

一般曲線座標系による室内気流数値シミュレーション その1

—— $k-\epsilon$ モデルにおける境界条件等の定式化を中心として——

Numerical Simulation of Room Air Flow with Generalized Curvedline Coordinates Part 1

村 上 周 三*・加 藤 信 介**・石 田 義 洋***・持 田 灯*

Shuzo MURAKAMI, Shinsuke KATO, Yoshihiro ISHIDA and Akashi MOCHIDA

1. は じ め に

流れのシミュレーションでは、一般曲線座標系導入により、任意形状Gridを用いた領域分割による計算が可能となり、また、一般曲線座標において高精度の風上差分を適用したシミュレーションも可能である^{1),2)}。室内の気流解析においては、解析対象がたとえばホール等の大空間に見られるように曲線によって被われた複雑な形状をしていることも多く、一般曲線座標系に拡張した乱流の数値シミュレーションが有効になると思われる。本研究では、その第一段階として $k-\epsilon$ モデルによる二次元室内気流の数値シミュレーションを検討する。第1報では $k-\epsilon$ モデルの一般曲線座標系への変換、コントロールボリューム法による離散化とともに、 $k-\epsilon$ モデルの任意形状を有する境界における境界条件式を示す。

2. 記 号

- x, y : 物理座標
 - ξ, η : 計算座標
 - u, v : x, y 方向の速度
 - U, V : u, v の反変ベクトル
 - ρ : 総圧(静圧と $2/3k$ の和を密度で割った値)
 - k : 乱流エネルギー
 - ϵ : エネルギー散逸
 - ν_t : 渦動粘性係数
- 添字
- $\square_{i,j}$: $\xi=i, \eta=j$ の節点における離散値
 - \square^n : 時間ステップ n の値
 - \square : 緩和計算のイテレーション回数
 - $\square_x, \square_y, \square_t$: x, y, t による偏微分
 - $\square_\xi, \square_\eta$: ξ, η による偏微分

- \square^t : 接線方向成分
- \square^x, \square^y : x, y 方向成分
- (\square, \square) : ベクトル量を示す

3. 一般曲線座標系

物理座標系 (x, y) に対して計算座標系 (ξ, η) を定義して次のような変換を行う (図-1)。

$$\xi = \xi(x, y), \eta = \eta(x, y) \quad (1)$$

次にヤコビアンを次式で定義すると ξ_x, ξ_y 等は次の式の関係で結ばれる³⁾。

$$J = (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi) = (\xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x)^{-1} \quad (2)$$

$$\xi_x = y_\eta / J, \xi_y = -x_\eta / J, \eta_x = -y_\xi / J, \eta_y = x_\xi / J \quad (3)$$

4. 支配方程式の変換

連続式を変換すると式(4)となる⁴⁾

$$u_x + v_y = [\{ J(\xi_x u + \xi_y v) \}_\xi + \{ J(\eta_x u + \eta_y v) \}_\eta] / J = 0 \quad (4)$$

ここで、 u, v の反変ベクトルを次式で定義する。

$$U = \xi_x u + \xi_y v, \quad V = \eta_x u + \eta_y v \quad (5)$$

反変ベクトル U は物理空間における速度 (u, v) の ξ =一定曲線と直交する方向成分に比例し、 V は η =一定曲線と直交する方向成分に比例している⁵⁾。

運動方程式(6)、(7)は式(8)、(9)のように変換される。

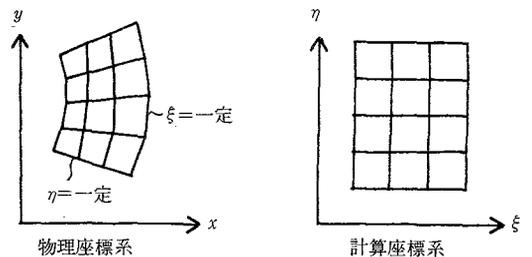


図-1 座標変換 物理座標系 計算座標系

*東京大学生産技術研究所 付属計測技術開発センター

**東京大学生産技術研究所 第5部

***東京大学生産技術研究所 研究生(鹿島建設㈱)

研究速報

$$u_t + (uu)_x + (uv)_y = -p_x + \{2 v_t u_x\}_x + \{v_t(u_y + v_x)\}_y \quad (6)$$

