

矩形管路内の旋回乱流の数値予測

——第 1 報 Large Eddy Simulation および $k-\epsilon$ モデルによる 平均速度場の評価——

Numerical Prediction of Turbulent Swirling Flow in a Rectangular Channel

——1st Rep. Evaluation of Mean Velocity Distribution by Large Eddy Simulation and $k-\epsilon$ model——

小 林 敏 雄*・森 西 洋 平*

Toshio KOBAYASHI and Youhei MORINISHI

1. は じ め に

水車における旋回ディフューザ流れ、燃焼装置における旋回バーナ噴流あるいは高機能材料の結晶引上げプロセスにおけるつば内融液の流動など、旋回乱流はエンジニアリングの広い分野に出現し、流れ場を特徴づける重要な因子となる場合が多い。このような旋回乱流は 3 次元的なねじれのため乱れの構造に著しい影響を与え、非等方性の強い乱流となることが予想される。このことは、等方性乱流理論を前提とする過去の多くの乱流モデルを旋回流に適用することが困難であることを意味する。たとえば、標準的な $k-\epsilon$ モデルを用いて直円管内の強い旋回乱流を解析した結果は、実験的、理論的事実と相容れないことが報告されている^{1)~3)}。

本研究はこのような旋回乱流場に適用しうるような乱流数値解析法を提案することを目的とする。ここでは、その第 1 段階として、矩形管路内旋回乱流を Smagorinsky モデルに基づく Large Eddy Simulation (LES) および等方性乱流理論に基づく $k-\epsilon$ モデル (標準 $k-\epsilon$ モデルとよぶ) によって表現し、速度分布に対する両者のシミュレーション結果の比較・検討を試みる。

2. 基礎方程式

$k-\epsilon$ モデルおよび LES における基礎方程式は、運動方程式、連続の式、乱流エネルギー k の輸送方程式および乱流散逸率 ϵ の輸送方程式で、無次元化された座標・速度および圧力を用いると、縮約表示を用いて通常次のように表現される^{4),5)}。

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left(\frac{1}{Re} + \nu_T \right) \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right\} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2)$$

*東京大学生産技術研究所 第 2 部

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_j k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left(\frac{1}{Re} + \frac{\nu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right\} + S - \epsilon \quad (3)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_j \epsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left(\frac{1}{Re} + \frac{\nu_T}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right\} + C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} S - C_{\epsilon 2} \frac{k \cdot \epsilon}{\nu_T} \quad (4)$$

上式中

$$\Pi = p + \frac{1}{3} \overline{u_i u_i}$$

$$S = \nu_T \cdot \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \cdot \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}$$

$k-\epsilon$ モデルでの乱流粘性係数 ν_T は、

$$\nu_T = C_\mu \cdot \frac{k^2}{\epsilon} \quad (5)$$

LES での渦動粘性係数 ν_T は

$$\nu_T = (C_s \cdot \Delta)^2 \cdot \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6)$$

$$\Delta^2 = (\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2) / 3$$

$k-\epsilon$ モデルの各定数としては次の値を用いる⁵⁾。

$$\sigma_k = 1.00, \sigma_\epsilon = 1.30, C_{\epsilon 1} = 1.44, C_{\epsilon 2} = 0.1728, C_\mu = 0.09 \quad (7)$$

3. 計算対象

基本的な旋回流としては直円管内での研究が必要である。しかしながら、円筒座標系を用いることは、中心部の特異点のため中心部での乱れの 3 次元性を表現することが困難であること、半径位置の変化に伴い差分メッシュの大きさが変化することなど、LES を用いるには不利な点が多い。一方、現実にもエンジニアリングの広い領域で矩形容器内の旋回乱流が問題となることが多い。そこで、本報では直角座標で表現できる流れ場の旋回流を対象とする。シミュレーション対象は図 1 のような矩形チャンネルで、側壁の流入口より流体が入り旋回を含む流れとなり流出する流れ場である。差分メッシュはチャンネル内メッシュ数 $25 \times 25 \times 25$ で、スタガード・シ

