

一般曲線座標系による室内気流数値シミュレーション その2
——圧力に関する境界条件の定式化と2次元乱流の解析例——

Numerical Simulation of Room Air Flow with Generalized Curvedlinear Coordinates Part 2

村 上 周 三*・加 藤 信 介**・石 田 義 洋***・持 田 灯*
Shuzo MURAKAMI, Shinsuke KATO, Yoshihiro ISHIDA and Akashi MOCHIDA

1. は じ め に

本報では一般座標表示された2次元k-ε型2方程式モデルの数値解法, および計算結果を報告する. 圧力に関するポアソン方程式は境界条件を厳密に評価して定式化を行っている.

2. 時 間 積 分 法

運動方程式を以下のように近似して時間積分を行う.

$$v^{n+1} = v^n + \Delta t \{ -\nabla p^{n+1/2} + H^{n+1/2} + (1 - \delta) F^n + \delta F^{n+1} \} \quad (1)$$

$$H^{n+1/2} = -(3/2) h^n + (1/2) h^{n-1} \quad (2)$$

hは前報(19)式に示す移流項の離散表示であり, QUICKスキームを組み込み, 時間に関しAdams Bashforth法を適用する. Fは拡散項であり, 前報式(8), (9)に示した, Δtは時間きざみ, δはSemi-implicitスキームを与える定数で0 < δ < 1の範囲をとる. 式(1)中の既知量をまとめて

$$\tilde{v} = v^n + \Delta t \{ H^{n+1/2} + (1 - \delta) F^n \} \quad (3)$$

とおき, これを式(1)に代入する.

$$v^{n+1} = \tilde{v} + \Delta t \{ -\nabla p^{n+1/2} + \delta F^{n+1} \} \quad (4)$$

式(4)の発散をとり, 連続式

$$\nabla \cdot v^{n+1} = 0 \quad (5)$$

を代入すると, 次のポアソン方程式が得られる.

$$\nabla^2 p^{n+1/2} = \nabla \cdot \tilde{v} / \Delta t + \delta \nabla \cdot F^{n+1} \quad (6)$$

ここでv̄は既知であるが, Fⁿ⁺¹は未知であるから, 式(6)は運動方程式(4)と連立させて解かねばはらない.

kおよびεの輸送方程式は, 拡散項についてはFull-implicitスキーム(運動方程式中のδ=1に対応)で解を求めることにする. 移流項については運動方程式と同様にAdams-Bashforth法を適用する.

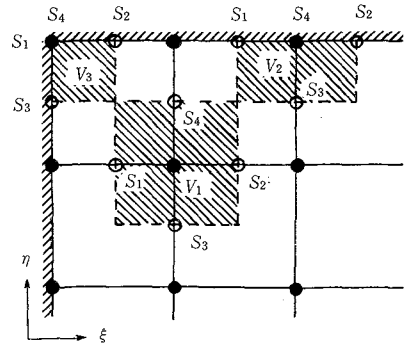


図-1 コントロールボリュームと界面

3. 圧力のポアソン方程式

式(6)を(ξ, η)系に変換して, 図1に示すコントロールボリュームで積分すると次式が得られる.

$$\begin{aligned} & - \int_{S_1} J((\xi_x, \xi_y) \cdot \{ \nabla p^{n+1/2} - (\tilde{v} / \Delta t + \delta F^{n+1}) \}) d\eta \\ & + \int_{S_2} J((\xi_x, \xi_y) \cdot \{ \nabla p^{n+1/2} - (\tilde{v} / \Delta t + \delta F^{n+1}) \}) d\eta \\ & - \int_{S_3} J((\eta_x, \eta_y) \cdot \{ \nabla p^{n+1/2} - (\tilde{v} / \Delta t + \delta F^{n+1}) \}) d\xi \\ & + \int_{S_4} J((\eta_x, \eta_y) \cdot \{ \nabla p^{n+1/2} - (\tilde{v} / \Delta t + \delta F^{n+1}) \}) d\xi \\ & = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

S₁, S₂, S₃, S₄はコントロールボリュームの界面である. 1/2形状のコントロールボリュームV₂におけるS₄の積分は, 運動方程式(4)を用いて次のように簡略化される.

$$\begin{aligned} & - \int_{S_4} J((\eta_x, \eta_y) \cdot \{ \nabla p^{n+1/2} - (\tilde{v} / \Delta t + \delta F^{n+1}) \}) d\xi \\ & = - \int_{S_4} J((\eta_x, \eta_y) \cdot \{ v^{n+1} / \Delta t \}) d\xi \\ & = - \int_{S_4} J(V^{n+1} / \Delta t) d\xi \end{aligned} \quad (8)$$

一般に境界面においては, ポアソン方程式に速度の境界条件を適用することができる.

