

Large Eddy Simulation における移流項の近似法について

Note On the Approximation Scheme for the Convective Terms in Large Eddy Simulation

堀 内 潔*
Kiyosi HORIUTI

1. はじめに

Large Eddy Simulation (以下 LES) という手法が導入されて久しい¹⁾が、この手法が、流体工学の諸分野において有効であることは、すでに、生産研究等^{2,3)}で指摘されており、 $k-\epsilon$ モデルと並んで種々の応用がなされている。LES は、現在、Channel 内の流れ、混合層といった基礎的な場合^{2,3)}から、ビルまわり、乱流促進体といった応用色の濃い場合^{2,3)}まで、広く使われている。ここでは、前報^{2,3)}にひきつづき、Channel 乱流の LES について述べてみたい。

乱流を記述するナビエ・ストークス (NS) 方程式を解く際の困難さは、多くの場合、移流形の非線形項を持つことによるが、特に、数値計算上、長時間の数値積分を安定に行うためには、非粘性の下で NS 方程式が保存する量 (たとえば、運動量、運動エネルギー) を、離散近似した際にも保存するように移流項を設計することが必要であることは、古くから知られている⁴⁾。乱流の数値シミュレーションで最も重要な点は、乱流のモデル化にあるのは疑いのない点であるが、数値解法——ここでは、特に、非線形項の差分化——に十分な留意を払わないと、不正確な結果を得る場合があることを本報では指摘したい。

ところで、近年のスーパー・コンピューターの発達は、非常に低いレイノルズ数に限り、直接数値シミュレーション (Full Turbulence Simulation または FTS) をも可能にした。ただし、ここでいう FTS とは、全く打切り誤差のないスペクトル法⁵⁾によるものであり、厳密な意味での FTS である。FTS を行う一つの利点は、LES あるいは $k-\epsilon$ モデルに用いられた乱流モデルの検証を行える点にあり、FTS の例として、ここでは、Moser and Moin⁶⁾による、わずかに曲率のある Channel 内のシミュレーションをとり上げる。

2. 基礎方程式と計算結果

非圧縮の流れを考えるので、基礎方程式は、以下の NS

*東京大学生産技術研究所 第 1 部

および連続の方程式で与えられる。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \Delta u_i \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2)$$

取り扱う流れは、平行平板間の Channel 内の流れであり、下流方向に x 、横断方向に y 、平板に垂直な方向に z という座標系を用いる。平衡状態では、流れは x, y 方向に一樣と考えられるので、 x, y 方向に周期境界条件を、 z 方向には壁で粘着の境界条件を課す。(1) 式中の Re はレイノルズ数を表し、壁面摩擦速度 (u_*) と平板間の距離、動粘性係数 ν に基づいている。

LES では、(1), (2) にフィルターを課すことにより、フィルターのかかった速度 (\bar{u}) および圧力 (\bar{p}) に関する方程式として、(3), (4) を得る^{2,3)}。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i' u_j'}) \\ = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \Delta \bar{u}_i \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (4)$$

(3) 式中、(1) 式非線形項から生じた (5) 式のグリッド以下のスケールのストレスについては、Smagorinsky モデル⁷⁾を用いている。

$$\overline{u_i' u_j'} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \overline{u_i' u_i'} = -\nu_e \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (5)$$

この変形としては、Residual stress モデルと呼ばれる (6) 式がある。

$$\begin{aligned} \overline{u_i' u_j'} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \overline{u_i' u_i'} \\ = -\nu_e \left(S_{ij} - \langle S_{ij} \rangle \right) - \nu_e^* \langle S_{ij} \rangle \end{aligned} \quad (6)$$

ここに、 $S_{ij} = \partial \bar{u}_i / \partial x_j + \partial \bar{u}_j / \partial x_i$ を表すが、このモデルは、Schumann⁸⁾によって開発され、Moin and Kim⁹⁾によっても用いられている。また、 $\langle \rangle$ は x, y 平面内の平均を示す。

ところで、(3)式中、 $\partial(\bar{u}_i \bar{u}_j)/\partial x_j$ の項は、先づ、 $\partial(\bar{u}_i \bar{u}_j)/\partial x_j$ を計算し、これにフィルターをかけて得られる。 $\partial(\bar{u}_i \bar{u}_j)/\partial x_j$ の計算には、通常の計算と同様な方法がとられるが、1節で述べたような保存則を考慮した際の代表例は、Arakawa form¹⁰⁾と Rotational form⁹⁾である。Rotational form は、Moin and Kim⁹⁾によっても用いられ、世界最初のスーパー・コンピューターである ILLIACIV を用いた $64 \times 128 \times 63$ (順に、 x, y, z 方向の格子点数を示す) という大規模計算として実現された。しかし、本報で示すとおり、その結果には、十分な信頼性のおけない点があることが明らかにされた。本報では、本研究の結果と、Moin and Kim による計算 (以下 MK) および、Moser and Moin による計算 (以下 MM) との比較を行う。計算の概要は表 1 に示すとおりである。

