研究速報
UDC 697.95：628.854：533.088.2

室内気流数値解析の診断システムに関する研究（第12報）
——差分分割に伴う数値誤差の推定，評価方法について——

Study on Diagnostic System for Simulation of Turbulent Flow in Room (Part 12)
——Estimation of error caused by coarseness of finite-differencing——

村 上 周 三*・加 藤 信 介**・永 野 紳 一 郎***・Joel H. ファーツィガー****
Shuzo MURAKAMI, Shinsuke KATO, Shin-ichiro NAGANO and Joel H. FERZIGER

1. は じ め に

差分化に伴う数値誤差は，数値シミュレーションにとって避けられないものである．誤差の推定，評価は数値シミュレーションの診断システムの中核をなすものの1つである．差分分割を細かくすれば精度が向上するのは当然であるが，各種の計算実施上の制約により，多くの場合理想的な差分分割を行うことはない．

筆者らは診断システムの一貫として差分分割の粗さに伴う数値誤差の評価を行ってきたが[1)2)]，本報告では adaptive grid method[3)4)]で用いられている誤差評価手法を用いて差分分割の粗さに伴う誤差の検討を行う．これはリチャードソンの補外法[5)]により，①真の解を推定するとともに解の誤差 (solution error) を評価し，②真の解の推定値を利用して差分方程式の打ち切り誤差 (truncation error) を具体的に評価するものである．

2. Solution error と truncation error

流れのシミュレーションで考察される誤差は便宜的に2種類考えることができる．1つはシミュレーション結果と真の解との差，solution error であり，いま1つは差分方程式に由来する打ち切り誤差（真の解を差分式に代入した結果生じる残差），truncation error である．solution error は，この truncation error が流れ場により移流・拡散されて生ずる error が複合されて生ずる．

3. 誤 差 の 推 定[3)4)]

3.1 Solution error の推定

差分間隔 h で領域を分割し P 次精度の差分スキームを用いたときの solution error $e(h,x)$ は，テイラー級数を用いて次式で評価できるものと仮定する[3)6)7)]．

*東京大学生産技術研究所　付属計測技術開発センター
**東京大学生産技術研究所　第5部
***東京大学生産技術研究所　受託研究員（フジタ工業㈱）
****東京大学生産技術研究所　元外国人客員研究員 (Dept. of Mechanical Engineering, Stanford Univ.)

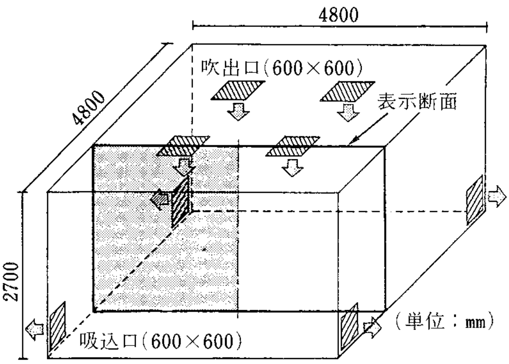
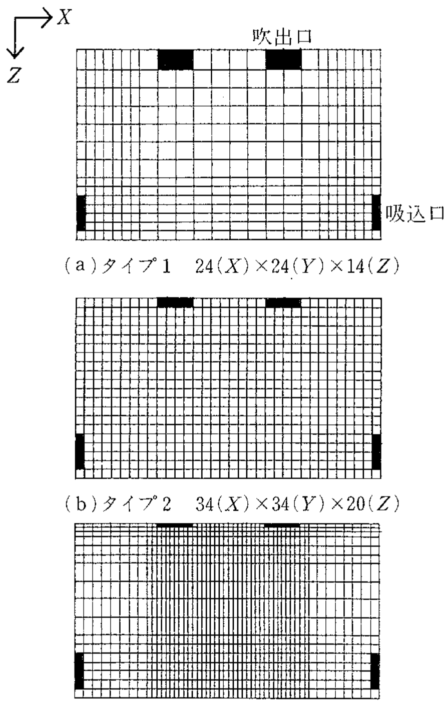


