

非等方 $k-\epsilon-k_\theta$ モデルによる溝乱流における熱拡散の数値解析

A Numerical Study of Thermal Diffusion in Turbulent Channel Flow Using an Anisotropic $k-\epsilon-k_\theta$ Model

西 島 勝 一*・吉 澤 徹*

Shoiti NISIZIMA and Akira YOSHIKAWA

1. はじめに

著者達は、すでに、非等方 $k-\epsilon$ モデルを溝乱流やクエット乱流、矩形管内乱流の数値解析に適用し、その結果が妥当であることを示した¹⁻⁵⁾。今回は、吉澤によって統計理論的に導きだされた⁶⁻⁸⁾温度場も含む非等方 $k-\epsilon-k_\theta$ モデルを溝乱流における熱拡散の解析に応用した結果を報告する。このモデルの特徴はレイノルズ応力だけでなく熱流束の表現においても非等方性を表すことができる点にある。さらに、モデルの適用にあたっては、壁上で滑り無しの境界条件を課せられるように壁減衰関数を導入した。この数値解析で得られた結果は、流れ場、温度場とも実測値とよく対応していることを示している。

2. 非等方 $k-\epsilon$ モデル

速度、圧力（密度で割ったもの）の平均部分とそれからのずれを示す擾乱部分をそれぞれ (\bar{v}, \bar{p}) と (v', p') で表すと、三次元非圧縮・粘性流体に対する平均部分の基本方程式は、

$$\frac{D\bar{v}_\alpha}{Dt} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{v}_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \right) \bar{v}_\alpha = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(R_{\alpha\alpha} + \nu \frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial x_\alpha} \right) + A_\alpha \bar{\theta}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0 \quad (2)$$

で与えられる。 ν は動粘性率、 A は浮力効果の強さ、 $\bar{\theta}$ は温度の平均部分でありかつ $R_{\alpha\beta}$ はいわゆるレイノルズ応力で、

$$R_{\alpha\beta} = - \langle v'_\alpha v'_\beta \rangle \quad (3)$$

で与えられる $\langle \rangle$ はアンサンブル平均を表し、アルファベットのつ下き添字については 1 から 3 まで和をとることにする。

非等方 $k-\epsilon$ モデルでは擾乱場の基本的統計量として乱流エネルギー k とエネルギー散逸率 ϵ を選び、次の輸送方程式を用いている。

$$\frac{Dk}{Dt} = R_{\alpha\beta} \frac{\partial \bar{v}_\beta}{\partial x_\alpha} - A_\alpha H_\alpha - \epsilon + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(C_k \frac{k^2}{\epsilon} \frac{\partial k}{\partial x_\alpha} + \nu \frac{\partial k}{\partial x_\alpha} \right), \quad (4)$$

$$\frac{D\epsilon}{Dt} = \frac{1}{2} C_{\epsilon 1} k e_{\alpha\beta} e_{\alpha\beta} - C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(C_{\epsilon 3} \frac{k^2}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_\alpha} + \nu \frac{\partial \epsilon}{\partial x_\alpha} \right) \quad (5)$$

ただし、 H は熱流束、 $e_{\alpha\beta}$ は次のとおり速度の歪を表す。

$$e_{\alpha\beta} = \frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \bar{v}_\beta}{\partial x_\alpha} \quad (6)$$