次のような変数を定義する.

$$\begin{aligned} & (\text{界面と境界が一致しない場合}) \\ & \tilde{U} = (\xi_x, \xi_y) \cdot \{ \tilde{v} + \delta \Delta t F^{n+1} \}, \\ & \tilde{V} = (\eta_x, \eta_y) \cdot \{ \tilde{v} + \delta \Delta t F^{n+1} \} \end{aligned} \quad (9)$$

(界面と境界が一致する場合)

*東京大学生産技術研究所 付属計測技術開発センター

**東京大学生産技術研究所 第5部

***東京大学生産技術研究所 研究生(鹿島建設株)

研究速報

$$\tilde{U} = U, \tilde{V} = V \quad (10)$$

前報の(補6), (補7)のU, Vの代わりに, この \tilde{U} , \tilde{V} を用いて連続式の積分を行う.

$$\begin{aligned} \tilde{D} = & -\int_{s_1} \{J\tilde{U}\} d\eta + \int_{s_2} \{J\tilde{U}\} d\eta \\ & - \int_{s_3} \{J\tilde{V}\} d\xi + \int_{s_4} \{J\tilde{V}\} d\xi \end{aligned} \quad (11)$$

この \tilde{D} を用いて, 式(7)を次のように表す.

$$\begin{aligned} & -L_1 \int_{s_1} J(\xi_x, \xi_y) \cdot \{\nabla p^{n+1/2}\} d\eta \\ & + L_2 \int_{s_2} J(\xi_x, \xi_y) \cdot \{\nabla p^{n+1/2}\} d\eta \\ & - L_3 \int_{s_3} J(\eta_x, \eta_y) \cdot \{\nabla p^{n+1/2}\} d\xi \\ & + L_4 \int_{s_4} J(\eta_x, \eta_y) \cdot \{\nabla p^{n+1/2}\} d\xi = \tilde{D} / \Delta t \end{aligned} \quad (12)$$

ただし, L_i は界面が境界と一致したときの修正係数であり, 次式で与えられる.

$$\begin{aligned} L_1 = & I_1(I_3 + I_4) / 2, \quad L_2 = I_2(I_3 + I_4) / 2, \\ L_3 = & I_3(I_1 + I_2) / 2, \quad L_4 = I_4(I_1 + I_2) / 2 \quad (13) \\ I_i = & 0 : S_i \text{ が境界と一致する場合} \\ & = 1 : S_i \text{ が境界と一致しない場合} \end{aligned}$$

次に圧力項の積分を具体的に表示する.

$$\int_{s(8\pm 1)/2} J(\xi_x, \xi_y) \cdot \{\nabla p^{n+1/2}\} d\eta = [J\{\xi_x^2 + \xi_y^2\} p_\epsilon + (\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y) p_\eta]_{i\pm 1/2, j} \quad (14)$$

$$\int_{s(7\pm 1)/2} J(\eta_x, \eta_y) \cdot \{\nabla p^{n+1/2}\} d\xi = [J\{\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y\} p_\epsilon + (\eta_x^2 + \eta_y^2) p_\eta]_{i, j\pm 1/2} \quad (15)$$

以上のように, 境界面上の節点に対してもポアソン方程式を立てて圧力を解けば, 境界に接する1/2もしくは1/4形状のコントロールボリュームにおいても流量収支のバランスのとれた解を得ることができる.