図1　解析に用いた室形状

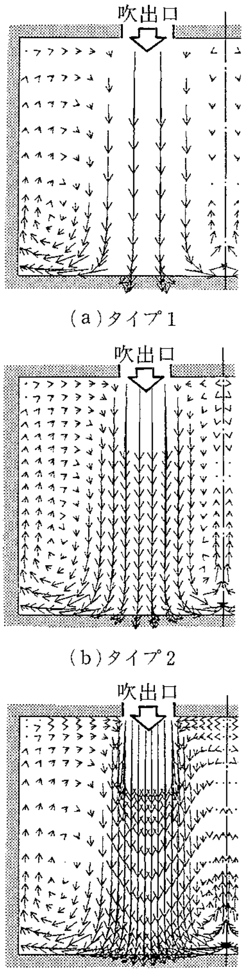


(a)タイプ1　24(X)×24(Y)×14(Z)

(b)タイプ2　34(X)×34(Y)×20(Z)

(c)タイプ3　52(X)×56(Y)×17(Z)

図2　メッシュ分割（3タイプ）

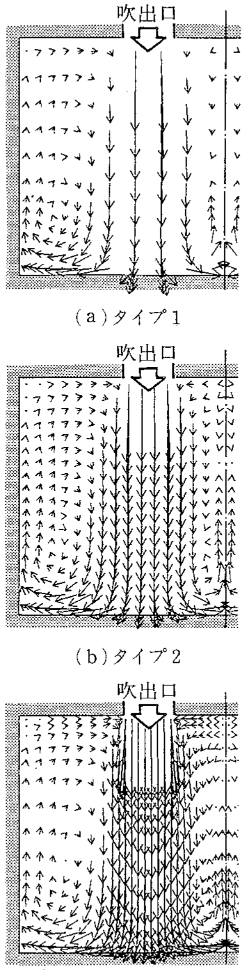


(a)タイプ1

(b)タイプ2

(c)タイプ3

図3　気流ベクトル（$u(h,x)$）
$\nu_t=0.01$
（0方程式モデル）

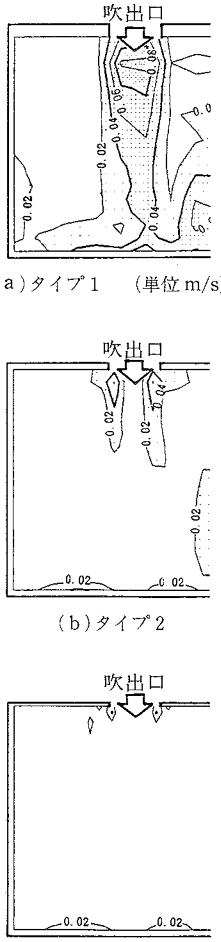


(a)タイプ1

(b)タイプ2

(c)タイプ3

図4　真の解の推定気流ベクトル（$\tilde{u}(0,x)$）
$\nu_t=0.01$
（0方程式モデル）

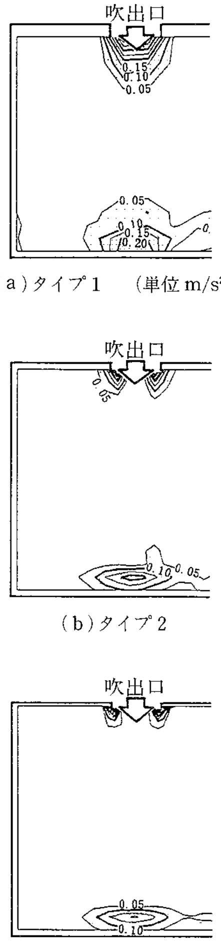


(a)タイプ1　（単位 m/s）

(b)タイプ2

(c)タイプ3

図5　流速の solution error（$\tilde{e}(h,x)$）
$\nu_t=0.01$
（0方程式モデル）



(a)タイプ1　（単位 m/s²）

(b)タイプ2

(c)タイプ3

図6　流速の truncation error（$\tilde{\tau}(h,x)$）
$\nu_t=0.01$
（0方程式モデル）

$$e(h,x)=u(0,x)-u(h,x)$$
$$=h^pF(x)+h^qG(x)+\cdots \qquad (1)$$

$u(0,x)$ は真の解，$u(h,x)$ は差分間隔 h の場合の解を示す．誤差は，leading error $h^pF(x)$ のほか，高次誤差項 $h^qG(x)\cdots$ を含む．今回は2次精度の差分（中心差分および QUICK スキーム[6)7)]）を用いており $p=2$ とおける．