さらに、(3)のレイノルズ応力は

$$R_{\alpha\beta} = - \frac{2}{3} k \delta_{\alpha\beta} + \nu_e e_{\alpha\beta} + \frac{1}{3} \left(\sum_{m=1}^3 \tau_m S_{m\alpha\alpha} \right) \delta_{\alpha\beta} + R'_{\alpha\beta} + \lambda_1 \left(A_\alpha \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_\beta} + A_\beta \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_\alpha} - \frac{2}{3} A_\alpha \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_\alpha} \delta_{\alpha\beta} \right), \quad (7)$$

$$\nu_e = C_\nu \frac{k^2}{\epsilon}, \quad (8)$$

$$\tau_m = C_{\tau m} \frac{k^3}{\epsilon^2}, \quad (9)$$

$$S_{1\alpha\beta} = \frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \bar{v}_\beta}{\partial x_\alpha}, \quad (10)$$

$$S_{2\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \bar{v}_\beta}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial x_\alpha} \right), \quad (11)$$

$$S_{3\alpha\beta} = \frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial x_\beta}, \quad (12)$$

$$R'_{\alpha\beta} = - \sum_{m=1}^3 \tau_m S_{m\alpha\beta}. \quad (13)$$

となり^{6,8)}、等方的 $k-\epsilon$ モデルの(7)式右辺第1、2項だけの表現と比べ第3—5項の非等方項が加わっている。ただし、上式中の $\delta_{\alpha\beta}$ はクロネッカーのデルタ記号であり、モデル定数は次のとおり最適化されている^{1-5,9)}。

$$C_\nu \sim 0.094, \quad C_k \sim 0.09, \quad C_{\epsilon 1} \sim 0.13, \quad C_{\epsilon 2} \sim 1.9,$$

$$C_{\epsilon 3} \sim 0.069, \quad C_{\tau 1} \sim 0.07, \quad C_{\tau 2} \sim -0.2, \quad C_{\tau 3} \sim -0.015$$

(14)

*東京大学生産技術研究所 第1部

3. 温度場に対する非等方乱流モデル

温度の擾乱部分を θ' とすると、温度の平均部分に対する基本方程式は、

$$\frac{D\bar{\theta}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_a} \left(H_a + \kappa \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_a} \right) \quad (15)$$

で与えられる。ただし、 κ は熱拡散係数であり、乱流熱束 $H = -\langle v' \theta' \rangle$ の非等方表現は^{7,8)}、

$$H_a = \kappa_e \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_a} + \kappa_{eA}^{a\beta} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_a} - \lambda_2 A_a + \lambda_3 A_a e^{aa} \quad (16)$$

となり、各係数は次のように示される。

$$\kappa_e = C_{kap} \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad (17)$$

$$\kappa_{eA}^{a\beta} = -\kappa_{eA} \varepsilon_{a\beta}, \quad (18)$$

$$\kappa_{eA} = -C_{kA} \frac{k^3}{\varepsilon^2}, \quad (19)$$

$$\lambda_1 = C_{\lambda 1} \frac{k^3}{\varepsilon^2}, \quad (20)$$

$$\lambda_2 = C_{\lambda 2} \frac{kk_\theta}{\varepsilon}, \quad (21)$$

$$\lambda_3 = C_{\lambda 3} \frac{k^2 k_\theta}{\varepsilon^2}, \quad (22)$$

$$A = -\gamma g. \quad (23)$$

なお、ここで、 γ は熱膨張係数、 g は重力の加速度 (ベクトル) であり、温度拡散 $k_\theta = \langle \theta'^2 \rangle$ については次の式が得られる。

$$\frac{Dk_\theta}{Dt} = J_p - \varepsilon_\theta + J_D,$$

$$J_p = 2H_a \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_a},$$

$$\varepsilon_\theta = C_{\varepsilon\theta} \frac{k_\theta \varepsilon}{k},$$

$$J_D = \frac{\partial}{\partial x_a} \left[\left(\kappa + C_{k\theta k\theta} \frac{k^2}{\varepsilon} \right) \frac{\partial k_\theta}{\partial x_a} \right] + \frac{\partial}{\partial x_a} \left(C_{k\theta k} \frac{kk_\theta}{\varepsilon} \frac{\partial k}{\partial x_a} \right) - \frac{\partial}{\partial x_a} \left(C_{k\theta \varepsilon} \frac{k^2 k_\theta}{\varepsilon^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_a} \right). \quad (24)$$

