

## 非圧縮粘性流体の差分法による反復解法

Iterative methods to solve incompressible fluid flow for finite-difference method

竹 光 信 正\*

Nobumasa TAKEMITSU

流体力学における数値解析の方法として、伝統的に、また実際に最も多く使われているのは、差分法である。流体力学の基礎方程式である Navier-Stokes 方程式を差分法によって離散化したとき、解くべき方程式は、一般に大型の連立方程式になる。この連立方程式は、通常記憶容量の少なくとも反復解法が使われる。本解説では、著者のおこなってきた研究のうちから、差分解の発散を防ぐ問題と、連続の方程式をいかにして満足させるかという問題を中心に論じる。

## 1. は じ め に

流体力学における数値解析の方法として、現在のところ差分法、有限要素法、境界要素法等が多く使われている。これらの方法のうち、伝統的に、また実際に最も多く使われているのは、差分法である。流体力学の基礎方程式である Navier-Stokes 方程式を差分法によって離散化すると、大型の連立方程式が得られる。この連立方程式を解く手段として、直接解法と反復解法があるが、直接解法では、行列を反転させなければならないので記憶容量が膨大となるため、何らかの工夫をしない限り、実質的にまず不可能である。このため、通常連立方程式を解くのに、反復解法が使われている。

さて、反復解法によって、Navier-Stokes (N-S) 方程式の数値解を得るにしても、実際にはとくに N-S 方程式の非線形性による反復過程の安定性、収束性の問題等のため、一筋縄ではいかない。本解説では、非圧縮粘性流体の差分法による数値解析をおこなう際、こうした問題の生じる例につき、過去におこなわれた研究、および著者のおこなってきた研究を紹介する。

なお、本解説では、層流、乱流の区別について、とくに意識しないが、乱流の数値解析の場合には、壁近傍で速度分布、エネルギー散逸率等が急激に変化するから、より一層の注意が必要である。

## 2. 反復解法の形式

さて、一般に逐次近似の形式は、次のようにかける。

$$\mathbf{v}^{(\text{new})} = \mathbf{v}^{(\text{old})} + \mathbf{v}^{(\text{correct})} \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{v}^{(\text{new})}$  は新しい近似値、 $\mathbf{v}^{(\text{old})}$  は古い近似値、 $\mathbf{v}^{(\text{correct})}$  は補正量である。 $\mathbf{v}$  は、スカラーであっても、ベクトルであってもかまわない。また、流体力学の数値解

析においては、非定常流の場合でも、時間刻み  $\Delta t$  を含んだ項全体を  $\mathbf{v}^{(\text{correct})}$  とかくことにすると、形式上(1)の形に書けるから、式(1)は定常流、非定常流のいずれの数値解析をおこなう場合にも、基本的にあてはまる。

式(1)において、補正量  $\mathbf{v}^{(\text{correct})}$  を決めるアルゴリズムが必要である。このアルゴリズムの良し悪しが、解の精度、収束性に大きく関係する。簡単に言えば、 $\mathbf{v}^{(\text{correct})}$  があまり大きすぎると解は発散し、 $\mathbf{v}^{(\text{correct})}$  があまり小さすぎると収束性が悪くなる。したがって、よいアルゴリズムというのは、適正で補正量が適度な大きさであることが必要である。ところが、流体力学の数値解析においては、適正で適度な補正量を生み出すアルゴリズムを見つけることが難しい。以下、この点について述べる。

## 3. 差分解の発散の例とその対策例

## 3.1 非定常流の例

これには、現在では歴史的意味しか持たないが、よく知られた Richardson の方法<sup>1)</sup> (1910) がある。これは、 $u$  に関する 1 次元の拡散方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2)$$

$t$  : 時間,  $x$  : 空間変数,  $\alpha$  : 定数

を、 $\Delta t$  を時間刻み、 $h$  を空間の検子幅、 $x = (i-1)h$  として、

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{\Delta t} = \frac{\alpha}{h^2} (u_{i+1} + u_{i-1} - 2u_i)^n \quad (3)$$

と離散化する方法である。ただし、上つきの添字  $n$  は時間ステップを表す。不幸にして、この方法は、 $\Delta t = 0$  のとき以外は、不安定である。ところで、 $\Delta t = 0$  というのは、式(1)で考えると、補正量  $\mathbf{v}^{(\text{correct})} = 0$  である。明らかに、補正量が 0 の反復法というのは意味がない。現在では、式(2)を安定に計算する方法は、数多く

\*東京大学生産技術研究所 第1部

知られている<sup>1)</sup>。

### 3.2 定常流の例

1 次元の  $\omega$  の輸送方程式

$$u \frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \quad (4)$$

$u = u(x)$ ,  $Re$ : 定数

を考える。式(4)を中心差分近似して、整理すると

$$(-hReu_i/2-1)\omega_{i-1} + 2\omega_i + (hReu_i/2-1)\omega_{i+1} = 0 \quad (5)$$

を得る。この式から、 $Re$  数が大きくなると  $\omega$  の係数行列の優対角性がくずれて反復解法は不安定になることがわかる。実際、Keller と Takami<sup>2)</sup> の  $Re$  数 15 の 2 次元の円柱のまわりの流れの計算では、上記の優対角性をくずさないために極端な underrelaxation (格子点数 2169 のときで、緩和係数  $\approx 3/100$ ) をおこなわなければならなかった。

この 3 重対角行列の丸め誤差の成長に関して、Wilkinson<sup>3)</sup> は、行列が優対角ならば、直接解法は丸め誤差の成長に関してきわめて安定であることを示している。もっと一般的には、係数行列の要素を  $a_{ij}$  とするとき、係数行列が既約で

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad (6 \cdot a)$$

がすべての  $i$  について成り立ち、すくなくとも一つの  $i$  に対して、

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad (6 \cdot b)$$

が成り立つならば、Gauss-Seidel 法は収束する(十分条件)<sup>1)</sup>。

そこで、定常流の数値解析の場合にも、この優対角性を利用すると、次のように安定な解法を作ることができ<sup>4)</sup>。解が収束したと仮定すると、

$$|\omega_i^{(m)} - \omega_i^{(m-1)}| \rightarrow 0 \quad (7)$$

となるはずである。ここで、上つきの添字  $m$  は反復回数を表す。そうすると、式(4)を中心差分近似するとき式(7)を考慮して、

$$\begin{aligned} u_i \frac{\omega_{i+1} \pm \mu \omega_i^{(m+1)} \mp \mu \omega_i^{(m)} - \omega_{i-1}}{2h} \\ = \frac{1}{Re} \frac{1}{h^2} (\omega_{i+1} + \omega_{i-1} - 2\omega_i) \end{aligned} \quad (8 \cdot a)$$

