研究解説　　UDC 531.19：530.162

遅延フィードバック系におけるカオス

Chaos in the Delayed Feedback System

黒田和男*
Kazuo KURODA

決定論的方程式からでる不規則解—カオス—の研究が，広い分野にわたって盛んになってきている．本論文では，カオスの概略を紹介し，あわせて，光と物質の非線形な相互作用を利用した遅延フィードバック系のカオスについて述べる．

1. はじめに

古典物理や工学における理論は，決定論的と確率論的の二つに分けられる．決定論的理論では，ある時刻における系の状態が与えられれば，その後の系の変化は一意的に決められる．一方確率論的理論では，系の変化は一意的には定まらず，われわれが知ることができるのは系がある状態をとる確率だけである．ところで，古典物理の基礎をなすニュートンの力学やマクスウェルの電磁気学は決定論的理論であるから，第一原理にさかのぼって考えれば，すべての古典物理の問題は決定論的理論で記述できるはずである．では，本来決定論的である理論からどのようにして確率論的理論が導きだされるのか？これはボルツマン以来の統計力学の大問題であり，時間の不可逆性と関連して多くの議論がなされてきた[1]．通常，確率論的理論の起源は系の状態の粗視化にあると考えられている．たとえば，箱の中に閉じ込められた多数の気体分子の運動を考えたとき，量子論的効果をとりあえず無視したとしても，すべての分子の位置と運動量を正確に知ることは事実上不可能である．また，気体分子と壁の相互作用を正確に知るためには，箱の微視的な構造も考慮しなければならないが，これも事実上不可能なことである．よって個々の分子の運動を追いかけるのはあきらめ，巨視的な体積部分を取り出し，その中における平均値とそれからの揺らぎを考えざるをえない．すなわち，系の状態を微視的に記述するには余りにも自由度が多過ぎてとても手に負えないのでやむをえず確率論に頼るわけである．いわば，われわれの無知が確率論を必要とするのである．

確かに多自由度の系の運動は複雑である．ところが1963年にLorenzは乱流の研究において，自由度がたった3の系でも非常に複雑な解があることを見つけた[2]．また，Mayは数理生態学の研究において，単純な規則に従って作られる数列が全く不規則な振る舞いをすることに気づいた[3]．これら比較的単純な決定論的方程式に従いながら，不規則な振る舞いをする解はカオスと呼ばれるようになった[4]．カオスの特徴は出発時には近くにあった2点が時間とともに指数関数的に遠ざかっていくことにある．それゆえ初期値にたとえわずかであっても誤差があれば，時間が経つと無視できないほど大きな量に増大していく．この性質を軌道不安定性という．測定には必ず誤差が入るから，カオスでは長期的な予測は事実上不可能である．決定論的な理論に従いながら，将来の正確な予測はたたず，確率論的な取り扱いしかできないような系が見つかったことは大変な驚きであった．

本稿ではカオスの概略を紹介し，その1例として音響光学素子を用いた遅延フィードバック系におけるカオスについて述べる．

2. カオス概論

カオスの状態が出現する絶対条件は系が非線形な応答をすることである．線形な系の振る舞いは数学的に明白であり，カオスなど不可思議なものの潜む余地はない．周波数の比が有理数ではない複数の固有振動の重ね合わせは見かけ上複雑な運動をするが，軌道不安定性を持たないからカオスではない．

LorenzやMayの先駆的な研究に続いて，物理，化学，生物，機械，電気など広い分野で非線形系の運動が調べられ，カオスが見つけられている．これらに特徴的なことは，対象はさまざま異なるが共通する現象が見られること，すなわち，一種の普遍性が認められることである．この普遍性は，カオスが対象に固有の現象ではなく，抽象化された数学的な現象であることを意味してい

*東京大学生産技術研究所　第1部

る．また単に定性的な普遍性だけではなく，定量的なレベルでの普遍性の存在することが Feigenbaum によって示された[5]．

2.1　散逸力学系

状態が m 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ で表される力学系を考える．系の運動は微分方程式

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt}=\boldsymbol{F}_{\mu}(\boldsymbol{x}(t)) \tag{1}$$

で記述されるとしよう．ただし μ は系を制御するパラメータである．微分方程式(1)は $t=0$ における初期値 $\boldsymbol{x}_0$ を与えれば一意的に解ける．初期値をある範囲内に取ったときの解の集まりを流れという．