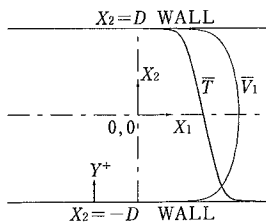


図1 座標

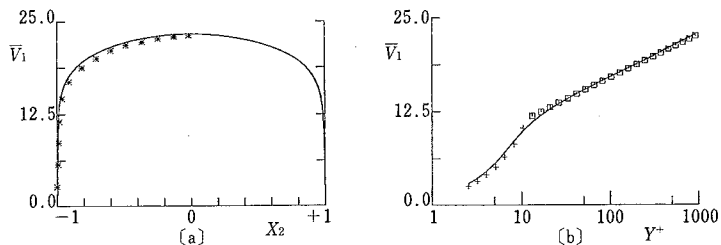


図2 流速 (a) * Laufer¹⁴⁾ $Re = 30800$; (b) $\square \log(y^+)/0.4 + 5.5$; $+ y^+$

なお、通常は(24)の J_D は、その右辺第1項のみが用いられており第2、3項は省略されている場合が多い。各モデル定数は統計理論的に以下のように選ばれている(ただし、()の外の数値は経験的に使用されている値である)。

$$\begin{aligned} C_{kA} &\sim (0.032), C_{\varepsilon\theta} \sim 2. (1.8), C_{k\theta k\theta} \sim 0.1 (0.22), \\ C_{k\theta k} &\sim (0.28), C_{k\theta \varepsilon} \sim (0.19), C_{kAp} \sim (0.14), \\ C_{\lambda 1} &\sim (0.03), C_{\lambda 2} \sim (0.18), C_{\lambda 3} \sim (0.014). \end{aligned} \quad (25)$$

4. 数値計算方法

以上の非等方モデルを図1で示す強制溝乱流へ適用していく。

A. 壁上の滑り無し条件の適用

非等方 $k-\varepsilon$ モデルも、通常の等方 $k-\varepsilon$ モデルと同様に(8)の渦粘性表現がモデルの重要な基礎となっている。しかし、この仮定は、溝乱流の中央部では成立していると考えられるが、壁の極近のいわゆる粘性底層内では成り立たない。そこで、以上の式の渦粘性にかかわるすべての各項、すなわち、 k^2/ε 、 k^3/ε^2 の乗ぜられている項に、壁近くで減衰する次の壁減衰関数を掛け合わせる必要がある。

$$f_{av} = 1 - \exp(-y^+/A_f), \quad A_f = 5.2. \quad (26)$$

この関数は流れ場に関わるもの、すなわち(1)、(4)、(5)、(7)–(9)、(13)に乗ぜられるもので、 y^+ は壁座標で、

$$y^+ = x'_2 R = \frac{v^* x'_2}{\nu}, \quad (27)$$

$$R = \frac{D}{\nu} \sqrt{D(-d\bar{p}/dx_1)}, \quad (28)$$

$$v^* = \sqrt{\nu \left(\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2} \right)_{wall}} \quad (29)$$

と定義される。 x'_2 は壁からの距離、 v^* は摩擦速度である。さらに、温度場(15)–(20)、(22)、(24)に関する壁減衰関数は、

$$f_{at} = 1 - \exp(-y^+/B_f), \quad B_f = 20 \quad (30)$$

となる。ここで(26)と(30)の定数 A_f と B_f は、それぞれ

研 究 速 報
 図 2 と 図 3 の対数速度則, 対数温度則を再現するように最適化された値である.