と近似できる。これを整理して、

$$\begin{aligned} (-hReU_i/2-1)\omega_i + (\mu hRe|U_i|/2+2)\omega_i^{(n+1)} \\ + (hReU_i/2-1)\omega_{i+1} \\ = \mu hRe|U_i|\omega_i^{(m)}/2 \end{aligned} \quad (8 \cdot b)$$

となる。あるいは、

$$\begin{aligned} (-hReU_i/2-1)\omega_i + (\mu' + 2)\omega_i^{(m+1)} \\ + (hReU_i/2-1)\omega_{i+1} = \mu' \omega_i^{(m)} \end{aligned} \quad (8 \cdot c)$$

としてもよい。ここで、 $\mu$ ,  $\mu'$  は安定化係数ともいふべき

表 1 安定化係数と反復回数

安定化係数 $\mu$	反復回数 $IT$
$0.2 \times 10^{-3}$	40
0.4	71
2.0	340
4.0	672
8.0	1135

ものである。差分式(8・b), あるいは(8・c)は  $\mu$ ,  $\mu'$  の値を適当に調整することにより、 $\omega_i$  の係数行列を優対角にできるから、式(4)を安定に解くことができる。しかも、得られた解の精度は解が収束すれば中心差分と同じ  $O(h^2)$  となる。このような安定化の方法は、著者のほかにも 3 人の人がそれぞれ異なった考え方のもとに、同様な差分式を導いている<sup>5)~7)</sup>。

乱流の場合には、この方法を  $k-\epsilon$  方程式(後出, P.14, 式(25)~(28))に適用すると、差分方程式は、いずれも

$$\begin{aligned} s\{cs(\partial v_e/\partial y) - 2cv_e\}f_{j-1} + \{4cs(\partial v_e/\partial y) + \mu\}f_j \\ + s\{-cs(\partial v_e/\partial y) - 2cv_e\}f_{j+1} = 2s^3S_j + \mu f_j \end{aligned} \quad (9)$$

$f \equiv U$ ,  $k$ ,  $\epsilon$ ,  $s$ :  $y$  方向の格子幅

$S_j$ : source term,  $c$ : constant

となる。 $y=0.05$  と  $0.95$  の間を 9 等分( $s=0.1$ )して、 $\mu$  を変化させたとき、これらの連立方程式を SOR 法(緩和係数はすべて 1)で解くのに必要な反復回数を表 1 に示す。ただし、収束条件は、境界条件の点を除いて、

$$|各方程式に解を代入|_{\max} < 10^{-2}$$

とした。この表から、 $\mu$  を大きくすると解を収束させるのに必要な反復回数  $IT$  が多くなることがわかる。なお、 $s=10^{-2}$ ,  $\mu=10^{-3}$  とすると  $IT=32$ ,  $s=10^{-3}$ ,  $\mu=10^{-5}$  とすると  $IT=32$  であった。したがって、この方法は乱流の数値解析の場合にも効果的である。

### 4. 速度を使った反復解法

次に、非圧縮粘性流体の非定常流の反復解法について述べる。非圧縮粘性流体の流れは、無次元化した N-S 方程式

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{v}) = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{v} \quad (10)$$

と、連続の方程式

$$D = \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (11)$$

とを与えられた初期条件と境界条件のもとで解けばよい。

ここで、 $\mathbf{v}$  は速度ベクトル ( $x$ ,  $y$ ,  $z$  成分をそれぞれ  $u$ ,  $v$ ,  $w$  とする),  $p$  は流体の圧力,  $D$  は膨張速度である。 $Re$  は Reynolds 数で、流れ場の代表長さ  $L$ , 代表速度  $U$ , 流体の動粘性係数  $\nu$  を使うと  $Re = UL/\nu$  とかける。また、 $\mathbf{A}(\mathbf{v})$  は、

$$\mathbf{A}(\mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \quad (12)$$

あるいは,

$$A(v) = \nabla \cdot (vv) \quad (13)$$

の形に書かれる。式(12)は convective form, (13)は divergence form とよばれており, これらは, 連続の方程式(11)が成り立てば同等である。対流項  $A(v)$  に上流差分法 (または, 風上差分法) を適用するときは, 通常 convective form の形にしておかなければならない。他方, 流体の運動量が保存するのは, 式(13)の divergence form の形である。このように, 方程式を書き換えるだけ (これについては, 以下にもっと詳しく述べる) で, 差分方程式がある特性をもってしまうとか, 種々の計算法が生じたりするのは, 流体力学の数値解析の特徴である。また, 乱流の数値解析では, 式(10)の粘性項が  $\nabla \cdot (1/Re + \nu_e) \nabla v$  の形 ( $\nu_e$ : うず粘性) になるが, さしあたりここでは, 式(10)の形で考える。

さて, N-S 方程式(10)と連続の方程式(11)とで方程式系としては閉じているのであるが, これを実際に数値解析的に解くとなると, 困難が生じる。それは, 連続の方程式(11)を満足させるように圧力をどう定めたらよいか, という問題である。このために, たとえば, 式(10)の発散をとって, 圧力に関する Poisson 方程式を,

$$\nabla^2 p = -\nabla \cdot A(v) + \left( -\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{1}{Re} \nabla^2 D \right) \quad (14)$$

と書く。すこしめやすしい形にすると, 式(12)の形から

$$\begin{aligned} \nabla^2 p = & - \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right. \\ & + 2 \left( \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ & \left. - \left( \frac{\partial D}{\partial t} + u \frac{\partial D}{\partial x} + v \frac{\partial D}{\partial y} + w \frac{\partial D}{\partial z} - \frac{1}{Re} \nabla^2 D \right) \right\} \end{aligned} \quad (15)$$

となる。したがって, もし,  $D$  に関する拡散方程式

$$\frac{\partial D}{\partial t} + u \frac{\partial D}{\partial x} + v \frac{\partial D}{\partial y} + w \frac{\partial D}{\partial z} = \frac{1}{Re} \nabla^2 D \quad (16)$$

が成り立てば,  $D \equiv 0$  でなくても

$$\begin{aligned} \nabla^2 p = & - \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right\} \end{aligned} \quad (17)$$