研究速報
=1/200 で、LES の計算結果を初期条件とし、約 4000 step ($t \approx 20$) まで計算を行った。

5. LES による計算

LES の基礎式として式(1)、(2)を用いる。ここで上つきーはフィルター化による格子平均量と解釈する。格子平均操作と時間平均操作の差異は対流項に現れる。対流項の格子平均操作は次のようになる⁸⁾。

$$\overline{u_i u_j} = \overline{\bar{u}_i \cdot \bar{u}_j} + (\overline{\bar{u}_i \cdot \bar{u}_j} - \overline{\bar{u}_i} \cdot \overline{\bar{u}_j}) + (\overline{\bar{u}_i \cdot u'_j + u'_i \cdot \bar{u}_j}) + \overline{u'_i \cdot u'_j} \quad (10)$$

式(10)中右辺第 2 項は Leonard 項 L_{Eij} 、右辺第 3 項は cross 項 C_{Rij} と呼ばれる。また Reynolds 項 R_{Eij} は次式で定義される。

$$R_{Eij} = \overline{u'_i u'_j} - \delta_{ij} \cdot \overline{u'_i u'_i} / 3$$

これは時間平均操作での Reynolds 応力に対応する。Leonard 項、cross 項に対してはしばしば次のような近似式が用いられる⁶⁾。

$$L_{Eij} + C_{Rij} = \frac{\Delta x_k^2}{12} \cdot \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} \quad (11)$$

しかし、この項を厳密に取り入れるためには対流項の差分近似式として 4 次精度以上を用いる必要がある。本報では対流項に対し 2 次精度の中心差分を用いるので、式(11)の代用として 2 次精度中心差分の打ち切り誤差を用いることにし、式(11)は差分式中に陽には含めない。Reynolds 項に対しては勾配拡散モデルを用いる。

$$R_{Eij} = -\nu_T \left(\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) \quad (12)$$

ν_T はサブグリッド・スケールの渦拡散係数とし、式(6)で表現される Smagorinsky モデルを用いる。モデルの唯一定数 C_s は 0.1 とする。流入条件には一様速度を与え、乱れは含まないとする。これは流入口での乱れの影響が、流入、旋回により生成される乱れの影響より十分小さいという仮定に基づく。壁面境界条件は速度 1/7 乗則を仮定する。初期条件にはポテンシャル流れの計算結果を用いる。差分スキームは、時間方向アダムス・バッシュフォース、空間方向に 2 次精度中心差分とする。時間刻み $\Delta t = 1/200$ で、約 6000 step ($t \approx 30$) まで計算を行っている。

6. 計算結果

図 2、図 3 は LES、 $k-\epsilon$ モデルによる矩形チャンネル各断面の速度ベクトルである。Y-Z 断面において、流入口を含む断面 $I=5$ で、LES では流入による強い旋回に伴い 2 次渦も生じているが、 $k-\epsilon$ モデルでは 2 次渦の存在は明確でない。LES では流出口へ流れるにつれ渦の大きさが小さくなるものの $I=21$ においても渦は認めら

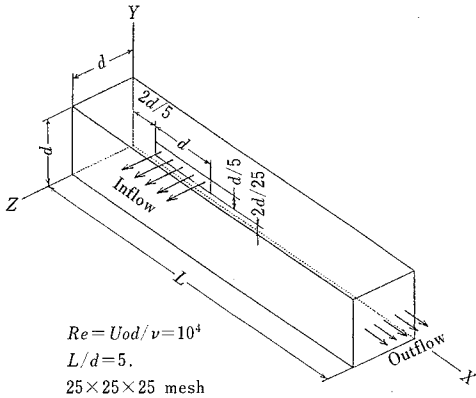


図 1 計算対象

ステムを採用する。流入口のメッシュ数は 5×5 、流出口は 25×25 となる。LES、 $k-\epsilon$ モデルともレイノルズ数 $Re = 1 \times 10^4$ とし、速度・圧力同時緩和法の HSMAC 法で解く^{6),7)}。