4. 計算手順

圧力の緩和式を (ξ, η) 系における離散形式で示す. l は緩和計算のステップである. 添字 $(n+1/2)$ は省略する.

$$\begin{aligned} {}^{l+1}p_{i,j} = & {}^l p_{i,j} + \omega \{ \\ & -\{\alpha_{i-1,j}({}^l p_{i,j} - {}^{l+1}p_{i-1,j}) \\ & + \gamma_{i,j}({}^l p_{i,j+1} - {}^{l+1}p_{i,j-1}) \\ & + \gamma_{i-1,j}({}^l p_{i-1,j+1} - {}^{l+1}p_{i-1,j-1})\} L_1 \\ & + \{\alpha_{i,j}({}^l p_{i+1,j} - {}^l p_{i,j}) \\ & + \gamma_{i+1,j}({}^l p_{i+1,j+1} - {}^{l+1}p_{i+1,j-1}) \\ & + \gamma_{i,j}({}^l p_{i,j+1} - {}^{l+1}p_{i,j-1})\} L_2 \\ & - \{\gamma_{i,j}({}^l p_{i+1,j} - {}^{l+1}p_{i-1,j}) \\ & + \gamma_{i,j-1}({}^{l+1}p_{i+1,j-1} - {}^{l+1}p_{i-1,j-1}) \\ & + \beta_{i,j-1}({}^l p_{i,j} - {}^{l+1}p_{i,j-1})\} L_3 \\ & + \{\gamma_{i,j+1}({}^l p_{i+1,j+1} - {}^l p_{i-1,j+1}) \\ & + \gamma_{i,j}({}^l p_{i+1,j} - {}^{l+1}p_{i-1,j}) \\ & + \beta_{i,j}({}^l p_{i,j+1} - {}^l p_{i,j})\} L_4 - \tilde{D} / \Delta t \} \\ & / \{L_1 \alpha_{i-1,j} + L_2 \alpha_{i,j} + L_3 \beta_{i,j-1} + L_4 \beta_{i,j}\} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\alpha_{i,j} = [\{J(\xi_x^2 + \xi_y^2)\}_{i,j} + \{J(\xi_x^2 + \xi_y^2)\}_{i+1,j}] / 2 \quad (17)$$

$$\beta_{i,j} = [\{J(\eta_x^2 + \eta_y^2)\}_{i,j} + \{J(\eta_x^2 + \eta_y^2)\}_{i,j+1}] / 2 \quad (18)$$

$$\gamma_{i,j} = [\{J(\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y)\}_{i,j}] / 4 \quad (19)$$

ω は収束加速係数である.

次に速度の緩和式を示す^(*).

$$\begin{aligned} {}^{l+1}u_{i,j}^{n+1} = & {}^l u_{i,j}^{n+1} + [(-{}^l u_{i,j}^{n+1} + \tilde{u}_{i,j}) / \Delta t \\ & - \{J\xi_x p^{n+1/2}\}_\xi + \{J\eta_x p^{n+1/2}\}_\eta] / J_{i,j} \\ & + \delta \{RX_{i+1/2,j} - RX_{i-1/2,j} + SX_{i,j+1/2} - SX_{i,j-1/2}\} / J_{i,j} \\ & / \{\delta \{RXUG_{i,j} + RXUG_{i-1,j} + SXUY_{i,j} + SXUY_{i,j-1}\} \\ & / J_{i,j} + 1 / \Delta t\} \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} {}^{l+1}v_{i,j}^{n+1} = & {}^l v_{i,j}^{n+1} + [(-{}^l v_{i,j}^{n+1} + \tilde{v}_{i,j}) / \Delta t \\ & - \{J\xi_y p^{n+1/2}\}_\xi + \{J\eta_y p^{n+1/2}\}_\eta] / J_{i,j} \\ & + \delta \{RY_{i+1/2,j} - RY_{i-1/2,j} + SY_{i,j+1/2} - SY_{i,j-1/2}\} / J_{i,j} \\ & / \{\delta \{RYVG_{i,j} + RYVG_{i-1,j} + SYVY_{i,j} + SYVY_{i,j-1}\} \\ & / J_{i,j} + 1 / \Delta t\} \end{aligned} \quad (21)$$

RX, RY, SX, SY は拡散項の成分である. $RXUG, RXVG, SXUY, SYUY$ は注1参照.