$$v_t + (uv)_x + (vv)_y = -p_y + \{v_t(u_y + v_x)\}_x + \{2 v_t u_y\}_y \quad (7)$$

$$J u_t + (J U u)_\xi + (J V u)_\eta = -(J \xi_x p)_\xi - (J \eta_x p)_\eta + [J v_t \{ (2 \xi_x^2 + \xi_y^2) u_\xi + (2 \xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y) u_\eta + \xi_x \xi_y v_\xi + \xi_y \eta_x v_\eta \}]_\xi + [J v_t \{ (2 \eta_x \xi_x + \eta_y \xi_y) u_\xi + (2 \eta_x^2 + \eta_y^2) u_\eta + \eta_y \xi_x v_\xi + \eta_x \eta_y v_\eta \}]_\eta \quad (8)$$

$$J v_t + (J U v)_\xi + (J V v)_\eta = -(J \xi_y p)_\xi - (J \eta_y p)_\eta + [J v_t \{ (\xi_x^2 + 2 \xi_y^2) v_\xi + (\xi_x \eta_x + 2 \xi_y \eta_y) v_\eta + \xi_x \xi_y u_\xi + \xi_x \eta_y u_\eta \}]_\xi + [J v_t \{ (\eta_x \xi_x + 2 \eta_y \xi_y) v_\xi + (\eta_x^2 + 2 \eta_y^2) v_\eta + \eta_x \xi_y u_\xi + \eta_x \eta_y u_\eta \}]_\eta \quad (9)$$

kの輸送方程式(10)は式(11)となる。

$$k_t + (ku)_x + (kv)_y = (v_t k_x / \sigma_1)_x + (v_t k_y / \sigma_1)_y + v_t S - \epsilon \quad (10)$$

$$J k_t + (J U k)_\xi + (J V k)_\eta = [J v_t \{ (\xi_x^2 + \xi_y^2) k_\xi + (\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y) k_\eta \} / \sigma_1]_\xi + [J v_t \{ (\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y) k_\xi + (\eta_x^2 + \eta_y^2) k_\eta \} / \sigma_1]_\eta + J v_t S - J \epsilon \quad (11)$$

生産項中のSは式(12)で計算する。

$$S = 2 u_x^2 + 2 v_y^2 + (u_y + v_x)^2 = 2 \{ (J \xi_x u)_\xi + (J \eta_x u)_\eta \} / J^2 + 2 \{ (J \xi_y v)_\xi + (J \eta_y v)_\eta \} / J^2 + \{ (J \xi_y u + J \xi_x v)_\xi + (J \eta_y u + J \eta_x v)_\eta \} / J^2 \quad (12)$$

εの輸送方程式(13)は同様に(14)式に変換される。

$$\epsilon_t + (\epsilon u)_x + (\epsilon v)_y = (v_t \epsilon_x / \sigma_2)_x + (v_t \epsilon_y / \sigma_2)_y + c_1 \epsilon v_t S / k - c_2 \epsilon^2 / k \quad (13)$$

$$J \epsilon_t + (J U \epsilon)_\xi + (J V \epsilon)_\eta = [J v_t \{ (\xi_x^2 + \xi_y^2) \epsilon_\xi + (\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y) \epsilon_\eta \} / \sigma_2]_\xi + [J v_t \{ (\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y) \epsilon_\xi + (\eta_x^2 + \eta_y^2) \epsilon_\eta \} / \sigma_2]_\eta + J c_1 \epsilon v_t S / k - J c_2 \epsilon^2 / k \quad (14)$$