4. $k-\epsilon$ モデルによる計算

$k-\epsilon$ モデルの基礎式として、式(1)~(4)を用いる。ここで上つきーは時間平均量と解釈する。対流項の時間平均操作は次のようになる。

$$\overline{u_i u_j} = (\overline{\bar{u}_i + u'_i}) \cdot (\overline{\bar{u}_j + u'_j}) = \overline{\bar{u}_i \cdot \bar{u}_j} + \overline{u'_i \cdot u'_j} \quad (8)$$

ここで $-\overline{u'_i u'_j}$ はレイノルズ応力である。 $k-\epsilon$ モデルではレイノルズ応力に対し勾配拡散モデルを用いる。

$$-\overline{u'_i u'_j} = \nu_T \cdot \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \cdot \delta_{ij} \quad (9)$$

ν_T は渦動粘性係数であり、式(5)で表現される。各モデル定数は式(7)のように標準的なものとする。流入条件としては一様速度を与え、乱れ成分として $k_0 = 3.2 \times 10^{-3}$ 、 $\epsilon_0 = 7.1 \times 10^{-4}$ を与える。壁面境界条件として速度 1/7 乗則とする。これは今回の計算が 3 次元であり、壁面に接するメッシュサイズを no-slip が課せられるほど十分に小さく取れないためであり、また壁面近傍の細かな挙動に特に注目していないためでもある。 k と ϵ について、 $\partial k / \partial n = \partial \epsilon / \partial n = 0$ (壁面の法線方向を n) とする。この自由すべりの条件は壁面近傍で k 、 ϵ が一定であるとみなす実験事実と対応している。流出条件は自由流出とする。差分スキームには時間方向にアダムス・バッシュフォース、空間方向に 2 次精度中心差分とする。ただし k 、 ϵ の輸送方程式中の対流項については解の安定化のため 1 次の風上差分を用いる。速度場に与える k 、 ϵ 式の風上化の影響は、乱流動粘性係数 ν_T を通して伝わるので、それほど大きくはないと思われる。時間刻み、 Δt