状態空間内に m 次元体積要素 dv を取る．dv の流れによる変化はベクトル関数 $\boldsymbol{F}$ の発散で与えられる．

$$\frac{dv}{dt}=\mathrm{div}\boldsymbol{F}=\sum\frac{\partial F_i}{\partial x_i} \tag{2}$$

(1)式がハミルトン方程式の場合はリウヴィルの定理が成り立ち，流れは m 次元体積を保存する．これを保存系という．一方，摩擦のある力学系や外界とエネルギーのやりとりをする開放系では $\mathrm{div}\boldsymbol{F}$ は負になり，m 次元体積は流れにつれて縮小し，$t\to\infty$ で 0 に収束する．このような系は散逸系と呼ばれる．

2.2　アトラクター

$t\to\infty$ での流れの行き着く先をアトラクターという．また，アトラクターに収束する流れの初期値全体の集合を引力圏 (basin) という．散逸系では流れによって体積は 0 に収束するから，アトラクターの体積も 0 である．最も単純なアトラクターは安定定常解 $\bar{\boldsymbol{x}}$ である．これは

$$\boldsymbol{F}(\bar{\boldsymbol{x}})=0 \tag{3}$$

を満たし，さらに微小な乱れに対して安定である．定常解の安定性は $\bar{\boldsymbol{x}}$ の回りの微小変動に対して方程式を線形近似して調べる．安定条件はヤコビ行列

$$A_{ij}=\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \tag{4}$$

の固有値 $\nu_i\ (i=1\cdots m)$ が

$$\mathrm{Re}(\nu_i)<0,\ (i=1,\cdots,m) \tag{5}$$

となることである．$\bar{\boldsymbol{x}}$ 近傍から出発した流れはすべて $\bar{\boldsymbol{x}}$ に引き込まれる．

安定定常点のほかに安定な周期解もアトラクターになる．これはリミットサイクルと呼ばれる．2次元の力学系 ($m=2$) ではアトラクターは定常解，リミットサイクル，それに不安定な定常点とそれを結ぶ軌道に限られることが知られている（ポアンカレ・ベンディクソンの定理）[6]．図1にアトラクターの例を示す．

あるアトラクターの引力圏内にある近接した2つの流れ $\boldsymbol{x}_1(t)$ と $\boldsymbol{x}_2(t)$ を考える．軌道は共通のアトラクターに収束するが，差 $\Delta\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}_2(t)-\boldsymbol{x}_1(t)$ は必ずしも 0 に収束するとは限らない．$t\to\infty$ での $\Delta\boldsymbol{x}(t)$ の振る舞いから定義される

$$\lambda=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln|\Delta\boldsymbol{x}(t)| \tag{6}$$

をリアプノフ指数という．一般に λ は $\Delta\boldsymbol{x}(0)$ のとりかたに応じて m 個の値 λ_1, λ_2, …を取る．直感的には，図2に示すようにアトラクターに沿った流れは球状のものを楕円体状に変形するが，そのときの楕円体の軸の長さの変化率をアトラクター全体にわたって平均したものである．

安定定常解の場合は明らかに $\Delta\boldsymbol{x}$ は 0 に収束するから，すべてのリアプノフ指数は負である．安定周期解の場合は，軌道上の2点の距離は有限のままで 0 には収束しない．一方，軌道に直交する成分は 0 に収束する．すなわち，1つのリアプノフ指数は 0，残りは負である．全部の λ_i の和は体積要素の変化率になるから散逸系では負になるが，個々の λ_i が負になる必要はない．特に正のリアプノフ指数をもつアトラクターをストレンジアトラクターと呼ぶ．これがカオスの正体である．ストレンジアトラクター上では2点間の距離は指数関数的に増大していく，すなわち軌道不安定性を有する．ところが体積は減少していくのであるから，体積要素は流れに沿って薄く引き伸ばされていく．アトラクターは有界であるから，

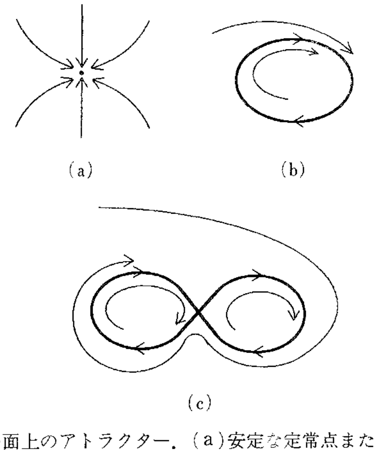

図1　平面上のアトラクター．(a)安定な定常点または沈点．(b)安定な周期解またはリミットサイクル．(c)不安定定常点とそれを結ぶ軌道からなるアトラクター．この例では，1つの鞍点と2つの軌道からなる．