ただし、 $v_t = C_D k^2 / \epsilon$

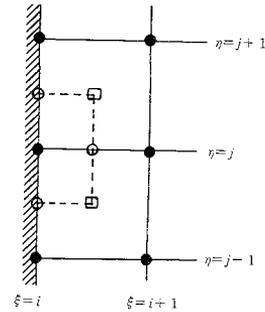


図-3 1/2形状コントロールボリューム

モデルの定数は以下の値を使用する。

$$\sigma_1 = 1.0, \sigma_2 = 1.3, c_D = 0.09, c_1 = 1.44, c_2 = 1.92$$

5. 離散化

離散化においては、速度と圧力を同一点で定義する Regular Gridを用いる²⁾。図2に示す節点において、 u, v, p を定義し、節点の中間を通る界面に囲まれたコントロールボリュームで各支配方程式を積分する。支配方程式中の移流項、拡散項はすべて (ξ, η) 系において保存的に表されており、それぞれ式(15)のようにまとめられる。これらの積分は有限なコントロールボリュームへの Fluxの流入を評価するものである^{2,3)}。

$$F = (R_\xi + S_\eta) / J \quad (15)$$

$$\int_V F dV = \int_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} \int_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} F J d\xi d\eta = \int_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} \int_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} (R_\xi + S_\eta) d\xi d\eta = R(i+1/2, j) - R(i-1/2, j) + S(i, j+1/2) - S(i, j-1/2) \quad (16)$$

ここで $\Delta\xi = \Delta\eta = 1$ とした。以下同様とする。

また、コントロールボリュームの界面では、 R, S の値は中点の値(図の白丸)で代表されるものとした⁴⁾。図3のような境界に接する1/2形状のコントロールボリュームでは、

$$\int_V F dV = R(i+1/2, j) - R(i, j) + \{S(i, j+1/2) - S(i, j-1/2)\} / 2 \quad (17)$$

となる。1/4形状のコントロールボリュームについても同様に積分範囲を修正する。

各支配方程式に式(16)、(17)のような積分を適用すれば、各節点ごとに離散値に対する方程式が得られる。

また、偏微分が陽に作用していない項に対する積分は節点の値で代表させる。たとえば、生産項の積分は、

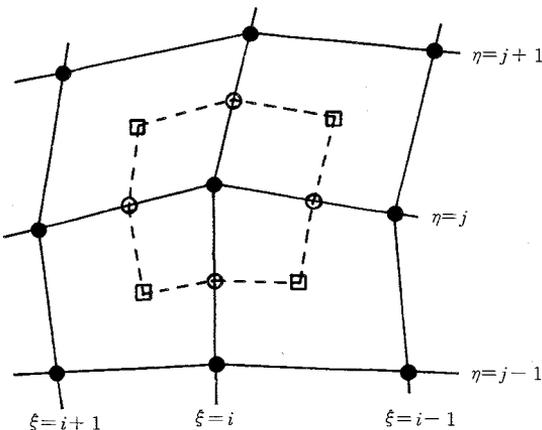


図-2 Regular Gridとコントロールボリューム

$$\int_V v_i S dV = \int_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} \int_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} v_i S J d\xi d\eta = (J v_i S)_{i,j} \quad (18)$$

となる。

移流項については式(19)で定義するQUICKスキームを用いる^{3,4)}。

すなわち式(16)の

$R(i-1/2, j)$ は次式で算出する。

$$R(i-1/2, j) = \{ (JU)_{i-1/2, j} \} \{ (u_{i,j} + u_{i-1,j}) / 2 - CURVN / 8 + CURVT / 24 \} \quad (19)$$

ただし、 $U_{i-1/2, j} > 0$ の場合は、

$$CURVN = u_{i,j} - 2 u_{i-1,j} + u_{i-2,j} \quad (20)$$

$$CURVT = u_{i-1,j-1} - 2 u_{i-1,j} + u_{i-1,j+1} \quad (21)$$

$U_{i-1/2, j} < 0$ の場合は、

$$CURVN = u_{i+1,j} - 2 u_{i,j} + u_{i-1,j} \quad (22)$$

$$CURVT = u_{i,j-1} - 2 u_{i,j} + u_{i,j+1} \quad (23)$$

となる。

k および ε の移流項に対しても同様のQUICKスキームを適用する。

6. 境界条件

以下、壁面は $\xi = \text{一定}$ 曲線に一致する場合を取り扱う。

6.1 速度の境界条件 (指数則分布)

