研究速報
特集 12
UDC 532.5.01/.08

Boundary-fit 曲線座標変換法による流体差分解析
——第1報　速度・圧力同時緩和法の構成——

FDM using boundary-fit curvilinear coordinate transformation
——1st Report Development of simultaneous iteration method for velocity and pressure——

小林敏雄*・森西洋平*
Toshio KOBAYASHI and Youhei MORINISHI

1. はじめに

流体の物理現象を支配する方程式としては連続の式および運動方程式があり，これら偏微分方程式群を解く数値解析法の1つとして差分法がある．これは偏微分方程式を直接離散化するのでプログラムも組みやすく，乱流モデルも取り込みやすいので，流体工学の分野では広く用いられている手法である[1]．しかしながら，差分法は任意形状への対応あるいは汎用化が難しい等の理由によりその適用がしばしば限定されることがある．このような差分法の弱点を克服する手法として，境界適合曲線座標変換法による差分解析が近年注目されている[2~4]．この手法の手順としては，まず計算面（写像面）と物理面で1対1の対応を取るようにGrid生成を行い，物理面上の各微分を計算面の微分に変換する．次に物理量を計算面上で離散化し，運動方程式を時間進行法などによって解くことになる．この際に連続の式を満たす必要があり，また圧力を求めることもしばしば要求される．非圧縮性流体においては，運動方程式に発散を操作することにより得られる圧力に関するポアソン式を，次の時間ステップで連続の式を満たすように変形し，これをSOR法などで解くこともできる[5]．ところがこのポアソン式を解くにあたって，境界面の圧力の値が必要になり，その取り扱いが問題となる．上記圧力解法の問題点を克服する手法として，直交メッシュの差分解析では速度・圧力同時緩和法がある[6,7]．これは圧力に対する解の収束性も良好で，連続の式に対する条件を確実に満たしながら計算を進めていくものである．この考え方を境界適合曲線座標変換法の手順に加えることができれば，差分法による数値シミュレーションがより広範囲の流れ場に適用されるものと思われる．

本報では，圧力の壁面境界条件が不要で，連続の式に対する条件を確実に満たしながら計算を進めてゆく速度・圧力同時緩和法の手順を境界適合曲線座標変換法に組み込むことを試みる．

*東京大学生産技術研究所　第2部

2. 記　号

X, Y；物理面の独立変数
ξ, η；計算面の独立変数
U, V；X, Y方向の速度
P；圧力（密度で割った値）
Re；レイノルズ数
Δt；時間きざみ
ΔP；圧力の補正量　(15)式
$\Delta\xi, \Delta\eta$；計算面上の空間きざみ（$\Delta\xi=\Delta\eta=h$）
α,；時間方向スキームのパラメータ　(13)式
D,；発散
DL；(16)式

添字
$\square_{i,j}$；座標（i, j）
$\square^n$；時間を表す指数
${}^l\square$；緩和計算の繰り返し指数
$\square_X, \square_Y, \cdots$；$X, Y$での偏微分

3. 基礎方程式と座標変換

流体解析の基礎方程式は，運動方程式，連続の式である．ここでは非圧縮性流体のみについて考える．また，問題の簡略化のため，2次元流れとする．

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial(UU)}{\partial X}+\frac{\partial(VU)}{\partial Y}&=-\frac{\partial P}{\partial X}+\frac{1}{Re}\cdot\nabla^2U\\ \frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial(UV)}{\partial X}+\frac{\partial(VV)}{\partial Y}&=-\frac{\partial P}{\partial Y}+\frac{1}{Re}\cdot\nabla^2V\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

$$\frac{\partial U}{\partial X}+\frac{\partial V}{\partial Y}=0\tag{2}$$

境界適合曲線座標変換法では，物理面と計算面の独立変数を入れ換えて物理量を計算面上で差分化する．物理面と計算面の独立変数の関係を，

$X(\xi,\eta)$, $Y(\xi,\eta)$ および $\xi(X,Y)$, $\eta(X,Y)$ のようにとることにより，物理面上の物理量 $f(X,Y)$ の1次微分は次のように変換できる．

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial X}&=\xi_X\cdot\frac{\partial f}{\partial\xi}+\eta_X\cdot\frac{\partial f}{\partial\eta}\\ \frac{\partial f}{\partial Y}&=\xi_Y\cdot\frac{\partial f}{\partial\xi}+\eta_Y\cdot\frac{\partial f}{\partial\eta}\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