が成り立つ。

すなわち, N-S 方程式(10)と Poisson 方程式(17)とから得られる速度と圧力の場合は, 一般に連続の方程式(11)を満足しない。そこで, 圧力に関する Poisson 方程式を解くときには, 連続の方程式(11)が満足されていない限り, N-S 方程式と Poisson 方程式(15)を  $D=0$  となるように工夫して解かなければならない。

このように, 連続の方程式(11)を満足させるように圧力場を決めることは, そう簡単な問題ではないのである。以下, 連続の方程式を満足させるように N-S 方程式を解き, 圧力場を定める方法につき, 過去にいかな

る努力が払われてきたかを概観する。

#### 4.1 Stream-Function Vorticity Formulation

この方法は, 式(10)の回転をとった

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (v \cdot \nabla) \omega - (\omega \cdot \nabla) v = \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega \quad (18)$$

と, うず度  $\omega$  の定義式

$$\omega = \nabla \times v \quad (19)$$

および流れ関数  $\phi$  (ベクトルポテンシャル)

$$v = \nabla \times \phi \quad (20)$$

とから,  $\phi$  に関する Poisson 方程式

$$\omega = -\nabla^2 \phi \quad (21)$$

を解く方法である。速度場は, 式(20)より, 圧力場は N-S 方程式(10)を積分して求める。

(a) 2次元流の場合

2次元流の場合には, 流れ関数はスカラー量になり, 式(18)~(21)は発散形 (保存形) で

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial u \omega}{\partial x} + \frac{\partial v \omega}{\partial y} = \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega \quad (22)$$

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (23)$$

$$u = \partial \phi / \partial y, \quad v = -\partial \phi / \partial x \quad (24)$$

$$\omega = -\nabla^2 \phi \quad (25)$$

と書ける。

この方法は, 取り扱う変数の数が少ないこと, 連続の方程式を厳密に満足することから, 2次元流の場合には, Thom<sup>8)</sup>, Kawaguti<sup>9)</sup>の手回し計算機による時代より使われてきた最もポピュラーな方法といってよいであろう。しかし, この方法を使っても, 定常流の場合には, 3.2 で述べたような問題を生じるから,  $Re$  数が高くなると式(22)の対流項を中心差分近似する限り, 差分スキームの問題として, 計算機の容量・スピードがいかに大きく, また速くなったとしても, 差分解は発散する。Thom, Kawaguti のすぐれた数値的・物理的直観力をもってして, 初めて円柱のまわりの流れが正確に解けたのである。先人の偉業に頭の下がる思いである。

(b) 3次元流の場合

この場合には, 流れ関数は一般にベクトルポテンシャルになるから, 式(21)は3つの成分をもつ。式(18)~(21)の方程式系は, Aziz, Hellums<sup>10)</sup>によって初めて解析された。

その後, Hirasaki, Hellums<sup>11), 12)</sup>, および Richardson, Cornish<sup>13)</sup>により, 系(18)~(21)は一般化され vorticity-potential method として基本的には完成された。それは, 方程式系

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (v \cdot \nabla) \omega - (\omega \cdot \nabla) v = \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega \quad (26)$$

$$\omega = -\nabla^2 \phi, \quad (\nabla \cdot \phi = 0) \quad (27)$$

$$v = \nabla \phi + \nabla \times \phi \quad (28)$$

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (29)$$

を解く方法である。ここで、 $\varphi$  はスカラーポテンシャルである。こうすると、 $\psi$  に対する境界条件が簡単になり、たとえば、単連結領域の流れなら、

$$\partial \varphi / \partial n = u_n \quad (30 \cdot a)$$

$$\psi_{t_1} = \psi_{t_2} = \partial \psi_n / \partial n = 0 \quad (30 \cdot b)$$

となる。ただし、 $n$  は法線方向、 $t_1, t_2$  は 2 つの接線方向の成分を表す。

ところが、この方法は、後に Aregbesola, Burley<sup>14)</sup>, Wong, Reizes<sup>15)</sup>, および Tutty<sup>16)</sup> によって吟味され、たとえば、式(27)～(29)の差分方程式系の適正さに疑問が投げかけられている。その結果、スカラーポテンシャル  $\varphi$  を使わないで、

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_s + \nabla \times \psi, \quad \nabla \cdot \mathbf{v}_s = 0 \quad (31 \cdot a)$$

$$\nabla^2 \psi = -\omega + \nabla \times \mathbf{v}_s \quad (31 \cdot b)$$

を式(27)～(29)のかわりに使ったほうがよいとされている<sup>16)</sup>。

#### (c) 補遺

流れ関数とうず度を使う方法は、2次元流の場合には、連続の方程式を厳密に満足し、変数の数も少なく、収束も後に述べる速度と圧力を使った方法に比べてはるかに速い<sup>10)</sup>ので、うず度輸送方程式(22)の対流項の差分近似の問題を除いては、問題のないよい方法である。しかし、この方法を自由表面を含んだ問題、乱流の問題等に適用する場合には、2次元流の場合でもやっかいである。さらに、この方法（あるいは、これを一般化したうず度・ポテンシャル法）を3次元流に適用すると、解くべき方程式の数は、速度とうず度を使った方法に比べて、かえって増加する。さらに、うず度・ポテンシャル法の場合には、すでに述べたような差分方程式系の適正さの問題が生じる。

したがって、この方程式を3次元流に適用する例は、これまであまり例がないし、これからも少ないものと思われる。

#### 4.2 Primitive-Variable Formulation

この方法は、MAC法<sup>17)</sup>のはなばなしい成果とともに、自由表面をもつ流れへの適用性、3次元流への拡張の容易さ等の適用範囲の大きさから、最もよく研究された方法である。ここでは、たとえばMAC法という場合、本来はMarkerを使った方法であったのであるが、これにかまわず、数値解析法の性格にしたがってなるべく年代順に記述することにする。

##### 4.2.1 MAC (Marker-And-Cell) Method (1965)

この方法は、N-S方程式

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{v}) = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{v} \quad (32)$$

と圧力に関する Poisson 方程式

$$\nabla^2 p^{t+\Delta t} = -\left\{ \frac{\partial D}{\partial t} + \nabla \cdot (\nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{v})) \right\} + \frac{1}{Re} \nabla^2 D \quad (33)$$