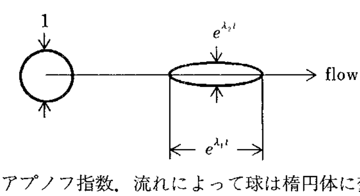

図2　リアプノフ指数．流れによって球は楕円体に変化する．各軸の変化率の平均がリアプノフ指数である．

引き伸ばされたものは折りたたまれる．引き伸ばしと折りたたみを無限に繰り返して出来上がったものがストレンジアトラクターである（図3）．

2.3　カオスへの分岐[7]

散逸系を考え，パラメータ μ は外部から注入されるエネルギーであるとする．外部からのエネルギー注入がないとすれば（$\mu=0$），系の運動はやがて静止するであろう．静止状態 $\bar{x}$ は（1）の安定定常点である．パラメータ μ を0から連続的に増大すると，定常点 $\bar{x}_\mu$ は動いていくが，しかし，行列（4）の固有値 ν_i も連続的に変化するから，μ の変化が小さいうちは安定点のままである．μ がある値 μ_1 を超えたところである固有値の実部が負から正に変わったとしよう．$\mu>\mu_1$ では定常点 $\bar{x}$ は不安定になり，流れはこの点から離れていき別のアトラクターに収束する．すなわち，μ_1 を境にしてアトラクターの定性的な性質が変化するのである．このような現象は分岐と呼ばれる．

散逸系の場合，一般的な条件のもとで安定定常解から安定周期解への分岐が起こることが知られている．これを Hopf 分岐と呼ぶ．Hopf 分岐によって系は静止状態から振動状態に移行する．

さらにパラメータ μ を増大させると周期解も不安定になり別のアトラクターへ分岐する．このように分岐を繰り返しついにカオスの状態に至る．散逸系の場合カオスに至る筋道は数種類に類型化できる．これをシナリオと呼んでいる．

Ruelle-Takens のシナリオでは[8]

定常解→周期解→2重準周期解→カオス

と3度の分岐でカオスに至る（図4）．2重準周期解とは2つの周波数の異なる周期運動が組み合わさった解である．要点は3重準周期解は構造的に不安定であること，すなわち，安定な3重準周期解を解に持つ微分方程式をわずか（無限小）変更するだけでカオティックな解を持つようにできることが証明されることにある．

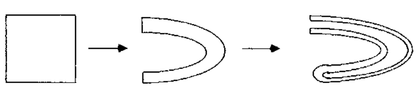

図3　引き伸ばしと折りたたみ

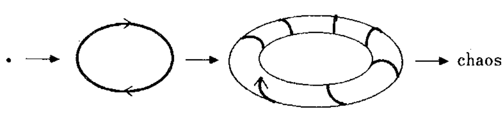

図4　Ruelle-Takens のシナリオ．パラメータを増加させると，アトラクターは，一点，閉軌道，2次元トーラス上の準周期軌道と順次分岐し，最後にカオスに至る．

別のシナリオでは周期解は分岐点 $\mu=\mu_1$ においてもとの周期の2倍の周期を持った解に分岐する．これを周期倍化分岐（period doubling bifurcation），または，くまで型分岐という（pitchfork bifurcation）．この分岐では，スペクトルを見ていると基本周波数の1/2のところに新しいスペクトル成分が現れる．パラメータ μ を増大すると μ_2 において新たに周期倍化分岐が起き4倍周期解になる．さらに μ を増やしていくと周期倍化分岐が繰り返され，n 回目の分岐点 μ_n において 2^n 周期解に分岐する．n が大きくなるにつれて 2^n 周期解の存在するパラメータ範囲 $\mu_{n+1}-\mu_n$ は狭くなる．$n\to\infty$ の極限でカオスが出限する．図5はロジスティック写像の場合の分岐図である．

Feigenbaum は1次元写像

$$x=\mu f(x) \tag{7}$$

における周期倍化分岐の連鎖を繰り込み群の考え方を使って解析し

$$\delta=\lim_{n\to\infty}\frac{\mu_n-\mu_{n-1}}{\mu_{n+1}-\mu_n} \tag{8}$$

が関数形の細部によらない普遍定数であることを見つけた[5,9]．$f(x)$ の頂上部分が2次のときは $\delta=4.6692$ になる．周期倍化分岐は自己再生的に起こるが，この時のスケーリング因子 $\alpha=2.5029$ も普遍定数になる．実験的にもこの普遍性は確かめられている[10]．なお，一般的に周期 N 倍化分岐が起こる可能性があり，その場合の普遍定数 α，δ も計算されている[11]．