上式中で，ξ_X, η_X, ξ_Y, η_Y などは，逆変換により，計算面上の微分に変換することができる．すなわち，

$$\left.\begin{aligned}\xi_X&=Y_\eta/J\\ \xi_Y&=-X_\eta/J\\ \eta_X&=-Y_\xi/J\\ \eta_Y&=X_\xi/J\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

ここに，J は座標変換のヤコビアンである．

$$J=X_\xi\cdot Y_\eta-X_\eta\cdot Y_\xi$$

2次微分以降は微分操作を繰り返せばよい．たとえばラプラシアンは次のようになる．

$$\begin{aligned}\nabla^2 f=&(\xi_{XX}+\xi_{YY})\cdot\frac{\partial f}{\partial\xi}+(\eta_{XX}+\eta_{YY})\cdot\frac{\partial f}{\partial\eta}\\ &+(\xi_X{}^2+\xi_Y{}^2)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial\xi^2}+(\eta_X{}^2+\eta_Y{}^2)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2}\\ &+2\cdot(\xi_X\cdot\eta_X+\xi_Y\cdot\eta_Y)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial\xi\partial\eta}\end{aligned}\qquad(5)$$

以上を用いれば，物理面上の偏微分方程式を計算面上での差分に変換できる．

4．計算メッシュおよび差分近似

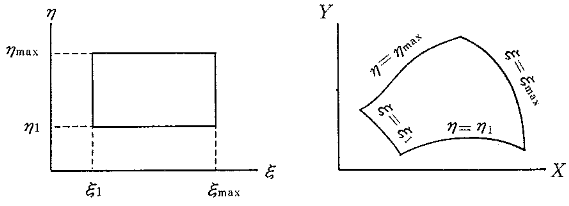
計算面と物理面との対応を図1に示す．図2に示すように，計算面上で速度の定義点を格子点上に，圧力の定義点をセルの中心にとる．

次に計算面上の各微分項について差分近似を行う．簡単のため計算面上のメッシュ幅を $\Delta\xi=\Delta\eta=h$ とし，各項を中心差分近似する．

速度の定義点上の各差分（$\phi=X, Y, U, V, UU, VV, UV$）

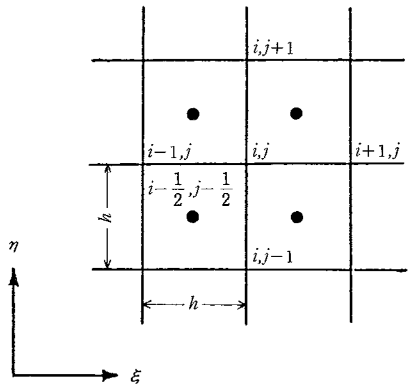
$$\left.\begin{aligned}\left.\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right|_{i,j}&=\frac{1}{2}(\phi_{i+1,j}-\phi_{i-1,j})/h\\ \left.\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right|_{i,j}&=\frac{1}{2}(\phi_{i,j+1}-\phi_{i,j-1})/h\\ \left.\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2}\right|_{i,j}&=(\phi_{i+1,j}-2\cdot\phi_{i,j}+\phi_{i-1,j})/h^2\\ \left.\frac{\partial^2\phi}{\partial\eta^2}\right|_{i,j}&=(\phi_{i,j+1}-2\cdot\phi_{i,j}+\phi_{i,j-1})/h^2\\ \left.\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi\partial\eta}\right|_{i,j}&=\frac{1}{4}(\phi_{i+1,j+1}-\phi_{i-1,\ j+1}\\ &\qquad-\phi_{i+1,j-1}+\phi_{i-1,j-1})/h^2\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

$$\left.\begin{aligned}\left.\frac{\partial P}{\partial\xi}\right|_{i,j}&=\frac{1}{2}(P_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}+P_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}-P_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}-P_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}})/h\\ \left.\frac{\partial P}{\partial\eta}\right|_{i,j}&=\frac{1}{2}(P_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}-P_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}+P_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}-P_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}})/h\end{aligned}\right\}\qquad(7)$$