差分間隔 $2h$ の場合の solution error $e(2h,x)$ は，

$$e(2h,x)=u(0,x)-u(2h,x)$$
$$=(2h)^pF(x)+(2h)^qG(x)+\cdots \qquad (2)$$

となる．leading error $h^pF(x)$ は(1)，(2)式よりシミュレーション結果 $u(h,x)$, $u(2h,x)$, を用いて(3)式で推定できる．(3)式右辺は leading error $h^pF(x)$ ほか，高次誤差項を含み，これが差分間隔 h のときの solution error の推定値 $\tilde{e}(h,x)$ となる．

$$\tilde{e}(h,x)=\frac{u(h,x)-u(2h,x)}{2^p-1}$$
$$=h^pF(x)+\left(\frac{2^q-1}{2^p-1}\right)h^qG(x)+\cdots \qquad (3)$$

(3)式は(1)式と比較すると次式のように書ける．

$$\tilde{e}(h,x)=e(h,x)+O(h^q) \qquad (4)$$

すなわち，$\tilde{e}(h,x)$ は q 次の精度で推定されている．

また，真の解は(1)，(4)式より次式で推定される．

$$\tilde{u}(0,x)=u(h,x)+\tilde{e}(h,x) \qquad (5)$$

3.2 Truncation error の推定

微分方程式　$L[u(0,x)]-f=0$　(6)
の差分間隔 h における差分近似式の truncation error は次式で評価される[注1].

$$\tau(h,x)=L_h[u(0,x)]-f \quad (7)$$

ここで, L は微分演算子であり, L_h は差分間隔 h の差分演算子である. truncation error の推定値 $\tilde{\tau}(h,x)$ は(7)式を $\tilde{u}(0,x)$ で評価し, 次式で推定される[注2].

$$\tilde{\tau}(h,x)=L_h[\tilde{u}(0,x)]-f$$
$$=L_h[u(h,x)+\tilde{e}(h,x)]-f \quad (8)$$

4. 解 析 結 果

k-ε モデルの基礎方程式および境界条件については文献8を参照されたい[注3]. 解析対象とする室形状を図1に示す. この領域を図2に示す3タイプのメッシュで分割し, これに基づく解 ($u(h,x)$ に対応) とそれぞれ対応する粗分割メッシュに基づく解 (メッシュを2倍粗とした $u(2h,x)$ に対応) の数値解を用いて, 誤差評価を行う. 空間一様に ν_t を与えた0方程式モデルおよび k-ε モデルにより定常解を求めて, これから(3), (8)式[注2]により solution error, truncation error を算出する. なお0方程式モデルの室内一定の乱流拡散係数 ν_t は, タイプ3のメッシュの k-ε モデルによるシミュレーションから得られた ν_t の空間平均値とほぼ等しく0.01とした.

4.1 0方程式モデルの場合の誤差評価

タイプ1からタイプ3へと吹出口周辺の分割を細かくするにつれて, 以下のように変化する. ①気流ベクトル ($e(h,x)$ を含む) : 図3の(a)⇒(b)⇒(c)の順に吹出間の床面から天井面に向かう上昇流が強くなる. ②気流ベクトルの真の解の推定値 $\tilde{u}(0,x)$: 図4の(a)⇒(b)⇒(c)の順に①と同様に上昇流が強くなる. ③ solution error $\tilde{e}(h,x)$[注4] : 図5の(a)⇒(b)⇒(c)の順に吹出口直下および周辺の誤差は小さくなる. ④ truncation error $\tilde{\tau}(h,x)$[注4] : 図6の(a)⇒(b)⇒(c)の順に吹出口周辺および床面での誤差は小さくなる.

$\tilde{e}(h,x)$), $\tilde{\tau}(h,x)$ は差分分割が密となるほど小さくなっている. $\tilde{e}(h,x)$ を小さくするためには, 吹出口周辺の分割を細かくすることが有効である.