B. 溝乱流に対する支配方程式

図 1 のとおり座標をとり, 強制溝乱流であることを考慮して, 次の条件を仮定する.

$$\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_1} = 0, \quad \bar{v}_2 = \bar{v}_3 = 0, \tag{31}$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1} = \text{constant}, \quad \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_2} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_3} = 0, \tag{31}$$

$$A = 0, \quad \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_1} = \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial k_\theta}{\partial x_1} = \frac{\partial k_\theta}{\partial x_3} = 0. \tag{32}$$

さらに, 無次元化を距離 D , 速度 $\sqrt{-D(d\bar{p}/dx_1)}$ で行い整理すると次の式が得られ, これらを連立させることにより解が得られる.

$$\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial t} = 1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(C_{\nu f_{av}} \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2} \right), \tag{33}$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} = C_{\nu f_{av}} \frac{k^2}{\varepsilon} \left(\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2} \right)^2 - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_2} \left((C_{k f_{av}} \frac{k^2}{\varepsilon} + \frac{1}{R}) \frac{\partial k}{\partial x_2} \right), \tag{34}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = C_{\varepsilon 1} k \left(\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2} \right)^2 - C_{\varepsilon 2} f_{av}^2 \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left((C_{\varepsilon 3} f_{av} \frac{k^2}{\varepsilon} + \frac{1}{R}) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_2} \right), \tag{35}$$

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left((C_{k\theta f_{at}} \frac{k^2}{\varepsilon} + \kappa) \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_2} \right), \tag{36}$$

$$\frac{\partial k_\theta}{\partial t} = 2H_2 \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_2} - C_{\theta \varepsilon} \frac{k_\theta \varepsilon}{k} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\left(\kappa + C_{k\theta h f_{at}} \frac{k^2}{\varepsilon} \right) \frac{\partial k_\theta}{\partial x_2} \right] - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(C_{k\theta \varepsilon f_{at}} \frac{k^2 k_\theta}{\varepsilon^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_2} \right). \tag{37}$$

C. 境界条件と差分方法

壁上での境界条件は,

$$\bar{v} = k = 0, \quad \varepsilon = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 k}{\partial x_2^2} \sim \frac{2}{R} \left(\frac{d\sqrt{k}}{dx_2} \right)^2, \tag{38}$$

$$\bar{\theta}_{-D} = 1, \quad \bar{\theta}_{+D} = 0, \quad k_\theta = 0$$

である.

なお, この中の ε に関しては, (34) を壁上で適用することにより得られ, 数値的安定性から, 1 階微分に置き換えて適用した. すなわち, 壁からの距離を x_2' とすると, 壁近くで $k \sim x_2'^2$ となるため

$(\partial^2 k / \partial x_2'^2) \sim 2(d\sqrt{k} / dx_2')^2$ と書け, $\varepsilon \sim 2\nu(d\sqrt{k} / dx_2')^2$ と近似できる^{10,11)}. 差分方法は空間に関しては^{12,13)},

$$\left(\frac{dv}{dx} \right)_i = \frac{1}{x_{i+1} - x_{i-1}} \left\{ \frac{x_i - x_{i-1}}{x_{i+1} - x_i} (v_{i+1} - v_i) + \frac{x_{i+1} - x_i}{x_i - x_{i-1}} (v_i - v_{i-1}) \right\} \tag{39}$$

$$\left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)_i = 2 \left\{ \frac{v_{i-1}}{(x_{i+1} - x_{i-1})(x_i - x_{i-1})} - \frac{v_i}{(x_i - x_{i-1})(x_{i+1} - x_i)} + \frac{v_{i+1}}{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} - x_{i-1})} \right\} \tag{40}$$

を時間差分は Crank-Nicolson スキームすなわち,

$$\frac{\partial v}{\partial t} = f, \tag{41}$$

に対し,

$$v^{n+1} = v^n + \tau(f^{n+1} + f^n) / 2, \tag{42}$$

を各時間ステップごと繰り返して用いた. ただし, τ は時間刻み幅, 添え字 n , i はそれぞれ n 番目の時刻, i 番目の空間位置を表す. 時間刻み幅は等間隔, 空間に関しては x_2 を

$$x_2 = \tanh(Y), \quad (-3.5 < Y < 3.5) \tag{43}$$

のように表し, Y を等間隔に 60 分割した. この格子配分では, 粘性底層 ($y^+ \sim 5$) 内に約 3 個, $y^+ < 100$ に 16 個の格子点を置くこととなる.