第3のシナリオは間欠的なカオスの出現に関するものである[12]．間欠的カオスとは間隔のランダムなパルス列のようなものである．身近には，水道の蛇口から落ちる水滴で観測されるという[13]．これには，安定定常解と不安定定常解が衝突して両者が消えてしまう分岐（saddle-node bifurcation）が関係している．図6に簡単な分岐

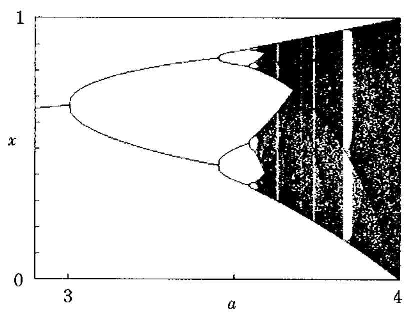

図5　ロジスティック写像(22)式の分岐図．横軸にパラメータ a，縦軸にアトラクターが描かれている．周期倍化分岐を繰り返しカオスに至る．黒く塗りつぶされた部分がカオティックな状態．白く抜けているところには安定な周期解が存在する．

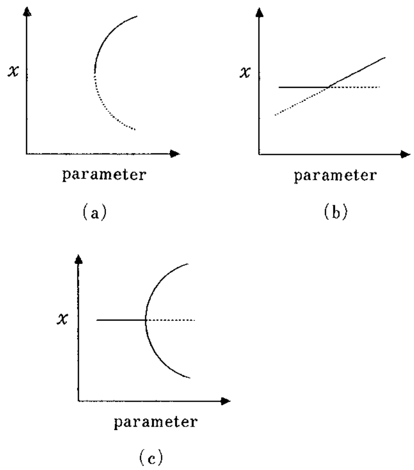

図6　単純な分岐の例. 横軸にパラメータ, 縦軸に1次元の状態空間を取る. 実線が安定状態, 破線が不安定状態を表す. (a) suddle-node bifurcation. 安定点と不安定点のペアが誕生する. (b) transcritical bifurcation. 2つの定常点 (安定と不安定) が衝突し, 安定, 不安定が入れ替わる. (c) pitchfork bifurcation. 定常解が不安定となり, 安定な周期解が現れる.

の例を示す.

パラメータを動かして分岐図を調べているとカオス状態が突然変化することがある. この多くは, アトラクターが引力圏 (basin) の境界と接するクライシスと呼ばれる現象に起因する[14].

2.4　ストレンジアトラクターの次元[15~17]

ストレンジアトラクターは幾何学的にはフラクタル図形になる[18,19]. これはストレンジアトラクターが引き伸ばしと折りたたみを無限に繰り返したものであることに起因する. フラクタル図形は一般に非整数の次元で特徴づけられる. フラクタル次元にはいろいろな定義の仕方があるが, ストレンジアトラクターに対しては, 容量次元 (capacity), 情報次元 (information dimension), 相関指数 (correlation exponent) がよく使われる. これらの次元はリアプノフ指数と並んでストレンジアトラクターを特徴づける重要な量である. これはまたカオスとランダムな雑音とを区別するのにも用いられる.

容量次元 D は次のように与えられる. m 次元空間内のストレンジアトラクターを1辺の長さ ε の箱で覆うのに必要な箱の個数を $N(\varepsilon)$ とすると

$$D=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} \tag{9}$$

これはストレンジアトラクターの幾何学的な性質だけで決まる量である.

ストレンジアトラクター上の軌道を考えると i 番目の箱に滞在する確率 p_i を導入できる. エントロピー

$$S(\varepsilon)=-\sum p_i \ln p_i \tag{10}$$

から情報次元 σ が

$$\sigma=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{S(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} \tag{11}$$

と定義される.

相関指数 ν は, ストレンジアトラクター上の軌道を一定の時間間隔で N 個サンプリングした時系列 $\boldsymbol{x}_i$ から

$$\nu=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln C(\varepsilon)}{\ln\varepsilon} \tag{12}$$

$$C(\varepsilon)=\frac{2}{N^2}(|\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_j|<\varepsilon \text{ であるペアの数}) \tag{13}$$

相関指数は少ないサンプル数でも計算できるので実験結果から次元を求めるときに適している[20].