次に, k および ϵ の緩和式を示す.

$$\begin{aligned} {}^{l+1}k_{i,j}^{n+1} = & {}^l k_{i,j}^{n+1} + [(-{}^l k_{i,j}^{n+1} + k_\eta^n) / \Delta t \\ & - K_\eta^{n+1/2} + \{QR_{i+1/2,j} - QR_{i-1/2,j} + QS_{i,j+1/2} \\ & - QS_{i,j-1/2}\} / (J_{i,j} \sigma_1) + \nu_{i,j}^n S_{i,j}^{n+1} - {}^l \epsilon_{i,j}^{n+1} / \\ & \{\{RG_{i,j} + RG_{i-1,j} + SY_{i,j} + SY_{i,j-1}\} / (J_{i,j} \sigma_1) + 1 / \Delta t\} \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} {}^{l+1}\epsilon_{i,j}^{n+1} = & {}^l \epsilon_{i,j}^{n+1} + [(-{}^l \epsilon_{i,j}^{n+1} + \epsilon_\eta^n) / \Delta t \\ & - E_{i,j}^{n+1/2} + \{ER_{i+1/2,j} - ER_{i-1/2,j} + ES_{i,j+1/2} \\ & - ES_{i,j-1/2}\} / (J_{i,j} \sigma_2) \\ & + c_1 {}^l \epsilon_{i,j} \nu_{i,j}^n S_{i,j}^{n+1} / {}^{l+1}k_{i,j}^{n+1} - c_2 ({}^l \epsilon_{i,j}^{n+1})^2 / {}^{l+1}k_{i,j}^{n+1} / \\ & \{\{RG_{i,j} + RG_{i-1,j} + SY_{i,j} + SY_{i,j-1}\} / (J_{i,j} \sigma_2) \\ & - c_1 \nu_{i,j}^n S_{i,j}^{n+1} / {}^{l+1}k_{i,j}^{n+1} \\ & + c_2 {}^l \epsilon_{i,j}^{n+1} / {}^{l+1}k_{i,j}^{n+1} + 1 / \Delta t\} \end{aligned} \quad (23)$$

K, E は移流項であり, QR, QS, ER, ES は拡散項の成分である^(*).