4.2 k-ε モデルの場合の誤差評価

気流ベクトル($e(h,x)$ を含む)を図7(a)～(c)に示す. 吹出口間の差分分割を細かくすると吹出口の上昇流が強くなる. なおタイプ2(図7(b))は実験結果[1]と良い対応を示すが, さらに差分分割の細かいタイプ3の場合上昇流が天井近くまで到達し実験結果との対応は逆に悪い.

タイプ1から3へと差分分割を細かくすると, 以下のように変化する. ①流速の solution error $\tilde{e}(h,x)$: 図8の(a)⇒(b)⇒(c)の順に吹出口直下の誤差は小さくなるが, 逆に床面近傍の誤差は大きくなる. 全体の様相としては差分分割が細かいほど誤差の大きな領域は小さくなる傾向がある. ②流速の truncation error $\tilde{\tau}(h,x)$: 図9の(a)⇒(b)⇒(c)の順に吹出口周辺および床面近傍の誤差は大きくなり, 予想に反する結果を示す. ③乱流エネルギー k の solution error $\tilde{e}(h,x)$: 図10の(a)⇒(b)⇒(c)の順に誤差は小さくなる. ここでは省略するが, k の truncation error, ε の solution error および truncation error はタイプ1から3へと分割が細かくなるほど誤差は大きくなる傾向がある.

以上の結果から k-ε モデルの場合には, 今回の場合差分分割を細かくしても誤差は顕著に低減しない傾向があるばかりか, 逆の傾向を示す場合も生じた. これは現状の差分分割の程度では, 平均流の勾配をまだ精度良く捉えることができないし, また平均流の様相のみならず k, ε 等の乱れの統計量の生産も正しく評価することができず, この結果差分分割を細かくしても単調に収束する方向に向かわず k, ε および ν_t 等が変化して平均流そのものも変化し, 誤差が減少しないものと考えられる. この意味でタイプ2の差分分割による結果は実験とおおむね良く一致しており, 実用上十分な結果を得られるということもできるが, 一方でこの程度の分割ではまだまだ不十分であることや, 数値定数等の乱流モデルの検討がさらに必要であり, これらに関する診断が必要があることが示唆されている.

5. ま と め

Solution error, truncation error を評価し, 差分分割の粗密の影響を考察した. 今回の差分分割では, ① ν_t を一定とする0方程式モデルでは差分分割を細かくする

注1) 差分にかかわる truncation error は差分と微分との差すなわち,

$$\tau(h,x)=L_h[u(0,x)]-L[u(0,x)] \quad \text{(S1)}$$

と定義されることも多い. これは(6)式を考慮すると

$$\tau(h,x)=L_h[u(0,x)]-f-(L[u(0,x)]-f)$$
$$=L_h[u(0,x)]-f \quad \text{(S2)}$$

となり, (7)式の定義と等しい.

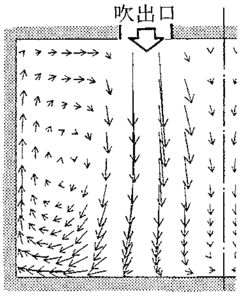
注2) 今回行ったシミュレーションでは解 $u(h,x)$ は厳密に各格子点で $L_h[u(h,x)]-f=0$ を満たさない. そのため今回の $\tilde{\tau}(h,x)$ の算出では, この寄与分を差し引いて評価している.

$$\tilde{\tau}(h,x)=L_h[\tilde{u}(0,x)]-f-(L_h[u(h,x)]-f)$$
$$=L_h[\tilde{u}(0,x)]-L_h[u(h,x)] \quad \text{(S3)}$$

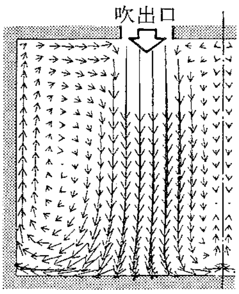
注3) k-ε モデルの数値定数は $C_1=1.44$, $C_2=1.92$ および吹出口の流入乱流量は $k=0.005\ \mathrm{m^2/s^2}$, $l=0.2\ \mathrm{m}$ としている.

注4) 流速 (ベクトル量) の solution error, truncation error は各方向成分ごとの error を合成 (2乗和の根) して示す.