を解く方法である。連続の方程式

$$D = \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (34)$$

に対する制約は、式(33)における  $\partial D / \partial t$  の評価を

$$\partial D / \partial t = -D^t / \Delta t \quad (D^{t+\Delta t} \equiv 0)$$

とすることによって、 $D=0$  となるようにしている。ただし、 $D^t$  は必ずしも 0 でないことを注意しておく。

この方程式系で、 $D^t$  を残し  $D^{t+\Delta t} \equiv 0$  とおくことによって、系が安定に解ける数値計算例は、文献18)を参照されたい。また、圧力の Poisson 方程式の境界条件は、一般にN-S方程式で与えられるから、非同次である。しかし、この境界条件は、次のようにすると、同次になる<sup>19)</sup>。まず、 $\partial \mathbf{v} / \partial t$  を

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} - \nabla p \quad (35 \cdot a)$$

とおく。ここで、 $\partial \mathbf{v}' / \partial t$  は未知であるが、 $\partial \mathbf{v} / \partial t$  は既知とする。この発散をとって、

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \nabla \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} \right) - \nabla^2 p, \quad \nabla^2 p = \nabla \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} \right) - \frac{\partial D}{\partial t} \quad (35 \cdot b)$$

を得る。次に、たとえば、固定壁面上では、式(35・a)で  $\partial \mathbf{v} / \partial t = 0$  であるから、これを使うと、式(35・b)の  $\partial u' / \partial t$  は、既知の量  $\partial u / \partial t$  と、 $\nabla p$  を使って書ける。そうすると、圧力に関する Poisson 方程式(33)のかわりに(35・b)を解くと、同次な境界条件が得られる。ただし、(35・b)でMAC法と同様に、 $\partial D / \partial t = -D^t / \Delta t$  と評価する。こうすると、収束も速いようである<sup>19)</sup>。

MAC法(32)～(33)と同じ方法に、SUMMAC (Stanford University Modified MAC) 法<sup>20)</sup>がある。また、MAC法を使って自由表面の境界条件を改良した方法は文献21)～23)にある。

なお、人工粘性項を付加して Mach 数が 0 から  $\infty$  まで計算できるような ICE (Implicit Continuous-Fluid Eulerian, 注：氷のことではない) Method<sup>24)</sup>もMAC法を開発した Los Alamos Scientific Laboratory の研究者によって開発されている。

##### 4.2.2 Pseudo-Unsteady Method<sup>25)</sup>

この方法は、定常流を計算するために Chorin<sup>25)</sup>が開発した、N-S方程式(32)と連続の方程式(34)のかわりに、方程式

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} + c^2 \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (36)$$

を使う方法である。 $t \rightarrow \infty$  の極限で、連続の方程式(34)を満足する。

なお、Hirt, Nichols<sup>26)</sup>によると、この方法を非圧縮粘性流体の非定常流の計算に使うと、差分解は許容しがたい振動をひきおこす。したがって、この方法を非圧縮粘

性流体の非定常流の計算に適用することは、時間刻み  $\Delta t$  の制約をも考慮すると、一般にはよい方法とは言えない。

#### 4.2.3 Simultaneous Relaxation Method for Velocity and Pressure

この方法は、MAC 法<sup>17)</sup>、あるいは Chorin の方法<sup>27)</sup>から発展させられた。

##### (a) Chorin の方法<sup>27)</sup>

これは、N-S 方程式

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{v}) = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{v} \quad (37 \cdot a)$$

から、tentative な速度場  $\mathbf{v}^{aux}$  を ADI 法で計算し、この  $\mathbf{v}^{aux}$  を使って、連続の方程式

$$D = \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (37 \cdot b)$$

を満足させるように速度  $\mathbf{v}$  と圧力  $p$  をスキーム

$$\mathbf{v}^{(m+1)} = \mathbf{v}^{aux} - \Delta t \cdot \nabla p^{(m)} \quad (37 \cdot c)$$

$$p^{(m+1)} = p^{(m)} - \lambda D^{(m+1)}, \quad \lambda: \text{parameter} \quad (37 \cdot d)$$

で反復させる方法である。ここで、上つきの添字  $m$  は反復回数を表す。

Chorin の方法の重要な点は、N-S 方程式から一度 tentative な速度場を計算し、この速度と圧力を同時に反復させる考え方をとったところであり、この考え方は後の研究者に重要な示唆を与えた。

##### (b) SMAC Method

この方法は、考え方としては、MAC 法の圧力の境界条件を簡便にするよう Chorin の方法<sup>27)</sup>にのっとって考案されたものであるが、解法の性格上、別に述べたほうがよいと思われるのでもう一度後述する。

##### (c) ABMAC (Arbitrary Boundary MAC) Method<sup>28)</sup>

この方法は、Viecelli<sup>28)</sup>により考案された。この方法は、N-S 方程式

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{v}) = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{v} \quad (38 \cdot a)$$

から、新しい時刻の速度場  $\mathbf{v}^{(n+1)}$  を計算し、これより、膨張速度

$$D^{(n+1)} = \nabla \cdot \mathbf{v}^{(n+1)} \quad (38 \cdot b)$$

を計算する。これを使って、圧力  $p$  を

$$p^{(m+1)} = p^{(m)} - \Delta \tau D^{(m)}, \quad D^{(0)} = D^{(n+1)}, \quad (38 \cdot c)$$

$\Delta \tau$ : relaxation parameter

によって計算する。以下は、得られた圧力(38・c)を N-S 方程式(38・a)に代入し、同じことを収束するまで繰り返す。式(38・a)から得られる速度成分を(38・b)に代入すると、 $p$  の擬拡散方程式

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} = \Delta \tau \nabla^2 p - S, \quad S: \text{source term} \quad (38 \cdot d)$$

が得られる。これを使って、von Neumann の安定性解析から、緩和係数  $\Delta \tau$  の制限について、2次元流の場合

$$\Delta \tau \leq \delta^2 / 2\Delta t, \quad \delta: \text{mesh size} \quad (38 \cdot e)$$

が得られる。

##### (d) SIMPLER (Semi-Implicit Method for Pressure-linked Equations Revised) Method<sup>29)</sup>

この方法は Control-volume を使った SIMPLE Method の改良版であるが、名前とはうらはらに、著者にはかえてスキームが複雑になったように思える。この方法の概略を記すと、まず擬 N-S 方程式

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \nu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (39 \cdot a)$$