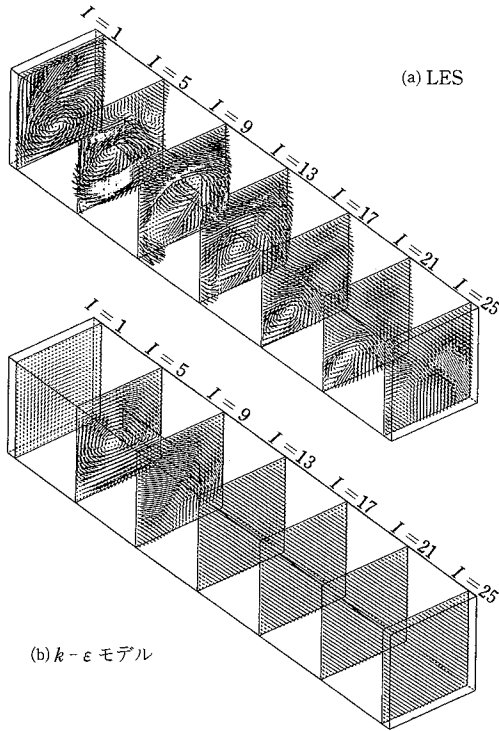


図 2 Y-Z 断面速度ベクトル図

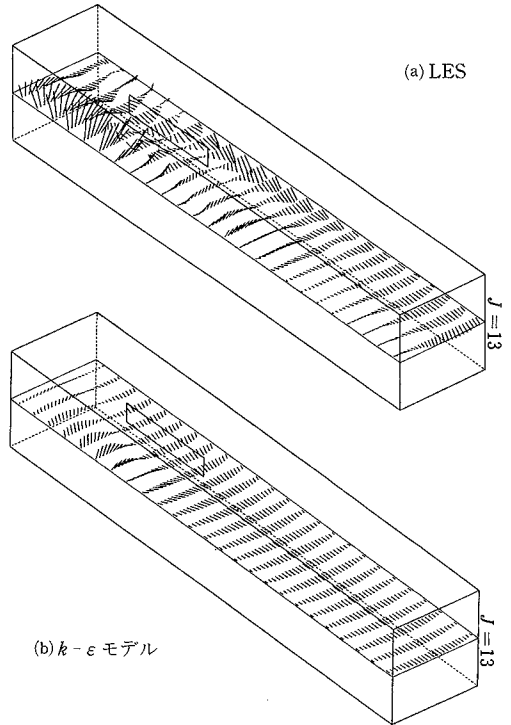


図 3 X-Z 断面速度ベクトル図

れるが、 $k-\epsilon$ モデルでは $I=13$ ですです大きな渦は見られない、 $X-Z$ 断面において、LES では流入口付近の強い旋回により旋回中心付近において逆流が見られ、旋回方向の速度成分も大きくなっているが、 $k-\epsilon$ モデルでは逆流は見られず、旋回方向の速度ベクトルも LES に比較して小さくなっている。LES では流出口に近づくにつれ弱まりながらも旋回方向の速度成分は認められるが、 $k-\epsilon$ モデルではポテンシャル流れと類似した流れとなり、旋回方向の速度成分はほとんど見られなくなる。

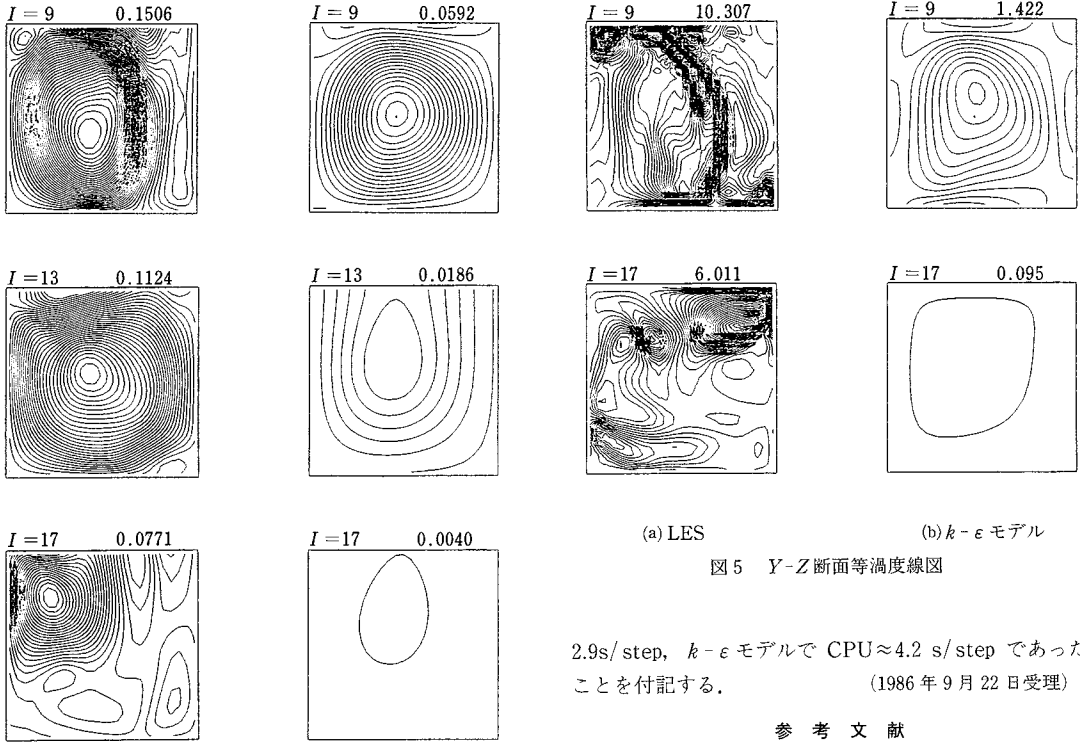
図 4 は LES、 $k-\epsilon$ モデルの流入口より下流位置における $Y-Z$ 断面内の $Y-Z$ 方向速度成分による流れ関数分布である。流れ関数分布は流線を表す。各図とも等高線間隔は、 $\Delta\psi=0.003$ となっている。LES では流出口付近まで旋回しているようが見られ、2 次渦も見られるが、 $k-\epsilon$ モデルで渦が認められるのは $I=13$ までであり 2 次渦も見られない。LES では旋回中心が空間的にねじれているようすも見られる。各図に添えてある $|\psi_{\max}-\psi_{\min}|$ の値を見ても $k-\epsilon$ モデルのほうが LES よりも旋回成分を急激に減衰させているようすがわかる。