本解法は定常解を得ることだけを目的としている. し

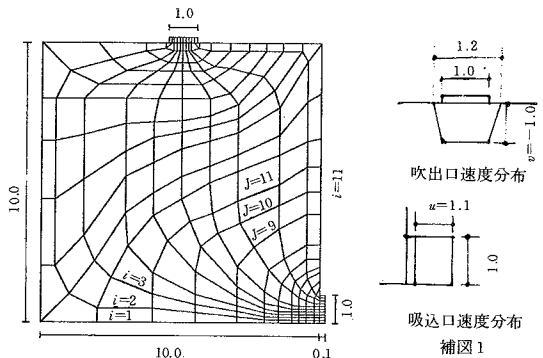


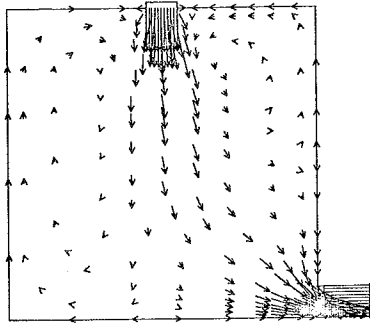
図-2 Grid Layout

たがって u, v, p, k, ε の緩和式における u_i は、1 ステップ前の値を用いている。また速度境界条件も 1 ステップ前の境界速度を与えている。

図 9 にフローチャートを示す。

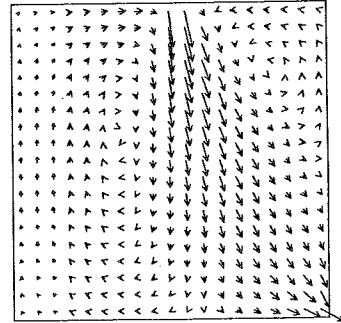
5. 計 算 例

図 2 に計算に使用したグリッドを示す。分割数は $\xi(i)$ 方向 11, $\eta(j)$ 方向 23 である。ここで吹出口、吸込口の突



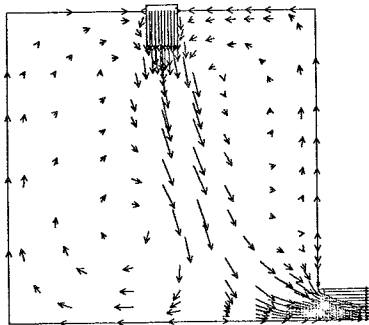
$\nu=0.1, m=1/7$

図-3 曲線座標による層流計算結果
 $\nu=0.1, m=1/7$



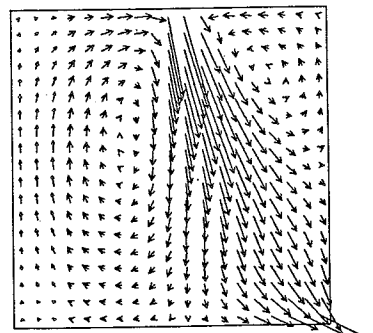
$\nu=0.1, m=1/7$

図-6 直交直線座標による層流計算結果
 $\nu=0.1, m=1/7$



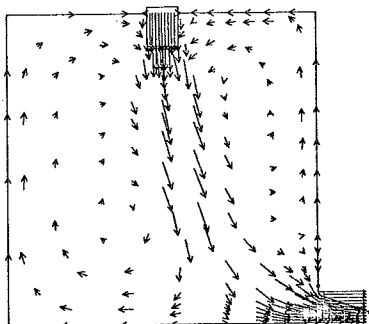
$\nu=0.02, m=1/7$

図-4 曲線座標による層流計算結果
 $\nu=0.02, m=1/7$



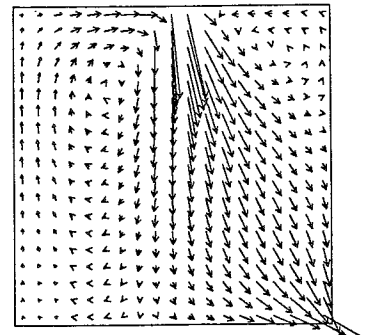
$\nu=0.02, m=1/7$

図-7 直交直線座標による層流計算結果
 $\nu=0.02, m=1/7$



$k_{in}=0.005, l_{in}=0.05, m=1/7$

図-5 曲線座標による乱流計算結果
 $k_{in}=0.005, l_{in}=0.05, m=1/7$



$k_{in}=0.005, l_{in}=0.05, m=1/7$

図-8 直交直線座標による乱流計算結果
 $k_{in}=0.005, l_{in}=0.05, m=1/7$

研究速報

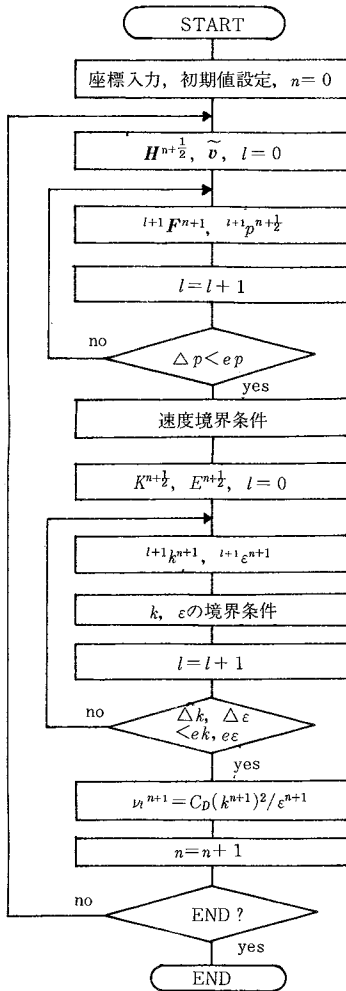


図-9 フローチャート

出部は ξ = 一定曲線と η = 一定曲線が一直線になることを避けるためのものである。計算条件は $\Delta t = 0.01$, $\delta = 0.5$, 領域内部で $\omega = 1.5$, 境界上で $\omega = 0.45$ とした。壁面条件は u^t を指数則 ($m = 1/7$), k を free-slip とした。ただし節点 (1,13), (1,18), (11,14) (領域の入隅部) においては $u = v = 0$ とした。 ε は壁法則を適用した。吹出条件は $u = 0$, $v = -1.0$, $k_{in} = 0.005$, 長さスケールは $l_{in} = 0.05$ とした。吸込条件は $u = 1.1$, $v = 0$, k と ε を free-slip とした。吹出速度と吸込速度が異なるのは、流量を一致させるためである³⁾。

図3, 4に層流計算結果を示す。図6, 7は直交直線座標を用いた Staggered Grid による計算結果である。両者は良い一致を見せている。

図5, 8は乱流計算結果を比較するものである。これらも良い一致を見せている。

7. む す び

運動方程式および k, ε の輸送方程式の解法および計算結果を示した。運動方程式は、拡散項に Semi-implicit スキームを適用したため、1ステップ当たりの計算量は増加したが、時間きざみに対する計算安定条件がゆるやかになるため、定常に達するまでの計算処理時間はこれを補償して余りあるものとなる。

k と ε の方程式は、Implicit スキームにより非常に安定する。境界において圧力と同様に、境界上の $1/2$ もしくは $1/4$ 形状のコントロールボリュームに対して、輸送方程式を積分して定式化すれば、さらに安定するものと思われる。これについては今後の検討課題としたい。