さらにこれらを一般化して, $q\geqq 0$ に対して

$$D_q=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{q-1}\,\frac{\ln \chi_q(\varepsilon)}{\ln \varepsilon}\right) \tag{14}$$

$$\chi_q(\varepsilon)=\sum p_i^{\,q} \tag{15}$$

で定義される次元 D_q が導入される[21]. この D_q は, $q=0$ のときは容量次元, $q=1$ のときは情報次元, $q=2$ のときは相関指数に一致する. D_qは q に対して非増加である.

$$q_1\leqq q_2 \quad\rightarrow\quad D_{q_1}\geqq D_{q_2} \tag{16}$$

最近 Jensen, Halsey らはこれを負の q にまで拡張した[22]. さらに D_qと次の関係

$$\alpha(q)=\frac{d}{dq}((q-1)D_q) \tag{17}$$

$$f(\alpha(q))=q\alpha(q)-(q-1)D_q \tag{18}$$

で結ばれる特異性指数のスペクトル $f(\alpha)$ を導入し, ストレンジアトラクターのキャラクタリゼーションに有効であることを示した.

以上の議論ではストレンジアトラクターの (静的な) 統計的性質は使っているが, 系の動的な振る舞いは反映されていないように思われる. ところが, Feigenbaum らは巧妙な方法を用いて $f(\alpha)$ から系の動的な性質の一端が再現できることを示し, $f(\alpha)$ の重要性をさらに印象づけた[23].

2.5　例

連続力学系では, Lorenz 系

$$\begin{aligned}\dot{x}&=-\sigma x+\sigma y\\ \dot{y}&=-xz+rx-y\\ \dot{z}&=xy-bz\end{aligned} \tag{19}$$

や Rössler 系[24]

$$\begin{aligned}\dot{x}&=-(y+z)\\ \dot{y}&=x+1/5y\\ \dot{z}&=1/5+z(x-\mu)\end{aligned} \tag{20}$$

が有名である (図7). ただしドットは時間微分. Rössler 系では周期倍化分岐が起こる. Lorenz の方程式は Benard 不安定性の問題から導かれたものであるが, カオスが生じるパラメータ範囲は現実の値からは離れたと

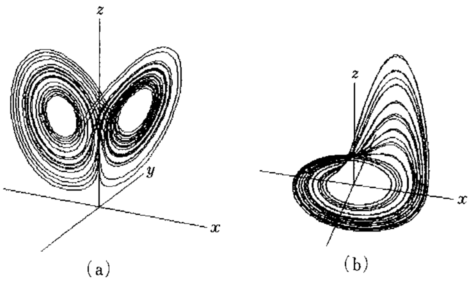

図7　ストレンジアトラクターの例．(a)Lorenzアトラクター[(19)式，$\sigma=10$，$r=28$，$b=8/3$]．(b)Rösslerアトラクター［(20)式，$\mu=4.6$］．

ころにある．Duffing 方程式

$$\ddot{x}+k\dot{x}+x^3=B\cos t \tag{21}$$

においてもカオスが観測される．この系の位相空間は x と $\dot{x}$ の2次元であるが，右辺に強制振動項があるので実質は3次元になる．

離散系ではロジスティック写像

$$x_{n+1}=ax_n(1-x_n) \tag{22}$$

やサークル写像[25]

$$\theta_{n+1}=\theta_n+\Omega-\frac{K}{2\pi}\sin 2\pi\theta_n \tag{23}$$

（ただし，θ と $\theta+1$ は同一点と見なす）

Hénon 写像[26]

$$\begin{aligned} x_{n+1}&=y_n+1-ax_n^2\\ y_{n+1}&=bx_n \end{aligned} \tag{24}$$

が詳しく調べられている．ロジスティック写像では周期倍化分岐や間欠的カオスが観測される．一方サークル写像は準周期解を経過するカオスの発生と密接な関係がある．

実験的には非常に広い分野でカオスが観測されており，今ではカオスは珍奇な現象ではなくなってきている．

3．遅延フィードバック系におけるカオス

著者の関係する光の分野では，レーザー系と光双安定系におけるカオスが活発に研究されている．

レーザーにおけるカオスの研究は，均一拡がりスペクトルを持つレーザーにおける単一モード発振のモデルを，Lorenz の方程式に形式的に一致させる変形を Haken が見つけたときに始まる[27]．その後，不均一拡がりの場合やマルチモード発振，戻り光がある場合などにおけるカオスについて，理論と実験の両方から研究が進められている．