を使って、 $\bar{\mathbf{v}}$  を求める。次に、この  $\bar{\mathbf{v}}$  より  $\bar{D}$  を求め、 $\nabla^2 p = \bar{D} / \Delta t$ ,  $\bar{D} = \partial \rho / \partial t + \nabla \cdot (\rho \bar{\mathbf{v}})$  (39・b)

を解く。得られた  $p$  を  $p^*$  とおいて、N-S 方程式

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p^* + \nu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (39 \cdot c)$$

より  $\mathbf{v}^*$  を求める。これから、 $D^*$  を求めて

$$\nabla^2 p' = D^* / \Delta t$$

を解く。得られた  $p'$  を使って速度  $\mathbf{v}$  を

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^* + \mathbf{v}', \quad \mathbf{v}' = -\Delta t \nabla p' / \rho$$

によって求める。以下、収束するまで式(39・a)にもどる。

##### (e) SOLA (A Numerical Solution Algorithm for Transient Fluid Flows) Method<sup>30)</sup>

SOLA 法としては、初めて文献 30) に名前が表れるが、本質的に同じ方法がすでに文献 31) に、MAC 法の一つの拡張として考案されている。この方法は、まず N-S 方程式

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{v}) = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{v} \quad (40 \cdot a)$$

から、 $\bar{\mathbf{v}}$  を求め、この  $\bar{\mathbf{v}}$  を使って  $D = \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}}$  を計算する。この  $D$  から、圧力の補正量  $\Delta p$

$$\Delta p = -\frac{\beta_0 D}{2\Delta t(1/\Delta x^2 + 1/\Delta y^2 + 1/\Delta z^2)},$$

$$\beta_0: \text{relaxation factor} \quad (40 \cdot b)$$

を計算する。ただし、 $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  はそれぞれ  $x$ ,  $y$ ,  $z$  方向の格子幅である。速度の補正は、速度成分が図 1 のように配置されているとして、

$$\left. \begin{aligned} u_{i+1/2,j,k} &\rightarrow u_{i+1/2,j,k} + \Delta t / \Delta x \Delta p \\ u_{i-1/2,j,k} &\rightarrow u_{i-1/2,j,k} - (\Delta t / \Delta x) \Delta p \\ v_{i,j+1/2,k} &\rightarrow v_{i,j+1/2,k} + \Delta t / \Delta y \Delta p \\ v_{i,j-1/2,k} &\rightarrow v_{i,j-1/2,k} - (\Delta t / \Delta y) \Delta p \\ w_{i,j,k+1/2} &\rightarrow w_{i,j,k+1/2} + (\Delta t / \Delta z) \Delta p \\ w_{i,j,k-1/2} &\rightarrow w_{i,j,k-1/2} - (\Delta t / \Delta z) \Delta p \end{aligned} \right\} \quad (40 \cdot c)$$

によっておこなう。

この方法は、式(40・c)を使うと

$$D^{(m+1)} = \nabla \cdot \mathbf{v}^{(m)} = D^{(m)} + 2\Delta t \Delta p (1/\Delta x^2 + 1/\Delta y^2 + 1/\Delta z^2) \quad (40 \cdot d)$$

とかける。圧力の補正量  $\Delta p$  は、

$$\Delta p = -D / (\partial D / \partial p) \quad (40 \cdot e)$$

で決められているから、実は Newton-Raphson 法である。

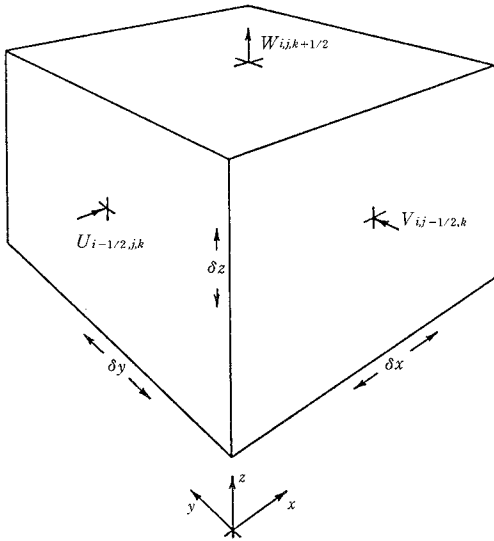


図1 速度成分の定義点

また、この方法は、後に SOLA-VOF (Volume of Fluid)<sup>32)</sup>として発展させられている。

(f) Takami and Kuwahara's Method<sup>33)</sup>

この方法は、N-S 方程式を

$$\mathbf{w} + \nabla p = \mathbf{F}, \quad \mathbf{w} = \partial \mathbf{v} / \partial t, \quad \mathbf{F} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla^2 \mathbf{v} / Re \quad (41 \cdot a)$$

と書き直して、スキーム

$$\mathbf{w}^{(m)} = \mathbf{F} - \nabla p^{(m)} \quad (41 \cdot b)$$

$$p^{(m+1)} = p^{(m)} - \varepsilon \nabla \cdot (\mathbf{w}^{(m)} + \mathbf{v} / \Delta t),$$

$$\varepsilon : \text{relaxation constant} \quad (41 \cdot c)$$

によって、収束するまで反復する。

#### 4.2.4 Velocity-Potential Method

(a) SMAC Method<sup>34)</sup>

この方法は、すでに述べたように Chorin の方法、MAC 法を発展させたものである。まず、N-S 方程式

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbf{v} \mathbf{v}) = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{v} \quad (42 \cdot a)$$

から tentative な速度場  $\tilde{\mathbf{v}}$  を求める。この  $\tilde{\mathbf{v}}$  を使って  $\tilde{D} = \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}$  を計算し、Poisson 方程式

$$\nabla^2 \varphi = \tilde{D}, \quad \varphi : \text{potential function} \quad (42 \cdot b)$$

を解く。このスカラーポテンシャル  $\varphi$  を使って、新しい時刻の速度場と圧力を

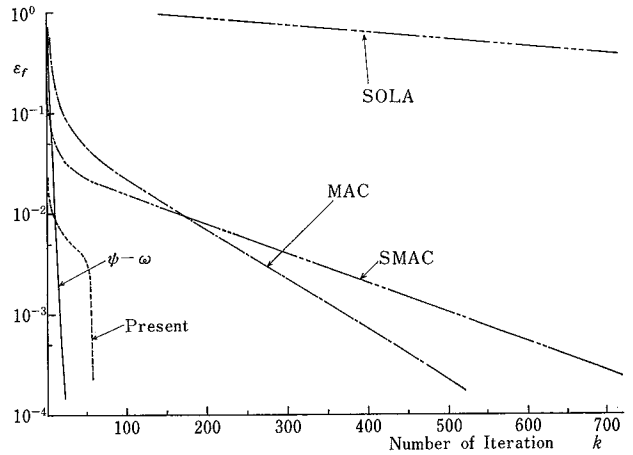
$$\mathbf{v}^{t+\Delta t} = \tilde{\mathbf{v}} - \nabla \varphi \quad (42 \cdot c)$$

$$p^{t+\Delta t} = p^t + \varphi / \Delta t + p_s, \quad p_s : \text{基準値} \quad (42 \cdot d)$$