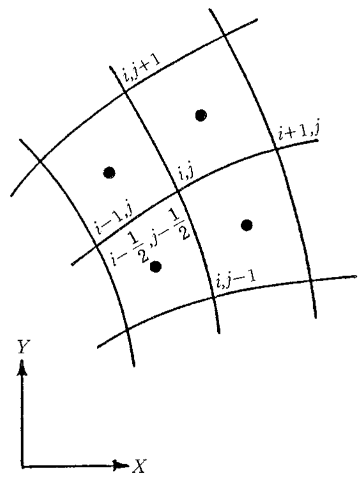


（a）計算面　　（b）物理面

図1　計算面と物理面の対応



（a）計算面（写像面）



（b）物理面

図2　計算メッシュ

（速度の定義点………格子点上）
（圧力の定義点………●点上）

圧力の定義点上の各差分（$\phi = X, Y, U, V$）

$$\left.\begin{aligned}\left.\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right|_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}(\phi_{i,j}+\phi_{i,j-1}-\phi_{i-1,j}-\phi_{i-1,j-1})/h \\ \left.\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right|_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}(\phi_{i,j}-\phi_{i,j-1}+\phi_{i-1,j}-\phi_{i-1,j-1})/h\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

5．速度―圧力同時緩和法の構成

ここでは，速度―圧力同時緩和法の構成を行う．

まず，運動方程式(1)を書き換える．

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial t} &= -\frac{\partial P}{\partial X}+F \\ \frac{\partial V}{\partial t} &= -\frac{\partial P}{\partial Y}+G\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

上式中の時間差分項を差分化し（簡単のため単段階陽解法を用いる），また圧力の微分項に(3)式を用いる．

$$\left.\begin{aligned}U_{i,j}^{n+1} &= U_{i,j}^{n}-\Delta t\cdot\left(\xi_X\cdot\frac{\partial P}{\partial\xi}+\eta_X\cdot\frac{\partial P}{\partial\eta}\right)_{i,j}+\Delta t\cdot F \\ V_{i,j}^{n+1} &= V_{i,j}^{n}-\Delta t\cdot\left(\xi_Y\cdot\frac{\partial P}{\partial\xi}+\eta_Y\cdot\frac{\partial P}{\partial\eta}\right)_{i,j}+\Delta t\cdot G\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

次に圧力の補正計算を考える．

$$\left.\begin{aligned}{}^{o}P_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{n+1} &= P_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{n} \\ {}^{l+1}P_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{n+1} &= {}^{l}P_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{n+1}+{}^{l}\Delta P_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{n+1}\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

ここで，圧力の定義点 $\left(i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}\right)$ および圧力の補正回数に注目し，(10)式について繰り返し $l+1$ と l の間で差をとる．圧力の微分項は(7)式により差分化する．すなわち，

$$\begin{aligned}{}^{l+1}U_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^{n}-\frac{\Delta t}{2\cdot h}\Big\{&(\xi_X)_{i,j}\cdot({}^{l}P_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+1}+{}^{l}P_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{n+1} \\ &-{}^{l}P_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+1}-{}^{l+1}P_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{n+1})+(\eta_X)_{i,j}\cdot({}^{l}P_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+1} \\ &-{}^{l}P_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{n+1}+{}^{l}P_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+1}-{}^{l+1}P_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{n+1})\Big\}+\Delta t\cdot f_{i,j}^{n}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}{}^{l}U_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^{n}-\frac{\Delta t}{2\cdot h}\Big\{&(\xi_X)_{i,j}\cdot\Big({}^{l}P_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+1}+{}^{l}P_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{n+1} \\ &-{}^{l}P_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{n+1}-{}^{l}P_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{n+1})+(\eta_X)_{i,j}\cdot({}^{l}P_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+1} \\ &-{}^{l}P_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{n+1}+{}^{l}P_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+1}-{}^{l}P_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{n+1})\Big)\Big\}+\Delta t\cdot f_{i,j}^{n}\end{aligned}$$

この両式の差をとると

$${}^{l+1}U_{i,j}^{n+1}-{}^{l}U_{i,j}^{n+1}=\frac{\Delta t}{2\cdot h}(\xi_X+\eta_X)_{i,j}\cdot({}^{l+1}P_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{n+1}-{}^{l}P_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{n+1}),$$

よって

$${}^{l+1}U_{i,j}^{n+1}={}^{l}U_{i,j}^{n+1}+\frac{\Delta t}{2\cdot h}(\xi_X+\eta_X)_{i,j}\cdot{}^{l}\Delta P_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{n+1}$$