3.1　池田カオス

光と非線形な相互作用をする物質を光のフィードバック系の中に入れると光双安定系が構成できる．池田はフィードバック時間が系の応答時間に比べ長いときにカオスが観測されることを理論的に予想した[28]．この予想

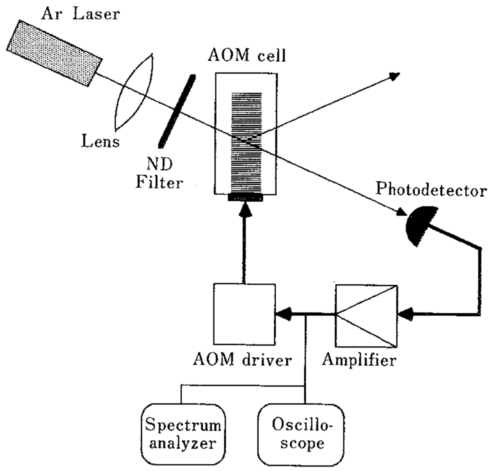

図8　音響光学素子（AOM）を用いた遅延フィードバック系

は Gibbs らによって実験的に確認された[29]．彼らの最初の実験は光と電気のハイブリッド系を用い，計算機を遅延素子として用いた．後には，電気光学素子と光ファイバーによる遅延を利用した系において同様にカオスを観察した[30]．これらは池田カオスと呼ばれるようになった．純光学的な系においても池田カオスが観測されている[31]．

遅延時間が十分長いときは，非線形素子の応答関数を $F(x)$ として，系の運動は

$$x(t)=F(x(t-T)) \tag{25}$$

で表される．T は遅延時間である．系の応答時間を考慮すると，時定数を τ として

$$\dot{x}(t)=-[x(t)-F(x(t-T))]/\tau \tag{26}$$

と近似できる．池田はこの式に基づいて理論を立てた．

3.2　AOM を用いた遅延フィードバック系におけるカオス

われわれは非線形素子に音響光学変調器（AOM）を用いカオスを観測した[32,33]．図8は実験系の構成を示したものである．制御パラメータは ND フィルターを通して入射するレーザー光強度である．それを a とする．図9にパラメータ a を変化させたときの状態分岐図を示す．また，図10には代表的な状態の時間変化のオシロスコープ写真を示す．

記号の意味は次のとおり．S は定常状態，P は周期的振動状態，C はカオス状態を指す．${}_kP_n$ と書いたときの系の状態は，$t_c=T/k$ を基本クロックとして，n 回異なる値を取ったのちに元の値に戻ることを意味する（$k=1$ のときは省略）．したがってこのときの振動周期は $nt_c=nT/k$ となる．${}_kC_n$ は ${}_kP_n$ と同様の時間変化を取るが，各時刻の値がカオティックに変化する（周期的カオス）．図9の縦軸はこの k の値が取ってある．パラメータ a が最大のときの C は周期構造を持たない発達したカオス状態