図 5 は LES、 $k-\epsilon$ モデルでの流入口より下流位置における $Y-Z$ 断面内の X 軸まわりの渦度分布である。渦度分布は強制渦の強さの分布として見る事ができる。各

図とも等高線の間隔は $\Delta w=0.2$ となっている。LES では $I=9$ において流入口の影響による強い渦度勾配が見られる。これは $k-\epsilon$ モデルでは見られない。LES では全体に乱れた渦度分布となっているが、 $k-\epsilon$ モデルでは、LES と比較しなめらかな渦度分布となっている。各図に添えてある $|w|_{\max}$ の値により、 $k-\epsilon$ は LES に比較し、流出口に向かい強制渦の減衰が著しく強いことがわかる。

7. ま と め

旋回を含む流れ場の数値解析として矩形管路内の旋回乱流を取り上げ、第 1 段階として LES、 $k-\epsilon$ モデルによる速度分布予測結果の比較を行った。LES では流入口付近で強い旋回に伴い、逆流や 2 次渦の生成も認められたが、 $k-\epsilon$ モデルでは LES に比較し旋回成分も弱く逆流や 2 次渦の発生も見られない。また、速度分布、流れ関数分布、渦度分布を通して、 $k-\epsilon$ モデルでは流入口付近で旋回を伴った流れとなっているものの、流出口に向かって旋回成分が強く減衰されていることが認められた。LES では旋回成分は減衰するものの $k-\epsilon$ モデルと比較すると強く現れ、旋回中心が空間的にねじれながら流出口へ向かっているようすも表現されている。 $k-\epsilon$ モデルの旋回成分の強い減衰は乱流粘性係数が LES のものよ



(a) LES (b) $k-\epsilon$ モデル

図 4 Y-Z 断面流れ関数分布

図 5 Y-Z 断面等温度線図

りも相当大きく評価されていることを示している。引き続き、乱流量の予測値に対する詳細な考察および実験結果との対比が予定されている。

なお、計算は東京大学 HITAC M280H によって行われ、計算時間は十分に収束した時点で、LES で CPU \approx

2.9s/step, $k-\epsilon$ モデルで CPU \approx 4.2 s/step であったことを付記する。
 (1986年9月22日受理)

参 考 文 献

- 1) Karasu, T., Ph.D. Thesis, Imperial College, Univ. of London, Mech. Engg. Dept. HTS/80/9, 1980
- 2) 松本, 高城, 機械学会講演論文集, No.824-6(1982), 72
- 3) 小林, 依田 機論, 52-481 (1986), 3230
- 4) J.W.Deadroff, J.Fluid Mech, 41, (1970), 453
- 5) V.C.Patel, W.Rodi, G.Scheuerer AIAA, J 23-9 (1982), 1308
- 6) 狩野, 小林, 石原, 機論 50-449 (1984), 257
- 7) 狩野・小林, 石原, 佐賀, 機論 51-464 (1985), 1166
- 8) 小林, 狩野, 生産研究 38-1 (1986), 8