圧力の定義点 $\left(i-\frac{1}{2},\ j-\frac{1}{2}\right)$ まわりの速度を同様にして求め，一般的に書くと次式を得る．

$$\begin{aligned}
{}^{l+1}U_{i,j}^{n+1} &= {}^{l}U_{i,j}^{n+1}+\frac{\alpha}{2}\ \frac{\Delta t}{h}(\xi_X+\eta_X)_{i,j}\cdot{}^{l}\Delta P_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{n+1} \\
{}^{l+1}U_{i-1,j}^{n+1} &= {}^{l}U_{i-1,j}^{n+1}+\frac{\alpha}{2}\ \frac{\Delta t}{h}(-\xi_X+\eta_X)_{i-1,j}\cdot{}^{l}\Delta P_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{n+1} \\
{}^{l+1}U_{i,j-1}^{n+1} &= {}^{l}U_{i,j-1}^{n+1}+\frac{\alpha}{2}\ \frac{\Delta t}{h}(\xi_X-\eta_X)_{i,j-1}\cdot{}^{l}\Delta P_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{n+1} \\
{}^{l+1}U_{i-1,j-1}^{n+1} &= {}^{l}U_{i-1,j-1}^{n+1}+\frac{\alpha}{2}\ \frac{\Delta t}{h}(-\xi_X-\eta_X)_{i-1,j-1}\cdot \\ &\qquad {}^{l}\Delta P_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{n+1} \\
{}^{l+1}V_{i,j}^{n+1} &= {}^{l}V_{i,j}^{n+1}+\frac{\alpha}{2}\ \frac{\Delta t}{h}(\xi_Y+\eta_Y)_{i,j}\cdot{}^{l}\Delta P_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{n+1} \\
{}^{l+1}V_{i-1,j}^{n+1} &= {}^{l}V_{i-1,j}^{n+1}+\frac{\alpha}{2}\ \frac{\Delta t}{h}(-\xi_Y+\eta_Y)_{i-1,j}\cdot \\ &\qquad {}^{l}\Delta P_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{n+1} \\
{}^{l+1}V_{i,j-1}^{n+1} &= {}^{l}V_{i,j-1}^{n+1}+\frac{\alpha}{2}\ \frac{\Delta t}{h}(\xi_Y-\eta_Y)_{i,j-1}\cdot{}^{l}\Delta P_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{n+1} \\
{}^{l+1}V_{i-1,j-1}^{n+1} &= {}^{l}V_{i-1,j-1}^{n+1}+\frac{\alpha}{2}\ \frac{\Delta t}{h}(-\xi_Y-\eta_Y)_{i-1,j-1}\cdot \\ &\qquad {}^{l}\Delta P_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{n+1}
\end{aligned} \tag{12}$$

(12)式中，α の値は時間方向スキームに依存するパラメータである．たとえば

$$\left.\begin{aligned}\alpha &= 1 \quad (\text{単段階陽解法}) \\ \alpha &= 3/2 \quad (\text{Adams-Bashforth 法})\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

(12)式の補正された速度により，圧力の定義点上で連続の式を満たすように圧力の補正値を求める．

圧力の定義点における divergence の差分式は，(3)式および(8)式により次のようになる．

$$\begin{aligned}D_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\cdot h}\Big[&(\xi_X)_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}\cdot(U_{i,j}-U_{i-1,j} \\ &+U_{i,j-1}-U_{i-1,j-1})+(\eta_X)_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}\cdot \\ &(U_{i,j}+U_{i-1,j}-U^{k}{}_{,j-1}-U_{i-1,j-1}) \\ &+(\xi_Y)_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}\cdot(V_{i,j}-V_{i-1,j}+V_{i,j-1} \\ &-V_{i-1,j-1})+(\eta_Y)_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}\cdot(V_{i,j}+V_{i-1,j} \\ &-V_{i,j-1}-V_{i-1,j-1})\Big]\end{aligned} \tag{14}$$

(14)式に(12)式の各項を代入することにより，繰り返し $l+1$ での divergence が得られる．

$${}^{l+1}D_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{n+1}={}^{l}D_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{n+1}+\frac{\alpha}{4}\ \Delta t\cdot{}^{l}\Delta P_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{n+1}\cdot DL_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}$$

ここで要請されることは，繰り返し $l+1$ の時点において(2)式，つまり連続の式を満たすこと（${}^{l+1}D_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{n+1}=0$）である．これにより，${}^{l}D_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{n+1}$ が零でなければ圧力の補正値を求めることができる．

$$ {}^{l}\varDelta P^{n+1}_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = -\frac{4}{\alpha}\,\frac{{}^{l}D^{n+1}_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{\varDelta t}\cdot\frac{1}{DL_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}} \tag{15} $$