本計算の詳細は、Horiuti¹¹⁾を参照されたいが、計算が正しく行われていることの一つの検証として、図 1 に平均速度分布を示した。Channel 内の流れでは、この分布に特徴的な二つの層が存在することが知られている。一つは対数則に従う層で、図 1 の $z_+ \geq 40$ の部分で、本計算の結果は、

$$\langle \bar{u} \rangle = \frac{1}{0.4} \log z_+ + 6.0 \quad (7)$$

で与えられる。ここに、 \bar{u} は下流方向の速度成分を、また z_+ は u_* と ν で正規化された z 方向の壁からの距離を表す。(7)式中の 2 つの係数のうち、0.4 は Kármán 係数と呼ばれ、実験の測定値と良く一致する。残りの係数は実験により多少のばらつきがあり、ほぼ、4.8 から 5.9 とされており、よく一致している。したがって、本計算と MK, MM との比較は有意なものとして判断して良いと思われる。

乱流の数値シミュレーションを活用する一つの利点は、実験では測定が容易でない乱流エネルギーのバランスといった量が正確に算出できる点にある。ここで、本計算、MK, MM の乱流エネルギーのバランスを比較してみる。図 2 (a), (b), (c) は、おのおの本計算、MK, MM の乱流エネルギーの z 方向成分のバランス ((8)式で $i=3$ としたもの) を比較している。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \bar{u}_i'^2 \rangle}{\partial t} = & -2\delta_{i1} \langle \bar{u}'' \bar{w}'' \rangle \frac{\partial \langle \bar{u} \rangle}{\partial z} \\ & - \frac{\partial}{\partial z} \langle \bar{w} \bar{u}_i'^2 \rangle - 2 \left\langle \left(\nu_e + \frac{1}{Re} \right) \frac{\partial \bar{u}_i''}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{u}_i''}{\partial x_j} \right\rangle \\ & - 2 \langle \bar{u}_i'' \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} \rangle + \frac{\partial}{\partial z} \left\langle \left(\nu_e + \frac{1}{Re} \right) \frac{\partial \bar{u}_i''}{\partial z} \right\rangle \\ & - 2 \langle \bar{u}_i'' \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\bar{u}_i \bar{u}_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j) \rangle \quad (8) \end{aligned}$$

表 1 計算の概要

	数値計算法	レイノルズ数	格子点数	計算機
本研究	LES Fourier+差分	1 2 8 0	$64 \times 128 \times 62$	HITAC S-810/20
Moin & Kim	LES Fourier+差分	1 2 8 0	$64 \times 128 \times 63$	ILLIAC IV
Moser & Moin	FTS Fourier+Chebyshev 多項式	3 3 6	$128 \times 128 \times 65$	Cray- XMP

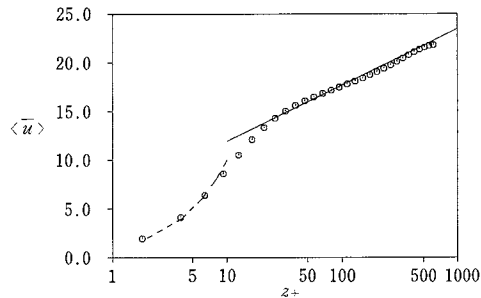


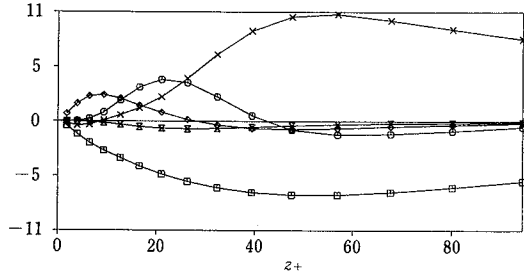
図 1 平均速度分布,

○ : 本計算

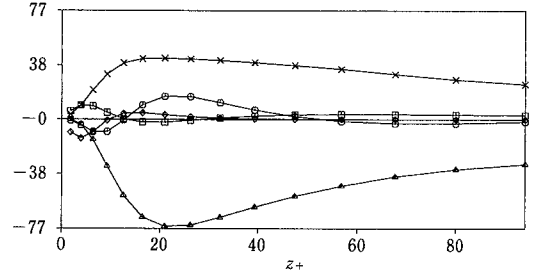
-----, $\langle \bar{u} \rangle = z_+$
 —————, $\langle \bar{u} \rangle = \frac{1}{0.4} \log z_+ + 6.0$