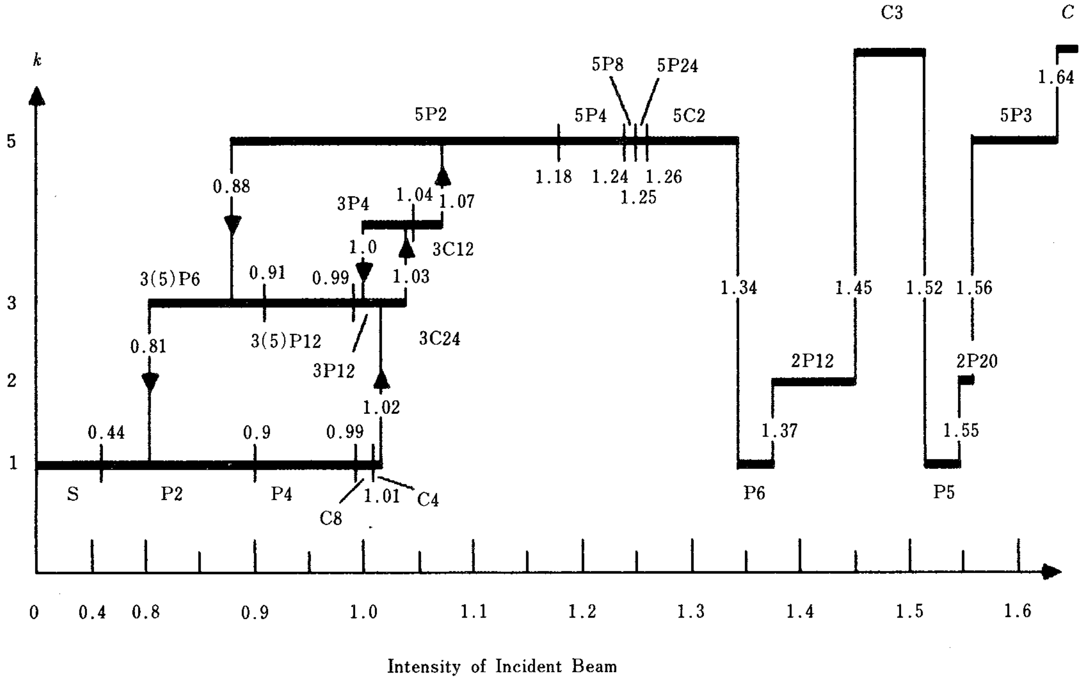

図9　音響光学素子を用いた遅延フィードバック系において，パラメータを変えたときの状態変化図．小数字は分岐の起こるパラメータ値．

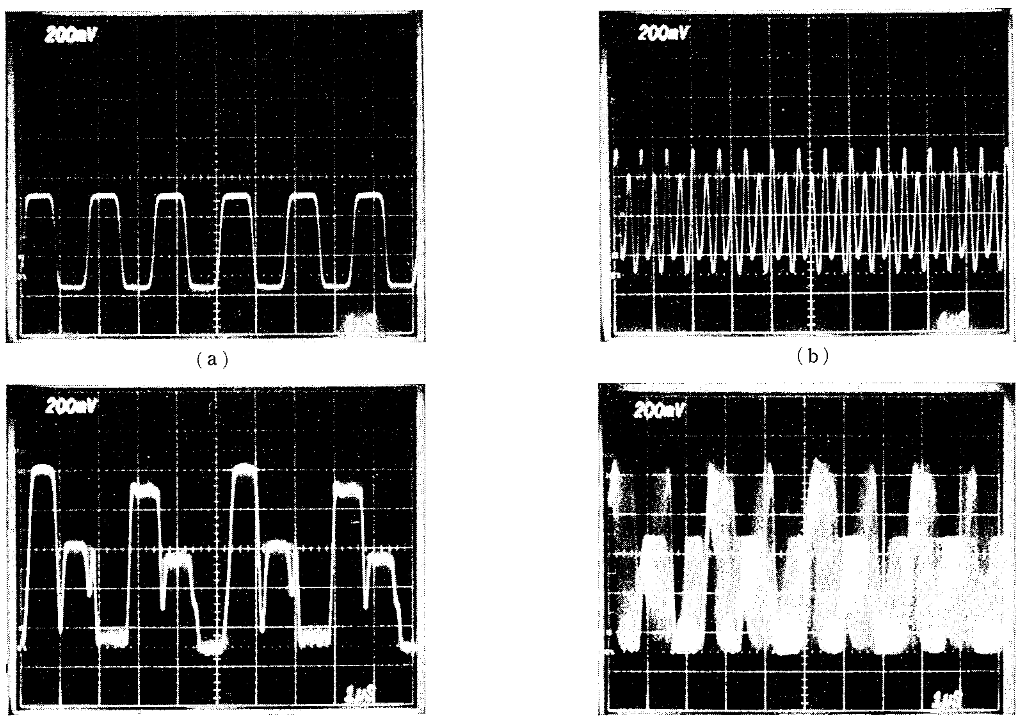

図10　いろいろなパラメータ値における系の時間変化を表すオシロスコープ写真．すべての写真に対し，縦軸，横軸は共通にとってある．横軸は1 μs/div．（a）　基準となる2周期振動状態．a=0.67．（b）　5倍高調波の4周期振動状態．a=1.21．（c）　6周期振動状態．a=1.36．（d）　カオス．a=1.48．

である．図中上下の矢印は，矢の方向への状態変化のみが許されることを，すなわちヒステリシスの存在を意味している．

周期倍化分岐，奇数次高調波振動への分岐（frequency locked anomaly），5周期解や6周期解の出現，周期3倍化分岐，2次高調波振動の出現，そして，カオスなど実に豊かに多様性を示すことが見て取れる．