図4に示すように、境界面に平行な速度成分 u^t が指数則に従って分布しているものとする。

$$u^t = U^H (N / \Delta H)^m \quad (24)$$

U^H は交点 A における速度の境界に平行な速度成分であり、次式で近似的に与えられる。

$$U^H = u^t_{i+1,j} + \{ \partial u^t / \partial T \} \Delta T = u^t_{i+1,j} + [\{ u^t_{\xi} (\xi_x, \xi_y) + u^t_{\eta} (\eta_x, \eta_y) \}]_{i+1,j} \cdot (t^x, t^y)] \Delta T \quad (25)$$

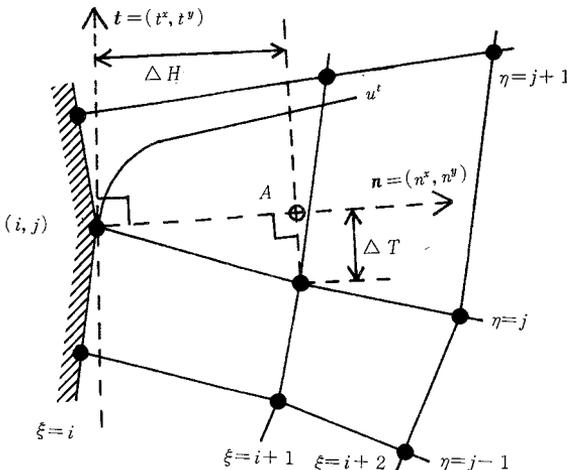


図-4 境界近傍の速度分布

研究速報

$$\Delta H = (x_{\xi}, y_{\xi}) \cdot (n^x, n^y) \quad (26)$$

$$\Delta T = -(x_{\xi}, y_{\xi}) \cdot (t^x, t^y) \quad (27)$$

節点 (i, j) における u^t の法線方向勾配が点 A における式(24)の値に等しいとおくことにより、次式が得られる。

$$u^t_{i,j} = [\{ (\xi_x, \xi_y)_{i,j} \cdot (n^x, n^y) u^t_{i+1,j} + (\eta_x, \eta_y)_{i,j} \cdot (n^x, n^y) (u^t_{i,j+1} - u^t_{i,j-1}) / 2 - (m / \Delta H) \{ u^t_{i+1,j} + \Delta T (\xi_x, \xi_y)_{i+1,j} \cdot (t^x, t^y) u^t_{i+2,j} / 2 + \Delta T (\eta_x, \eta_y)_{i+1,j} \cdot (t^x, t^y) (u^t_{i+1,j+1} - u^t_{i+1,j-1}) / 2 \} \} / \{ (\xi_x, \xi_y)_{i,j} \cdot (n^x, n^y) - (m / \Delta H) \Delta T (\xi_x, \xi_y)_{i+1,j} \cdot (t^x, t^y) / 2 \}] \quad (28)$$

$$u_{i,j} = t^x u^t_{i,j} \quad (29)$$

$$v_{i,j} = t^y u^t_{i,j} \quad (30)$$

$$n^x = t^y = y_{\eta} / (x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2)^{1/2} \quad (31)$$

$$n^y = -t^x = -x_{\eta} / (x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2)^{1/2} \quad (32)$$

(n^x, n^y) は節点 (i, j) における境界面の単位法線ベクトル、 (t^x, t^y) は単位接線ベクトルである。

6.2 乱流エネルギーの境界条件 (free slip条件)

乱流エネルギー k の壁面における free slip 条件は式(33)で得られる。

$$\partial k / \partial N = (\xi_x, \xi_y) \cdot (n^x, n^y) k_{\xi} + (\eta_x, \eta_y)_{i,j} \cdot (n^x, n^y) k_{\eta} = 0 \quad (33)$$

したがって、壁面上の $k_{i,j}$ は式(34)で定まる。

$$k_{i,j} = k_{i+1,j} + r (k_{i,j+1} - k_{i,j-1}) / 2 \quad (34)$$

$$r = \{ (\eta_x, \eta_y)_{i,j} \cdot (n^x, n^y) \} / \{ (\xi_x, \xi_y)_{i,j} \cdot (n^x, n^y) \} \quad (35)$$

r は Grid の細長比に比例する。これが大きくなるとイテレーションの過程において振動を起こすことがあるので、壁面近傍の Grid の構成には注意が必要である。