によって求める方法である。

(b) Takemitsu's Method<sup>35)</sup>

著者の方法を述べる前に、静止から急に一定の流量で流れ出す 2 次元 Channel ( $Re=5$ ) 内の流れを計算したときの  $t=2\Delta t$  ( $\Delta t=1/100$ ) における収束するまでの各

図2 各方法による収束過程の比較 ( $t=0.02$ , SOLA 法のみ)

方法による反復回数を図2に示す。ここで、各方法の代表として流れ関数とうず度を使った方法、圧力に関する Poisson 方程式を解く方法として MAC 法、速度と Potential 関数を使った方法として SMAC 法、速度・圧力同時緩和法として SOLA 法を選んだ。ただし、SIMPLE 法系統のものは、各時間ステップで収束するまで何回も Poisson 方程式を解かなければならないので試みなかった。また、図中  $\varepsilon_f$  は、

$$\varepsilon_f = |f_{i,j}^{(m)} - f_{i,j}^{(m+1)}|_{\max}, \quad f \equiv \phi, p, \psi \quad (43)$$

を表す。

なお、図中 Present は後に述べる著者の方法である。この図から、2 次元流の場合、流れ関数とうず度を使った方法以外は、どの方法も収束がきわめて遅いことがわかる。これは、2 で述べたように、反復解法の補正量が適切な大きさにないことによる。しかし、すでにみてきたように (また、後で他の方法もすこし付け加えるが)、過去に研究されてきた方法は、いずれも N-S 方程式と連続の方程式を満足させるように、一応合理的にスキームが構成されている。この意味では、一見改良の余地はないように思えるのであるが、著者は次のように考えた。

2 次元流の場合に、流れ関数とうず度を使った方法が最も収束が速いのは、2 次元流の場合には、流れ関数がスカラーで存在することと、流れ関数を導入することにより、連続の方程式が各反復において自動的 (陰的) に満足されていることによるものと考えられる。したがって、速度と圧力を使った解析においても、各反復ごとに何か保存する量を拘束条件として付け加えてやると、収束は速くなるはずである。この考え方のもとで最も簡単な保存量として、うず度をとると、各時刻で

$$\omega^t = \omega^{(1)} = \omega^{(2)} = \dots = \omega^{(m)} = \omega^{(m+1)} = \dots \quad (44 \cdot a)$$

となる。すなわち、 $\omega$  は各時刻で何回反復しても不変であ

る (保存される) から,

$$\omega^t = \nabla \times \mathbf{v}^{(m)} = \nabla \times \mathbf{v}^{(m+1)} \quad (44 \cdot b)$$

が得られる. この式は, ポテンシャル関数  $\varphi$  を導入すると,

$$\mathbf{v}^{(m+1)} = \mathbf{v}^{(m)} - \nabla \varphi^{(m+1)} \quad (44 \cdot c)$$

とおくことによって自動的に満足される. そこで, この式の発散をとると,

$$D^{(m+1)} = D^{(m)} - \nabla^2 \varphi^{(m+1)} \quad (44 \cdot d)$$

となる.  $D^{(m+1)}$  は, 各反復ごとに 0 となるべき量であるから,  $D^{(m+1)} = 0$  とおくと,  $\varphi$  に関する Poisson 方程式

$$\nabla^2 \varphi^{(m+1)} = D^{(m)} \quad (44 \cdot e)$$

が得られる. ただし, 角をもつ流れでは, 角のところで  $\varphi$  は多価関数になるから, あらかじめ境界条件を与えて式 (44・e) を解く.

計算の順序は, N—S 方程式

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot (\nabla \mathbf{v}) = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{v} \quad (44 \cdot f)$$

から, 新しい時刻の速度場を求めて,  $D^{t+\Delta t} = \nabla \cdot \mathbf{v}^{t+\Delta t}$  を計算する. 次に, 式 (44・e) を第 1 回めの反復で解き, 新しい速度場を式 (44・c) から計算する. 以下, (44・e) と (44・c) を  $D^{(m+1)}$  が適当に小さい値になるまで繰り返す.  $D=0$  となる速度場が得られたら, N—S 方程式

$$(\nabla p)^{t+\Delta t} = -\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\right)^t - (\nabla \cdot \mathbf{v} \mathbf{v})^t + \frac{1}{Re} (\nabla^2 \mathbf{v})^t \quad (44 \cdot g)$$

より新しい時刻の圧力  $p^{t+\Delta t}$  を求める.

この方法は, 上にみてきたように, うず度を陰的に保存する量 (implicit invariant) とのみ扱っているだけで, うず度を直接計算するわけではない. また, Poisson 方程式 (44・e) は 1 つしか解いていない. したがって, 直接法で式 (44・e) が解ければ, 形式上, この方法は SMAC 法と同じになる. しかし, SMAC 法と根本的に異なるところは速度と圧力を使って N—S 方程式を解く際に implicit invariant を導入したことで, このことのために SMAC 法に比べて収束もきわめて速く (図 2 参照), また, 定常流の方程式や陰解法にも容易に拡張できるのである<sup>36)</sup>.

この方法は, 3 次元流の場合にも適用できるが, 著者がこの方法を最初に考えついたとき, 実は SMAC 法を知らなかった. もし, 知っていたら思いつかなかったに違いない. また, この方法を誰もこれまで思いつかなかったのは, 流れ関数とうず度を使った方法では, 0 が各時刻, 各反復で implicit invariant になっていたからであろう.

#### 4.2.5 補 遺

速度と圧力を使う方法は, 自由表面を含む問題, 境界の壁が動く問題, 乱流の問題, 3 次元流の問題等, 境界条件の取り扱いやすさから, これからもずっと研究が続けられていくであろう. 解くべき方程式の数, 差分方程式の適正さ, 収束の速さ, 精度等に関してより高度の発

展が期待される方法である.