5. 結 果

図 2 ~ 6 に, $Re = 32637$ (最大流速 $V_{1\max}$ と壁間の半分の長さ D に基づくレイノルズ数), プラントル数 0.7 (空気) の発達した乱流の数値解析結果と実験結果を示す.

図 2 は流速を表しているが, 対数速度則と Laufer の実験値¹⁴⁾ を良く再現している. なお, 流れ場の諸結果は参考文献 1), 2), 5) に示してあるので, ここでは省略する. 図 3 は温度分布図で, 対数温度則を良く示している.

図 4 の乱流プラントル数は, (8) と (17) にそれぞれの壁減衰関数を乗じたものの比であるが, その値は妥当なものとなっている. 図 5 の熱流束は円管 (パイプ) 乱流の実験値と異なっているが, これは円管と溝乱流の形状の違い (たとえば, 円の中心温度は場所により一定でない等) にもよっていると思われる. 図 6 は温度の擾乱部分の強度を表しているが, 実測値と比較して妥当である. ここで, 注目すべきことは通常, (37) の定数は,

$$C_{k\theta h} = 0.1, \quad C_{k\theta \varepsilon} \sim 0.0 \tag{44}$$

が用いられている. しかし, 本解析からは,

$$C_{k\theta h} = 0. \text{ (indetermination),} \quad C_{k\theta \varepsilon} \sim 1.1, \quad (C_{k\theta p} \sim 1.2, \quad C_{\theta \varepsilon} \sim 2, \quad C_{k\theta k} \sim 0) \tag{45}$$

という値が得られたことである. 少なくとも, 溝乱流においては $C_{k\theta h}$ をゼロとしても結果がほとんど変化しなかったことから, 本研究で得られた値が妥当であろうと思われる. なお, 図中の t^* は次のとおり定義されている.

$$t^* = - \frac{k}{v^*} \left(\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_2} \right)_{\text{wall}}. \tag{46}$$

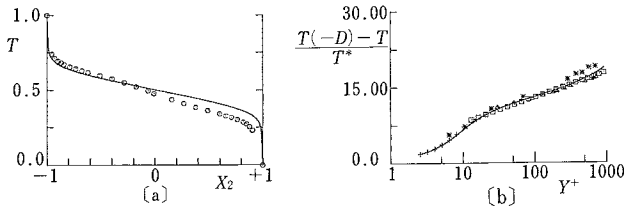


図3 温度 (a) Hsu et al¹⁵⁾ $Re=37476$; (b) $\square \log(y^+)/0.46+3; +N_{pr}y^+$; * Hishida (pipe)¹⁶⁾ $Re=39900$; \triangle Gowen and Smith (pipe)¹⁷⁾ $Re=30600$

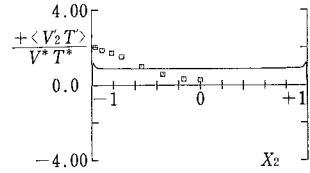


図5 熱流束 \square ; Bremhorst and Bullock (pipe)¹⁸⁾ $Re=34700$

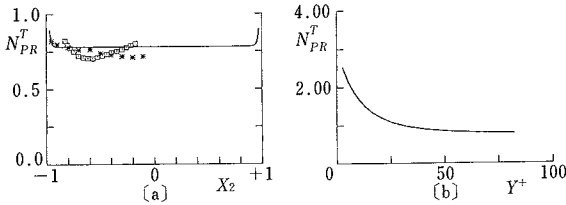


図4 乱流プラントル数 (a) * Gowen and Smith (pipe)¹⁷⁾; \square Hsu et al¹⁵⁾ $Re=30000$

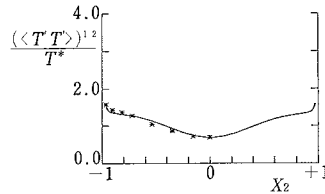


図6 温度の擾乱部分の強度 * Bremhorst and Bullock (pipe)¹⁸⁾ $Re=34700$

6. 結 論

現在はまだ、温度場における各モデル定数の最適化の実行途中である。しかし、これまでの解析結果や流れ場への適用の有効性から考えて、非等方を含む温度場を伴う乱流の解析に、このモデルを適用していくことは興味ある問題である。 (1986年9月10日受理)