(8)式右辺の各項は順に、production, convection, dissipation, velocity pressure gradient (VPG), diffusion, cascade と呼ばれる。レイノルズ・ストレス ($\langle \bar{u}'' \bar{w}'' \rangle$) のバランスの式も同様に与えられるが、ここでは省略する。また、(8)式中の \bar{u}'' は $\bar{u} - \langle \bar{u} \rangle$ を表す。3つの結果の比較から特に顕著な点は、MK では壁のごく近く ($z_+ \sim 10$) で、VPG と convection が鋭いピークを持つ点にある。これは本計算と MM には見いだされない。ここで、若干の注釈があるが、MM は、わずかに曲率のある channel で、比較的低いレイノルズ数でなされた。しかし、曲率については、かなり小さいものでその影響は図 2 に見る z_+ の範囲では無視できる。したがって、MK と MM の相違は、 Re の違いによるという可能性もある。しかし、こうした差異は、レイノルズ・ストレスのバランスには、より顕著に現れている。図 3 (a), (b), (c) は、おのおの本計算、MK, MM のレイノルズ・ストレスバランスを示す。図 3 に見るように、 z_+ が 80 の近辺で、本計算、MM においては、VPG と production が釣り合うのに対し、MK では、convection と production が釣り合うという定性的な差異が生じている。更に、図 2 (b) に見られた壁近く ($z_+ \sim 10$) での鋭いピークに対応して、図 3 (b) でも鋭いピークが見いだされ、

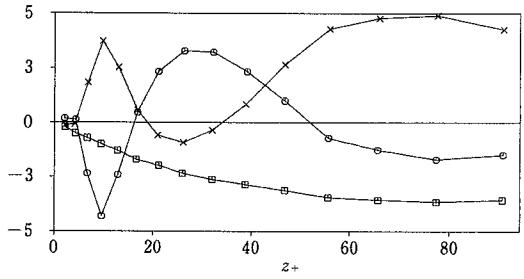
研 究 速 報



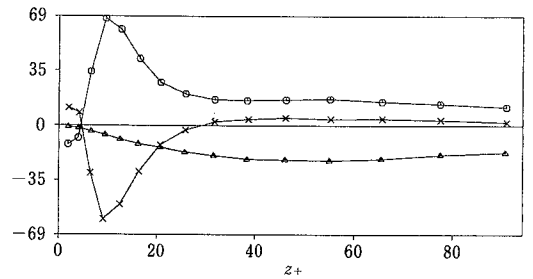
(a) 本計算



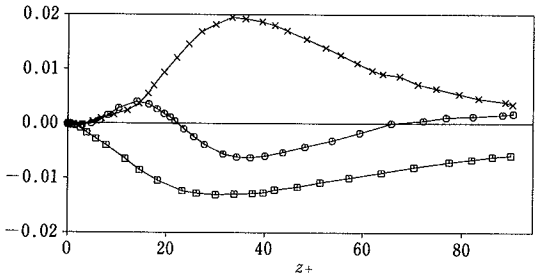
(a) 本計算



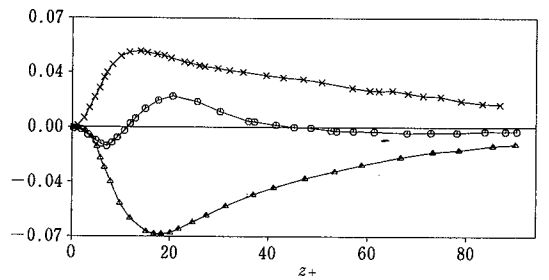
(b) MK



(b) MK



(c) MM



(c) MM

図 2 乱流エネルギーの z 方向成分のバランス

- △, production ; ○ convection ;
- ×, velocity pressure gradient ;
- ◇, diffusion ; □, dissipation ;
- ※, cascade.

VPG が負の値を示している。以上より、本計算と MM は、非常に良い一致を示しているのに対し、MK は、定性的に異なることがわかる。

3. 打ち切り誤差の評価

本節では、2 節で指摘した本計算および MM が MK と著しく異なる原因を打ち切り誤差の解析によって探ってみる。ただし、1 節で述べたように MM は 3 方向にスペクトル法を使っているため、打ち切り誤差は皆無である。

本計算では、(3) 式中の移流項 $\partial(\bar{u}_i \bar{u}_j) / \partial x_j$ を Ara-

図 3 レイノルズ・ストレスのバランス

kawa form と呼ばれる形で近似している ((9) 式)

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{\delta}{\delta x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) + \bar{u}_j \frac{\delta \bar{u}_i}{\delta x_j} + \bar{u}_i \frac{\delta \bar{u}_j}{\delta x_j} \right\} \quad (9)$$