6.3 エネルギー散逸の境界条件 (壁法則)

節点 (i, j) から適当な長さ h だけ法線方向に上げた位置における乱流エネルギー k^h は、free slip 条件により $k_{i,j}$ に等しい。よってこの点におけるエネルギー散逸 ε^h は

$$\varepsilon^h = \{ (c_D)^{3/4} / (\alpha h) \} k_{i,j}^{3/2} \quad (36)$$

となり、法線方向の勾配を次式で与えれば、

$$\partial \varepsilon / \partial N = (\xi_x, \xi_y)_{i,j} \cdot (n^x, n^y) \varepsilon_{\xi} + (\eta_x, \eta_y)_{i,j} \cdot (n^x, n^y) \varepsilon_{\eta} = (\varepsilon^h - \varepsilon_{i,j}) / h \quad (37)$$

壁面上の $\varepsilon_{i,j}$ は

$$\varepsilon_{i,j} = \{ \varepsilon_{i+1,j} / \Delta H - \varepsilon^h / h + (\eta_x, \eta_y)_{i,j} \cdot (n^x, n^y) (\varepsilon_{i,j+1} - \varepsilon_{i,j-1}) \} / (1 / \Delta H - 1 / h) \quad (38)$$

となる。 h は任意に設定できるが、ここでは $h = \Delta H / 2$ としている。

7. む す び

$k-\varepsilon$ 型 2 方程式モデルを一般曲線座標系へ拡張し、Regular Grid による離散化の方法および境界条件を示

研究速報

境界条件式は任意形状を許すために式が煩雑になったが、境界面の近傍において境界に直交するようなGridを用いれば、式は簡略化される。

謝 辞

本研究に当たり、名古屋大学プラズマ研究所武本行正氏が作成・公開したプログラムを参考にさせていただいている。記して謝意を表する。(1987年3月10日受理)

参 考 文 献

- 1) 小林敏雄, 森西洋平: Boundary-fit曲線座標変換法による流体差分解析, 生産研究38(1986), 12
- 2) 武本行正, 中村佳朗, 山辺春夫: ライブラリプログラムの紹介(72), 京都大学大型計算機センター広報Vol. 19, No4, (1986)
- 3) B.P. Leonard: THE QUICK ALGORITHM: A UNIFORMLY THIRD-ORDER FINITE DIFFERENCE METHOD FOR HIGHLY CONVECTIVE FLOWS, Computer Methods in Fluids, Pentech Press, 1980, 159-195
- 4) 村上周三, 加藤信介, 須山喜美: 室内気流数値解析の診断システム, 生産研究 38(1986), 12

注1) 一般曲線座標系は任意のGrid分割が可能であるが、以下の制限がある。

$\xi=i$ と $\eta=j$ 曲線の交点, すなわち節点 (i, j) においてヤコビアンを0とおくと,

$$J = (x_{\xi} y_{\eta} - x_{\eta} y_{\xi}) = (x_{i+1,j} - x_{i-1,j})(y_{i,j+1} - y_{i,j-1})/4 - (x_{i,j+1} - x_{i,j-1})(y_{i+1,j} - y_{i-1,j})/4 = 0 \tag{補1}$$

$$(y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) / (x_{i,j+1} - x_{i,j-1}) = (y_{i+1,j} - y_{i-1,j}) / (x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) \tag{補2}$$

(補2)は点 (i, j) で交わる ξ =一定曲線と η =一定曲線上の4点 $(i \pm 1, j), (i, j \pm 1)$ が、一直線上にあるための必要十分条件である。これは逆に $J \neq 0$ のためには ξ =一定曲線と η =一定曲線が、その交点近傍で一直線上にあってはならないことを示している。特に領域境界線の交点(たとえば、節点(1, 1)など)で注意をはらう必要がある。