参 考 文 献

- 1) 西島勝一, 吉澤徹: 滑りなし境界条件のもとでの $k-\epsilon$ モデルを用いた溝乱流の数値解析, 生産研究 37 (1985) 68
- 2) 西島勝一, 吉澤徹: 一般化された $k-\epsilon$ モデルによる溝乱流の数値解析, ながれ 4 (1985) 131
- 3) 西島勝一, 吉澤徹: 非等方 $k-\epsilon$ モデルを用いた矩形管内乱流の数値解析, 生産研究 38 (1986) 46
- 4) 西島勝一, 吉澤徹: 非等方 $k-\epsilon$ モデルを用いた矩形管内乱流の数値解析, ながれ 5 (1986) 147
- 5) S. Nisizima & A. Yoshizawa: A Numerical Study of Turbulent Channel and Couette Flow by Using the Anisotropic $k-\epsilon$ model, AIAA J. 24 (1986) No 12
- 6) A. Yoshizawa: Statistical Analysis of the Deviation of the Reynolds Stress from Its Eddy-Viscosity Representation, Phys. Fluids, 27 (1984) 1377
- 7) A. Yoshizawa: Statistical Analysis of the Anisotropy of Scalar Diffusion in Turbulent Shear Flows, Phys. Fluids, 28 (1985) 3226
- 8) A. Yoshizawa: Statistical Modeling of Turbulent Buoyant Flows, J. Phys. Soc. Jpn. 55 (1986) 3066
- 9) P. Bradshaw & T. Cebeci & J.H. Whitelaw: Engineering Calculation Methods for Turbulent Flow, (Academic Press, New York, 1981) pp.37-76

- 10) K. Hanjalic & B.E. Launder: Contribution towards a Reynolds-Stress Closure for Low-Reynolds-Number Turbulence, J. Fluid Mech. 74 (1976) 593
- 11) S. Nakao: Contribution to the Reynolds Stress Model as Applied to Near-Wall Region, AIAA J. 22 (1984) 303
- 12) K. Horiuti: Study of Incompressible Turbulent Channel flow by Large-Eddy Simulation, Theor. and Appl. Mech, 31 (1981) 407
- 13) K. Horiuti: Large Eddy Simulation of Turbulent Channel Flow by One-Equation Modeling, J. Phys. Soc. Jpn. 54 (1985) 2855
- 14) J. Laufer: Investigation of Turbulent Flow in a Two-Dimensional Channel, NACA Rept. 1053 (1951)
- 15) N.T. Hsu & K. Sato & B.H.Sage: Temperature Gradients in Turbulent Gas Streams Effect of Flow Conditions upon Eddy Conductivity, Industrial and Engineering Chemistry 48 (1956) 2218
- 16) M. Hishida: Turbulent Heat Transfer and Temperature Distribution in the Thermal Entrance Region of a Circular Pipe, Bulletin of JSME 10 (1967) No 37, 113
- 17) R.A. Gowen & J.W. Smith: The Effect of the Prandtl Number on Temperature Profiles for heat Transfer in Turbulent Pipe Flow, Chemical Engineering Science 22 (1967) 1701
- 18) K. Bremhorst & K.J. Bullock: Spectral Measurements of Temperature and Longitudinal Velocity Fluctuations in Fully Developed Pipe Flow, Int. J. Heat Mass Transfer 13 (1970) 1313