(1987年3月10日受理)

注1)

$$\begin{aligned}
 RX_{i+1/2,j} = & \\
 & + RXUG_{i,j}(u_{i+1,j} - u_{i,j}) + RXUY_{i+1,j}(u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1}) \\
 & + RXUY_{i,j}(u_{i,j+1} - u_{i,j-1}) + RXVG_{i+1,j}(v_{i+1,j} - v_{i,j}) \\
 & + RXVY_{i+1,j}(v_{i+1,j+1} - v_{i+1,j-1}) \\
 & + RXVY_{i,j}(v_{i,j+1} - v_{i,j-1}) \\
 SX_{i,j+1/2} = & \\
 & + SXUG_{i,j+1}(u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1}) \\
 & + SXUG_{i,j}(u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) + SXUY_{i,j}(u_{i,j+1} - u_{i,j}) \\
 & + SXVG_{i,j+1}(v_{i+1,j+1} - v_{i-1,j+1}) \\
 & + SXVG_{i,j}(v_{i+1,j} - v_{i-1,j}) + SXVY_{i,j}(v_{i,j+1} - v_{i,j}) \\
 RXUG_{i,j} = & \{ \{ Jv_t(2\xi_x^2 + \xi_y^2) \}_{i,j} \\
 & + \{ Jv_t(2\xi_x^2 + \xi_y^2) \}_{i+1,j} \} / 2 \\
 RXUY_{i,j} = & \{ \{ Jv_t(2\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y) \}_{i,j} \} / 4 \\
 RXVG_{i,j} = & \{ \{ Jv_t(\xi_x \xi_y) \}_{i,j} + \{ Jv_t(\xi_x \xi_y) \}_{i+1,j} \} / 2 \\
 RXVY_{i,j} = & \{ \{ Jv_t(\xi_y \eta_x) \}_{i,j} \} / 4 \\
 SXUG_{i,j} = & RXUY_{i,j} \\
 SXUY_{i,j} = & \{ \{ Jv_t(2\eta_x^2 + \eta_y^2) \}_{i,j} + Jv_t(2\eta_x^2 + \eta_y^2) \}_{i,j+1} \} / 2 \\
 SXVG_{i,j} = & \{ \{ Jv_t(\eta_y \xi_x) \}_{i,j} \} / 4 \\
 SXVY_{i,j} = & \{ \{ Jv_t(\eta_x \eta_y) \}_{i,j} + \{ Jv_t(\eta_x \eta_y) \}_{i,j+1} \} / 2 \\
 RY, SY = & \text{同様である。}
 \end{aligned}$$

注2)

$$\begin{aligned}
 QR_{i+1/2,j} = & RG_{i,j}(k_{i+1,j} - k_{i,j}) \\
 & + RY_{i+1,j}(k_{i+1,j+1} - k_{i+1,j-1}) + RY_{i,j}(k_{i,j+1} - k_{i,j-1}) \\
 QS_{i+1/2} = & SX_{i,j+1}(k_{i+1,j+1} - k_{i-1,j+1}) \\
 & + SX_{i,j}(k_{i+1,j} - k_{i-1,j}) + SY_{i,j}(k_{i,j+1} - k_{i,j}) \\
 RG_{i,j} = & \{ \{ Jv_t(\xi_x^2 + \xi_y^2) \}_{i,j} + \{ Jv_t(\xi_x^2 + \xi_y^2) \}_{i+1,j} \} / 2 \\
 RY_{i,j} = & SX_{i,j} = \{ \{ Jv_t(\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y) \}_{i,j} \} / 4 \\
 SY_{i,j} = & \{ \{ Jv_t(\eta_x^2 + \eta_y^2) \}_{i,j} + \{ Jv_t(\eta_x^2 + \eta_y^2) \}_{i,j+1} \} / 2 \\
 ER, ES = & \text{同様である。}
 \end{aligned}$$

注3)

補図1に示すように、吹出、吸込口速度を分布させた。吹出流量と吸込流量が一致するように速度を調整したものである。