ここに、 $\delta / \delta x_j$ は $\partial / \partial x_j$ を離散化したオペレーターを表す。これに対し、MK は、Rotational form ((10) 式) を用いている。

$$\bar{u}_j \left(\frac{\delta \bar{u}_i}{\delta x_j} - \frac{\delta \bar{u}_j}{\delta x_i} \right) + \frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta x_i} (\bar{u}_j \bar{u}_j) \quad (10)$$

本計算、MK のいずれも、 x 、 y 方向にはスペクトル法、 z 方向には、2 次の中心差分を用いているので、主要な誤差は、本計算では、(9) 式の $i=1$ 成分

$$\frac{1}{2} \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{1}{2} \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} (\bar{u} \bar{w}) \quad (11)$$

から生じ、 $x-y$ 平面内での平均をとったときの打ち切り

誤差は (12) 式のように評価される。

$$(h_{k+1} - h_k) \left\langle \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \bar{u} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2} + \bar{w} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right\rangle \quad (12)$$

ここに、 h_k は、 z 方向 k 番目の格子点の座標と $k-1$ 番目の格子点の座標の差を示す。同様に、Rotational form の主要誤差は、(10) 式 $i=3$ 成分中の項

$$-\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial z} \quad (13)$$

から生じ、打ち切り誤差は (14) 式のように評価できる。

$$(h_{k+1} - h_k) \left\{ \left\langle \frac{\partial \langle \bar{u} \rangle}{\partial z} \right\rangle^2 + \left\langle \left(\frac{\partial \bar{u}'}{\partial z} \right)^2 \right\rangle \right\} \quad (14)$$

ところで、図 1 の平均速度分布 $\langle \bar{u} \rangle$ に示したように、Channel 内の乱流では、壁の近くでは、 $\langle \bar{u} \rangle = z_+ = Re z$ という分布を持つ。したがって、(12)、(14) 式中の $\partial \langle \bar{u} \rangle / \partial z$ の項は、 Re という値をとり、(14) 式は、 Re^2 に比例する大きな値をとる。これに対し、(12) 式は、 $\partial \bar{w} / \partial z$ の値が小さいことと粘着の条件から、(14) 式にくらべるとかなり小さな値になる。すなわち、Rotational form を用いた際には、Channel flow の壁近傍のような大きな速度勾配をもつ所では、かなり大きな打ち切り誤差を伴うことがわかる。この誤差は、(3) 式中で source term のように振舞うため、エネルギー・バランスに出現した壁付近の大きなピークといった不正確な結果を導くことになった。なお、紙面の関係で詳細は省くが、Rotational form を用いた際には、前出の Residual stress モデルを用いないと、乱流が減衰し層流化してしまうことも付記しておく。

4. お わ り に

本報では、近年行われた、channel flow の 3 つの数値シミュレーションを比較することにより、Moin and Kim の結果の不正確な点を指摘し、打ち切り誤差の評価に

よりその原因を探った。こうした試みが、数値計算を工学上の有効な道具として確立させるための一つの教訓となれば幸いである。
(1986 年 9 月 11 日受理)

参 考 文 献

- 1) J.W. Deardorff : A numerical study of three-dimensional turbulent channel flow at large Reynolds numbers, *J. Fluid Mech.* 41, 453 (1970)
- 2) 生産研究, 乱流の数値シミュレーション 特集号 その 1, 36, 12 (1985)
- 3) 生産研究, 乱流の数値シミュレーション (NST) 特集号 その 2, 38, 1 (1986)
- 4) N.A. Phillips : *The Atmosphere and Sea in Motion*, Rockefeller Institute Press, New York (1959) 501
- 5) D.O. Gottlieb and S.A. Orszag : *Numerical Analysis of Spectral Method*, NSF-CBMS Monograph No. 26, SIAM (1977)
- 6) R.D. Moser and P. Moin : Direct numerical simulation of curved turbulent channel flow, NASA Technical Memorandum 89574 (1984)
- 7) J. Smagorinsky : General circulation experiments with the primitive equations, *Mon. Weather Rev.* 93, 99 (1963)
- 8) U. Schumann : Subgrid scale model for finite difference simulation of turbulent flows in plane channels and annuli, *J. Comp. Phys.* 18, 376 (1975)
- 9) P. Moin and J. Kim : Numerical investigation of turbulent channel flow, *J. Fluid Mech.* 118 (1982) 341.
- 10) A. Arakawa : Computational design of long-term numerical integration of equations of fluid motions, *J. Comp. Phys.* 1, 119 (1966)
- 11) K. Horiuti : Comparison of conservative and rotational forms in large eddy simulation of turbulent channel flow, to appear in *J. Comp. Phys.* (1987)