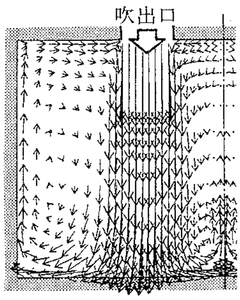
研　究　速　報



(a)タイプ1

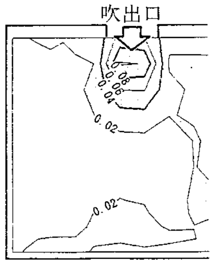


(b)タイプ2

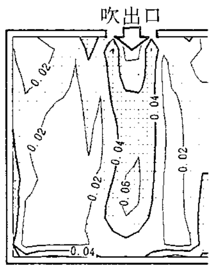


(c)タイプ3

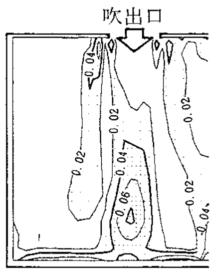
図7　気流ベクトル（$u(h,x)$）（k-ε モデル）



(a)タイプ1　(単位 m/s)

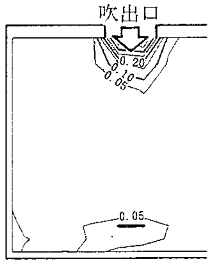


(b)タイプ2

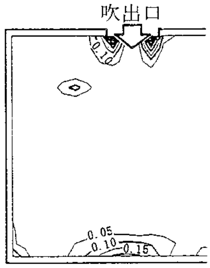


(c)タイプ3

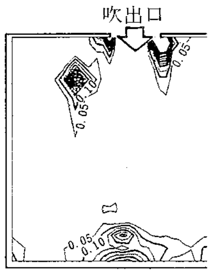
図8　流速の solution error（$\tilde{e}(h,x)$）（k-ε モデル）



(a)タイプ1　(単位 m/s²)

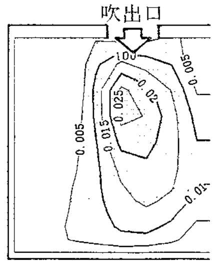


(b)タイプ2

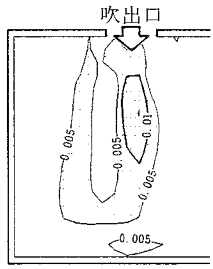


(c)タイプ3

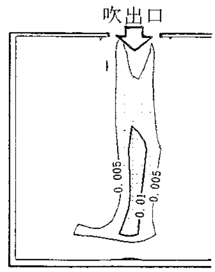
図9　流速の truncation error（$\tilde{\tau}(h,x)$）（k-ε モデル）



(a)タイプ1　(単位 m²/s²)



(b)タイプ2



(c)タイプ3

図10　乱流エネルギー kの solution error（$\tilde{e}(h,x)$）（k-ε モデル）

と誤差は小さくなる．② k-ε モデルの場合には差分分割を細かくしても誤差は必ずしも小さくならず，現状の差分分割や数値定数を含む乱流モデルの検討がいまだ不十分であることが示唆された．

謝　　辞

本研究は，J. H. Ferziger 教授（Stanford Univ.）が外国人客員研究員として，東京大学生産技術研究所に滞在中に行った共同研究をとりまとめたものである．

（1987年2月4日受理）

参 考 文 献

1) 村上，加藤，永野：乱流数値シミュレーションの診断システムに関する研究（第7報），日本建築学会関東支部研究報告集，1986．7
2) 村上，加藤，須山：室内気流数値解析の診断システム，生産研究，38，12，1986.12
3) S. C. Caruso, J. H. Ferziger and J. Oliger：Rept. TF-23 Mech. Engrg. Dept.,Stanford Univ.,1985.11
4) S. C. Caruso, J. H. Ferziger and J. Oliger：AIAA paper，86-0498，1986．2
5) たとえば篠原能材著：数値解析の基礎，日新出版，1982.4
6) B. P. Leonard：Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, pp 59-98, 19, 1979
7) B. P. Leonard：Computer Methods in Fluids, Pentech Press, pp 159-195, 1980
8) 野村，松尾，加藤：MAC法の空間差分間隔に関する考察，日本建築学会論文報告集，292，1980．6