注2) 図1の ξ =一定曲線上で、 ξ の全微分をとると

$$d\xi = \xi_x dx + \xi_y dy = 0 \tag{補3}$$

となる。ここで (dx, dy) は ξ =一定曲線の接線であるから、ベクトル (ξ_x, ξ_y) は ξ =一定曲線に直交する。同様にベクトル (η_x, η_y) は η =一定曲線に直交する。

p_x のような偏微分は、次式のように変換される。

$$p_x = \xi_x p_{\xi} + \eta_x p_{\eta} = \{ (J_{\xi} p)_{\xi} + (J_{\eta} p)_{\eta} \} / J \tag{補4}$$

積分は関数 $f(x, y) = f(\xi, \eta)$ に対して、

$$\int_V(x, y) dV = J \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} f(x, y) dx dy = \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} f(\xi, \eta) J d\xi d\eta \tag{補5}$$

となる。

注3) たとえば、連続式のコントロールボリュームの積分より得られた結果は、コントロールボリュームに出入する流量の合計を示し、格子点における発散を計算するものではない。

注4) 連続式の積分については、精度を上げた計算を行う。コントロールボリュームの界面の速度を中点だけでなく各界面の交点 $(i \pm 1/2, j \pm 1/2)$ (図2の四角)にも代表させて、積分する。図2の領域内部では、

$$D_{i,j} = (3/8) \{ (U'_{i+1,j} - U'_{i-1,j}) + (V'_{i,j+1} - V'_{i,j-1}) \} + (1/16) \{ (U'_{i+1,j+1} + U'_{i+1,j-1}) - (U'_{i-1,j+1} + U'_{i-1,j-1}) + (V'_{i-1,j+1} + V'_{i+1,j+1}) - (V'_{i-1,j-1} + V'_{i+1,j-1}) \} \tag{補6}$$

図3のような1/2形状のコントロールボリュームでは、

$$D_{i,j} = (3/8) (U'_{i+1,j} - U'_{i,j}) + (1/16) (U'_{i+1,j-1} + U'_{i+1,j+1} - U'_{i,j-1} - U'_{i,j+1}) + (3/16) (V'_{i,j+1} - V'_{i,j-1}) + (1/16) (V'_{i+1,j+1} - V'_{i+1,j-1}) \tag{補7}$$

となる。これは吹出口近傍の壁面等、境界面の速度が急変する場所で、中点のみの値で代表すると連続式の精度が著しく落ちるためである。ここで、 $U'_{i,j} = (JU)_{i,j}$, $V'_{i,j} = (JV)_{i,j}$ とおいた。

注5) 境界面上においてはつぎの関係がある。

$$\Delta H = x_{\xi} n^x + y_{\xi} n^y = (x_{\xi} y_{\eta} - y_{\xi} x_{\eta}) / (x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2)^{1/2} = J / (x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2)^{1/2} \tag{補8}$$

$$(\xi_x, \xi_y) \cdot (n^x, n^y) = (\xi_x y_{\eta} - \xi_y x_{\eta}) / (x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2)^{1/2} = (x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2)^{1/2} / J = 1 / \Delta H \tag{補9}$$

$$(\eta_x, \eta_y) \cdot (n^x, n^y) = (-y_{\xi} x_{\xi}) \cdot (n^x, n^y) / J = \Delta L (-y_{\xi} / \Delta L, x_{\xi} / \Delta L) \cdot (n^x, n^y) / J \tag{補10}$$

$$\Delta L = (x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2)^{1/2} = \{ (x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2 \}^{1/2} \tag{補11}$$

ここで ΔL は節点 (i, j) と $(i+1, j)$ の距離である。よって式(35)は以下となる。

$$r = \langle \Delta L / \Delta W \rangle (-y_{\xi} / \Delta L, x_{\xi} / \Delta L) \cdot (n^x, n^y) \tag{補12}$$

$$\Delta W = (x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2)^{1/2} \tag{補13}$$

ここで $(-y_{\xi} / \Delta L, x_{\xi} / \Delta L)$ は節点 (i, j) を通る η =一定曲線の法線であり、この近傍でGridが直交していれば、 (n^x, n^y) と一致し $r=0$ となる。また ΔW は節点 $(i, j-1)$ と $(i, j+1)$ 間の距離の半分である。したがって r は細長比に比例する。