なお, 一つだけ注意をしておく. 圧力に関する Poisson 方程式を解く方法は,  $D^{t+\Delta t}=0$  と同時に  $D^t=0$  を満足するような方法でない限り, 性質のよい初期条件および周期境界条件等の特殊な境界条件でない限り, 将来使われなくなる可能性がある. なぜならば, 静止の状態から急に一定の流量が流れ出す問題<sup>35)</sup>で, 上流側でのみこの速度を与えると,  $D^t=0$  でない MAC 法では流れが下流に伝播するまで時間がかかるからである. このときの計算例を図 3(a), (b) に示す. 速度場, 圧力場ともに MAC 法の解は正しいとは言えない. このような解が得られる理由は, Poisson 方程式 (33) から得られる圧力場は,  $D=0$  でない限り正しい解を与えないからである.

このことを敷衍して考えると,  $D^{t+\Delta t}=0$  でも  $D^t=0$  でないような解法というのは, 上流側が定常流の場合には, 上流側の流体がほぼ計算領域を通過する時刻までの過渡的な解は正しくない. また, 上流側が非定常流の場合には, 非定常流の変化が無視できるほど (たとえば,

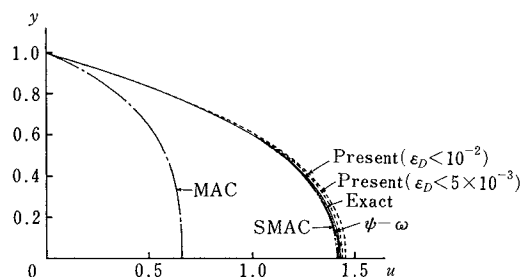


図 3 (a) 2 次元非定常 Poiseuille 流の下流側の速度分布 ( $t=0.5$ )

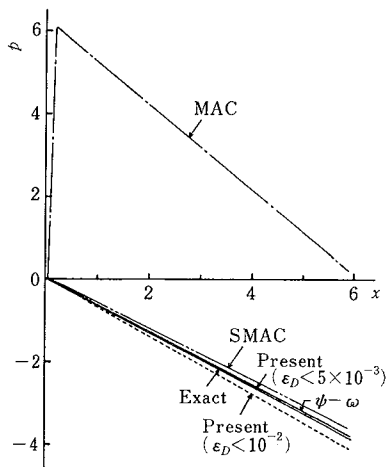


図 3 (b) 2 次元非定常 Poiseuille 流の中心軸上に乗った圧力分布 ( $t=0.5$ )

上流側の格子で発生する  $D_{i,j}$  が  $|D_{i,j}|_{\max} = O(10^{-3})$  程度以下) 小さくない限り, 計算中に図 3 で示したようなことが生じると考えられる。

#### 4.3 Velocity-Vorticity Formulation<sup>7)</sup>

##### (a) スキーム

この方法は, うず度輸送方程式

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \omega - (\omega \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega \quad (45 \cdot a)$$

から, 新しい時刻のうず度を求め, これを使って速度に関する Poisson 方程式

$$\nabla^2 \mathbf{v} = -\nabla \times \omega \quad (45 \cdot b)$$

を解く方法である。

##### (b) 補遺

この方法は, 式(45・b)よりわかるように, 2次元流なら 2つの Poisson 方程式を, 3次元流なら 3つの Poisson 方程式を解かなければならない。また, 圧力を求めるときには別途計算をおこなう。

なお, 境界のところで最も大きな  $D = \nabla \cdot \mathbf{v}$  の値をとり, 必ずしも  $D=0$  でないのに注意が必要である。

#### 4.4 Integro-Differential Formulation<sup>37)</sup>

##### (a) スキーム

この方法も, うず度輸送方程式

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \omega) + \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega \quad (46 \cdot a)$$

によって新しい時刻のうず度を求め, 積分

$$\mathbf{v} = -\frac{1}{A} \int_V \frac{\omega_0 \times (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r})}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|^d} dV_0 + \mathbf{v}_\infty \quad (46 \cdot b)$$

$$A = 1/4\pi, \quad d=3 \quad (3 \text{次元流})$$

$$A = 1/2\pi, \quad d=2 \quad (2 \text{次元流})$$

$$A = 1, \quad d=1 \quad (1 \text{次元流})$$

によって速度を求める方法である (図 4)。

##### (b) 補遺

この方法は, 理論的には興味深い方法であると思われるが, この方法を使って実際に研究をおこなった例が少ないところを見ると, 積分(46・b)が大変なのであろう。

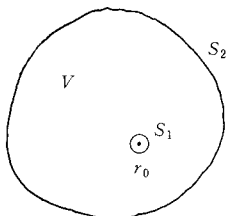


図4 積分領域

#### 5. 数値計算法からみたその他のいくつかの問題

以下, 思いつくままに記す。

##### 5.1 定常流の計算

定常流の計算は, 通常非定常法 (time marching method) でおこなわれることが多い。これは, 定常流の方程式を解くと, 3.2 で述べた問題が生じることと,  $D = \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  をどうやって満足させるかという問題があるからであろう。

しかし, 非定常法で得られたときの解の収束判定に  $\mathbf{v}$ ,  $p$ ,  $k$ ,  $\varepsilon$  などのノルムを使う場合がある。これは, 定常流を計算していることから考えて,  $\partial/\partial t$  の項が十分小さくなったときに収束したと判定すべきである。また,  $\partial/\partial t$  の項が小さくても解が時間的に振動している場合には, 計算領域, 格子幅の大きさ等に十分な注意を払う必要があるように思われる。

##### 5.2 差分方程式の問題

###### (a) 乱れと格子の大きさの問題

乱れといっても, 流れのもつ乱れと差分方程式から生じる乱れがあるが, これと格子の大きさについて, とくに遷移流などで, どの程度のことでわかっているのか著者は知らない。

###### (b) 上流差分法

計算を安定化させるために, 上流差分法がよく使われる。この方法は, 人間の考えだした差分スキームの最高傑作の一つだとたしかに思う。しかし, 著者は流体の計算は, 流れの大局性と局所性を同時に表現できるスキームが良いスキームだと考えているので, どちらかを犠牲にするスキームは好まない。上流差分法に関するわかりやすい文献は, 文献 38) にある。