(15)式中 $DL_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}$ は次式で表される．

$$ \begin{aligned} DL_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = \Big[& (\xi_X)_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}\cdot\{(\xi_X+\eta_X)_{i,j}-(-\xi_X \\ & +\eta_X)_{i-1,j}+(\xi_X-\eta_X)_{i,j-1}-(-\xi_X-\eta_X)_{i-1,j-1}\} \\ & +(\eta_X)_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}\cdot\{(\xi_X+\eta_X)_{i,j}+(-\xi_X+\eta_X)_{i-1,j} \\ & -(\xi_X-\eta_X)_{i,j-1}-(-\xi_X-\eta_X)_{i-1,j-1}\}+(\xi_Y)_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \\ & \cdot\{(\xi_Y+\eta_Y)_{i,j}-(-\xi_Y+\eta_Y)_{i-1,j}+(\xi_Y-\eta_X)_{i,j-1} \\ & -(-\xi_Y-\eta_Y)_{i-1,j-1}\}+(\eta_Y)_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}\cdot\{(\xi_Y+\eta_Y)_{i,j} \\ & +(-\xi_Y+\eta_Y)_{i-1,j}-(\xi_Y-\eta_X)_{i,j-1}-(-\xi_Y \\ & -\eta_Y)_{i-1,j-1}\}\Big]/h^2 \end{aligned} \tag{16} $$

以上により境界適合曲線座標変換法における速度一圧力同時緩和法が構成できた。

計算手順としては，(10)式の差分化式により時間方向に計算を進めた後に，(15)，(11)，(12)式により連続の式に対する条件を満たすまで速度一圧力の補正計算を行う．この手順を，定常問題ならば解が十分に収束するまで，また非定常問題ならば希望の時間ステップまで計算を進める．計算のフローチャートをまとめて図3に示す．

ここに示した手法は，非圧縮流体の流れ場の解法であるので，もちろん各種乱流モデルや，必要に応じては対流項の風上差分化等と組み合わせて，安定な計算を行うことができる．

7. まとめ

速度・圧力同時緩和法を組み込んだ境界適合曲線座標変換法の流体差分計算手法を構成した．本手法では，計算面上で速度の定義点は格子点上に，また圧力の定義点はセルの中心にとっている．連続の式は圧力の定義点上で満たすように補正計算を行うので，2次元の場合には，圧力1点の補正に対し，そのまわりの4点の速度を修正しながら計算を進める．また，圧力の壁面境界条件が不要であり，連続の式に対する条件を確実に満たしながら計算を進める．

本手法を用いることにより，Boundary-fit メッシュでの流体差分計算法の適用範囲がより広がることを期待したい．

(1986年9月16日受理)

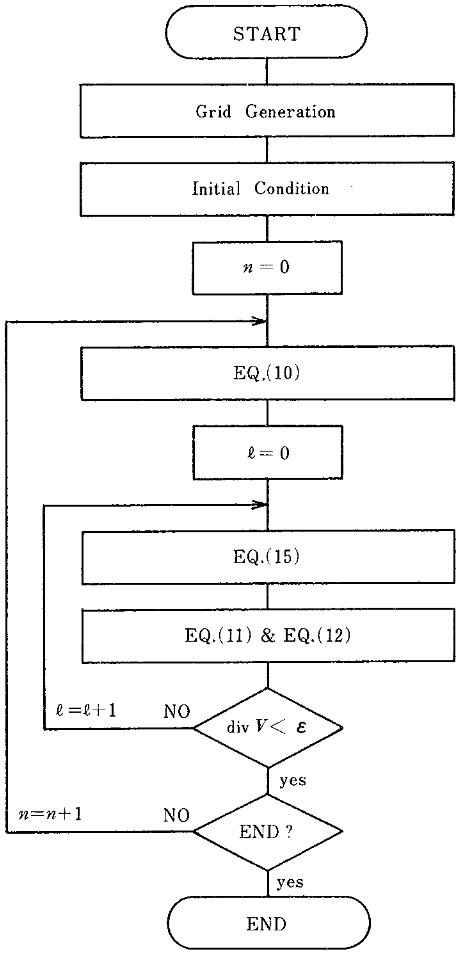


図3　計算手順

参 考 文 献

1) 日本機械学会誌，vol 87，No 785（1984）
2) 三木一克ほか，日本機械学会誌，vol 80，No. 810(1986) 549
3) J.F. Thompson ほか，Journal of Computational Physics, 47,（1982）1～108
4) J.F. Thompson, AIAA. Journal vol 22, No.11(1984) 1505～1523
5) コンピュータによる流体力学，P.J.ローチェ，著，高橋亮一ほか訳
6) C.W. Hirt ほか Journal of Computational Physics. 10（1972）324
7) 棚橋隆彦，機械の研究，第37巻第3号（1985），383～388，501～506