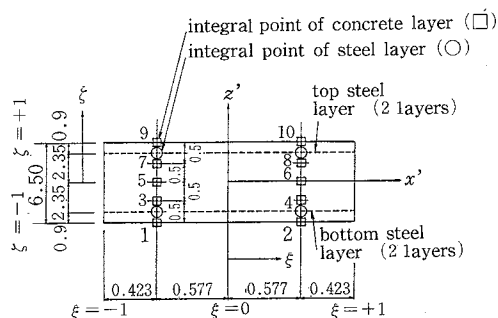


Fig. 8 Layer model of concrete and reinforcement

うにDrucker・Prager型降伏関数を仮定しており、平面応力問題においては次式で表現される。

$$f(\sigma) = \left\{ \beta [(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y) + 3 \tau_{xy}^2] + \alpha (\sigma_x + \sigma_y) \right\}^{1/2} = f'_c \quad (22)$$

ここに

$$\alpha = \alpha' \cdot f'_c, \quad \alpha' = 0.355, \quad \beta = 1.355$$

(22)式で、 f'_c は単軸圧縮降伏応力であり、 α と β は材料定数である。そこで、Mises則と同様の考え方によって剛体・ばねモデル用に(22)式を修正する。(22)式を満たす主応力(σ_1)の最大値は

$$\sigma_1 = c \cdot f'_c \quad (23)$$

ここに、

$$c = -\frac{\alpha'}{3\beta} - \sqrt{\frac{8}{9} \left(\frac{\alpha'}{\beta} \right)^2 + \frac{4}{3\beta}} \quad (24)$$

すなわち、コンクリートの圧縮主応力(σ_1)は、 $\alpha'=0.355$ 、 $\beta=1.355$ のとき(24)式から、 $1.047f'_c$ まで増大することが可能となる。したがってコンクリート材料の圧縮降伏条件として次の2つの形式を定義した。

Drucker・Prager-1

$$\{\beta(3\tau^2 + \sigma^2) + \alpha\sigma^2\}^{1/2} = f'_c \quad (25)$$

Drucker・Prager-2

$$\{\beta[3\tau^2 + (\sigma/c)^2] + \alpha(\sigma/c)\}^{1/2} = f'_c \quad (26)$$

研究速報

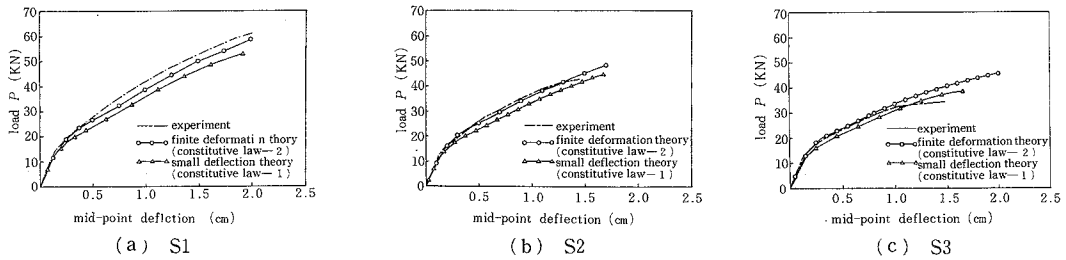


Fig. 9 Load-central deflection response for the plates S1, S2 and S3

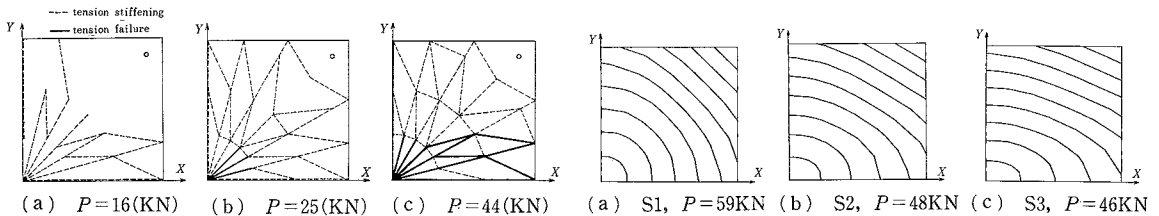


Fig. 10 Crack propagation on the lower surface of the plate S2 (finite deformation theory, constitutive law-2)

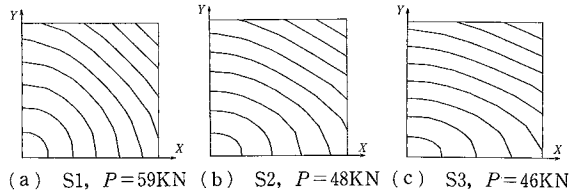


Fig. 11 Deformation of plates S1, S2, and S3 (contour lines for lateral deflection, finite deformation theory, constitutive law-2)

(25)式は、(22)式で剛体・ばねモデルにおいて欠落している応力成分を無視したものであり、(26)式は直応力が主応力の最大値まで増大できるよう修正したものである。

4. 鉄筋コンクリート平板の崩壊解析例

前報および本報で記述した定式化に基づいて、Duddeckら⁴⁾により実験が行われた中央集中荷重を受ける四隅角部支持の鉄筋コンクリート矩形平板の崩壊解析を実施し、実験結果と比較して、本解析法の妥当性を考察した。

この実験は膨張性粘板岩による軽量コンクリートからなる供試体（諸元についてはFig. 6を参照）を用い、鉛直方向支持、水平方向自由の境界条件に従って行われている。供試体の配筋は、Fig. 6に示すように合計の鉄筋量を一定とし、 x , y の2方向の鉄筋量を変化させた3種類(S1, S2, S3)である。Fig. 7に要素分割図、Fig. 8に層分割図を示す。

Fig. 9～11は解析結果であり、それぞれ荷重・変位曲線、亀裂進展図および横変位の等高線図が示されている。これらの結果を見ると、荷重と平板中央の横たわみの関係は、実験結果と良好に一致しており、横たわみ(w)の分布も鉄筋の異方性をよく表現している。平板下面の亀裂も鉄筋量の少ない方向に多く発生しており解の合理性が確認できる。

5. 結 言

本研究では、平板剛体要素モデルによる鉄筋コンクリート薄肉構造の離散化極限解析アルゴリズムを構成し、中央集中荷重を受ける鉄筋コンクリート矩形平板の崩壊解析を行い実験結果と良好に対応していることを確認した。

本解析法では、亀裂線、塑性関節線などが陽な形でモデル化されているため、ある程度実験結果を参照した低自由度のモデル化で効率的な極限強度解析を行える可能性がある。

(1987年2月24日受理)

参 考 文 献

- 1) 都井, 井根, 川井: 鉄筋コンクリート薄肉構造の離散化極限解析(その1) —コンクリート平板剛体要素モデルの誘導—, 生産研究, 第39巻, 第5号, (1982), 111
- 2) 都井, 上田, 川井: 薄肉構造の離散化極限解析(その2) —一般シェル構造解析のための平板剛体要素モデル—, 日本造船学会論文集, 第151号, (1982), 211
- 3) 都井, 川井: 薄肉構造の離散化極限解析(その3) —平板剛体要素モデルによる安定問題のシミュレーション—, 日本造船学会論文集, 第152号, (1982), 441
- 4) H. Duddeck, G. Griebenow and G. Shaper: Material and Time Dependent Nonlinear Behaviour of Cracked Reinforced Concrete Slabs; in Nonlinear Behaviour of Reinforced Concrete Spatial Structures, Vol. 1, Preliminary Report IASS Symposium held in Darmstadt, Eds. G. Mehlhorn et al. Werner-Verlag, (1978), 101