4．ま と め

散逸系のカオスについて紹介した．基本的には，注入されるエネルギーが増えていくと系は振動を始め，ついにカオスに到着すると考えてよいであろう．エネルギー注入量が増えすぎて穏やかな手段で消費しきれなくなったとき，系は暴れだすのである．散逸系についてはかなりのことが明らかになってきたが，保存系や量子系におけるカオスなど難問はなかなか解決しそうもない．さらに，カオスの工学的な応用面も未発達である．今後一層の研究の発展が望まれる．　　（1987年1月8日受理）

参 考 文 献

1) たとえば，I. Prigogine：小出，安孫子訳「存在から発展へ」みすず書店，東京，（1984）
2) E. N. Lorenz : J. Atomos. Sci. **20**, 130 (1963) ; *ibid*, **20**, 448 (1963)
3) R. M. May : Nature **261**, 459 (1976)
4) 山口昌哉：「カオスとフラクタル」講談社，東京，（1986）
5) M. J. Feigenbaum : J. Stat. Phys. **19**, 25 (1978) ; *ibid*, **21**, 669 (1979)
6) M. W. Hirsch and S. Smale：田村，水谷，新井　訳「力学系入門」岩波書店，東京，（1981）P 257
7) J. P. Eckmann : Rev. Mod. Phys. **53**, 643 (1981)
8) D. Ruelle and F. Takens : Commun. Math. Phys. **20**, 167 (1971)
9) M. J. Feigenbaum : Physica **7 D**, 16 (1983)
10) P. Cvitanovic : *Optical Instabilities* ed. by R. W. Boyd, M. G. Raymar, and L. M. Narducci, Cambridge University Press, Cambridge (1986) p.151
11) R. Delbourgo, W. Hart, and B. G. Kenny : Phys. Rev. **A 31**, 514 (1985)
12) Y. Pomeau and P. Manneville : Commun. Math. Phys. **77**, 189(1980) ; P. Manneville and Y. Pomeau: Physica **1 D**, 219 (1980)
13) J. P. Crutchfield, J. D. Farmer, N. H. Packard, and R. S. Shaw : Scientific American **255**, No.6, 38 (1986)
14) C. Grebogi, E. Ott and J. A. Yorke : Phys. Rev. Lett. **48**, 1507 (1982) ; Physica **7 D**, 181 (1983)
15) J. D. Farmer, E. Ott and J. A. Yorke : Physica **7 D**, 153 (1983)
16) J. P. Eckmann and D. Ruelle : Rev. Mod. Phys. **57**, 617 (1985)
17) 長島弘幸：日本物理学会誌，**41**，19（1986）
18) B. B. Mandelbrot : *The Fractal Geometry of Nature*, W. H. Freeman and Company, New York, (1983)
19) 高安秀樹：「フラクタル」朝倉書店，東京，（1986）
20) P. Grassberger and I. Procaccia : Phys. Rev. Lett. **50**, 346 (1983)
21) H. G. E. Hentschel and I. Procaccia : Physica **8 D**, 435 (1983)
22) M. H. Jensen, L. P. Kadanoff, A. Libchaber, I. Procaccia and J. Stevans : Phys. Rev. Lett. **55**, 2798 (1985) ; T. C. Halsey, M. H. Jensen, L. P. Kadanoff, I. Procaccia and J. Stevans : Phys. Rev. **A 33**, 1141 (1986)
23) M. J. Feigenbaum, M. J. Jensen and I. Procaccia : Phys. Rev. Lett. **57**, 1503 (1986)
24) O. E. Rössler : Phys. Lett. **57 A**, 397 (1976)
25) S. J. Shenker : Physica **5 D**, 405 (1982)
26) M. Hénon : Commun. Math. Phys. **50**, 69 (1976)
27) H. Haken : Phys. Lett. **53 A**, 77 (1975)
28) K. Ikeda : Opt. Commun. **30**, 257 (1979) ; K. Ikeda, H. Daido and O. Akimoto : Phys. Rev. Lett. **45**, 709 (1980)
29) H. M. Gibbs, F. A. Hopf, D. L. Kaplan, and R. L. Shoemaker : Phys. Rev. Lett. **46**, 474 (1981)
30) M. W. Derstine, H. M. Gibbs, F. A. Hopf, and D. L. Kaplan : Phys. Rev. **A 27**, 3200 (1983)
31) H. Nakatsuka, S. Asaka, H. Itoh, K. Ikeda, and M. Matsuoka : Phys. Rev. Lett. **50**, 109 (1983)
32) 高山浩治：修士論文，東京大学，（1986）
33) 黒田，高山，伊藤，小倉：光学　**15**，317（1986）