###### (c) 高精度差分

まず, 時間差分について考えると, たとえば Burgers 方程式で  $O(\Delta t^2)$  の差分方程式を作っても, これを N-S 方程式に適用すると, 非圧縮粘性流体の場合には, 圧力の項があるので, 一般には  $O(\Delta t^2)$  ではなく,  $O(\Delta t)$  となる。たとえば,  $p^{t+\Delta t}$  を正しく求めるためには,  $D^{t+\Delta t} = \nabla \cdot \mathbf{v}^{t+\Delta t} = 0$  となる必要があるからである。

次に, 空間差分については, 計算領域で不等間隔にすると精度が落ちるので注意が必要である。簡単に高精度にできる方法 (境界条件の取り扱いも含めて計算の簡単な方法) の開発が期待される。

###### (d) 境界条件

まず, 流入側について考える。たとえば, 乱流の計算で実験値を入れると, N-S 方程式, あるいはモデル方程式の解になっていない。これをどうするか, という問題がある。

次に, 流出側では,  $\partial/\partial x^n = 0$  ( $x$ : 流れ方向,  $n$ : 整数) の境界条件だけでは計算された物理量が, とくに高



$Re$  数ではなめらかにつながっているとは思えない。これは、人間にとっては結局のところ、local な流れしか解けないからなのか、あるいは簡単そうで意外に難しい問題だから誰もいまのところできないのか、著者にはまだわからない。要は、壁の上も含めて consistent に差分方程式をどのように構成したらよいか、そのためには、自然な境界条件をどのように与えたらよいかという問題である。

## 6. ま と め

本解説において、定常流の反復解法と、速度と圧力に関する方程式系でどのようにして連続の方程式を満足させるかという問題を中心に、いくつかの方法を紹介した。ここに述べた方法が、全部というわけではもちろんないが、重要な方法は思いつく限り記述した。

著者の感じでは、流体力学の数値計算法は、これからますます発展していくものと思われるが、新しい差分スキームができ上がったら、そのスキームに対する反省は、必ずしも本人である必要はないが、必要であるということである。

終りに臨み、本稿をとりまとめるにあたり、本所村上周三教授、加藤信介講師、小林敏雄教授、吉澤徹助教授、堀内潔助手をはじめとする NST グループの方々から貴重な御意見を戴きました。ここに記して厚く感謝致します。

(1986 年 9 月 11 日受理)

## 参 考 文 献

- 1) たとえば, D.A. Anderson, J.C. Tannehill and R.H. Pletcher, Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer, Hemisphere Publishing Corporation, Washington/New York/London (1984)
- 2) H.B. Keller and H. Takami, in Numerical Solutions of Nonlinear Differential Equations (D.Greenspan, Ed.), John Wiley & Sons, Inc. (1966)
- 3) J.H. Wilkinson, J. Assoc. Comput. Mach., **8** (1961), 281
- 4) N. Takemitsu, J. Comput. Phys., **36** (1980), 236
- 5) S.C.R. Dennis and G.-Z. Chan, Phys. Fluids, Suppl. II (1969), 88
- 6) S. Ozawa, J. Phys. Soc. Jpn. **38** (1975), 889
- 7) H. Fasel, in Computational Fluid Dynamics (W. Kollman, Ed.), Hemisphere Publishing Corporation, Washington/New York/London, 1980
- 8) A. Thom, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A. **141** (1933), 651
- 9) M. Kawaguti, J. Phys. Soc. Jpn., **8** (1953), 747
- 10) K. Aziz and J.D. Hellums, Phys. Fluids, **10** (1967), 314
- 11) G.J. Hirasaki and J.D. Hellums, Quart. Appl. Math., **26** (1968), 331
- 12) G.J. Hirasaki and J.D. Hellums, Quart. Appl. Math., **28** (1970), 293
- 13) S.M. Richardson and A.R.H. Cornish, J. Fluid Mech., **82** (1977), 309
- 14) Y.A.S. Aregbesola and D.M. Burley, J. Comput. Phys., **24** (1977), 398
- 15) A.K. Wong and J.A. Reizes, J. Comput. Phys., **55** (1984), 98
- 16) O.R. Tutty, J. Comput. Phys., **64** (1986), 368
- 17) F.H. Harlow and J.E. Welch, Phys. Fluids **8** (1965), 2182 ; J.E. Welch, F.H. Harlow, J.P. Shannon and B. J. Daly, LA-3425, 1966
- 18) C.W. Hirt and F.H. Harlow, J. Comput. Phys., **2** (1967), 114
- 19) C.R. Easton, J. Comput. Phys., **9** (1972), 375
- 20) R.K.-C. Chan and R.L. Street, J. Comput. Phys., **6** (1970), 68
- 21) C.W. Hirt, J.L. Cook and T.D. Butler, J. Comput. Phys., **5** (1970), 103
- 22) B.D. Nichols and C.W. Hirt, J. Comput. Phys., **8** (1971), 434
- 23) W.E. Pracht, J. Comput. Phys., **7** (1971), 46
- 24) F.H. Harlow and A.A. Amsden, J. Comput. Phys., **3** (1968), 80
- 25) A.J. Chorin, J. Comput. Phys., **2** (1967), 12
- 26) C.W. Hirt and B.D. Nichols, J. Comput. Phys., **34** (1980), 390
- 27) A.J. Chorin, Math. Comp., **22** (1968), 745
- 28) J.A. Vieceilli, J. Comput. Phys., **4** (1969), 543 ; J. Comput. phys., **8** (1971), 119
- 29) S.V. Patankar, in Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Hemisphere Publishing Corporation, 1980
- 30) C.W. Hirt, B.D. Nichols and N.C. Romero, LA-5852, 1975
- 31) C.W. Hirt and J.L. Cook, J. Comput. Phys., **10** (1972), 324
- 32) C.W. Hirt and B.D. Nichols, J. Comput. Phys., **39** (1981), 201
- 33) H. Takami and K. Kuwahara, J. Phys. Soc. Jpn., **37** (1974), 1695
- 34) A.A. Amsden and F.H. Harlow, LA-4370 (1970) ; J. Comput. Phys., **6** (1970), 322
- 35) N. Takemitsu, J. Comput. Phys., **61** (1985), 499
- 36) N. Takemitsu, Bulletin of the JSME, submitted
- 37) J.C. Wu and J.F. Thompson, Comput. and Fluids **1** (1973), 197
- 38) 村上周三, 加藤信介, 須山喜美, 空気調和・衛生工学会学術論文集, 1986, 10