



## 固体力学の世界を彷徨い歩いた 30 年

My Thirty Years' Life Devoted to Studies of the Solid Mechanics

川 井 忠 彦\*  
Tadahiko KAWAI

本学工学部船舶工学科を卒業してからの来し方を振り返ってみると、手計算(解析解)から計算尺、計算器そして電子計算機へと計算手段を変えながら、荷重を受けて変形する固体ないしは各種構造物の有効な応力解析手法をひたすら求め続けてきた 30 年の生活が甦ってくる。その間いろいろの紆余曲折はあったが、よき師、よき友に恵まれ、よき職場でよき弟子を得て過ごした幸せな人生であったと思っている。この長いようで短かった研究生生活を通じて得た拙い体験を記し、お世話になった方々への感謝と後から続いてくる若い人達への饒けの言葉とさせて頂きたい。

### 1. 私が歩んだ固体力学研究の半生

私は昭和 27 年 3 月本学工学部船舶工学科を卒業して以来、34 年間固体力学 (Solid Mechanics) という基礎工学の一分野に魅せられて、興味の趣くまま彷徨い歩いてしまったというのが偽らざる実感である。学部卒業論文で矩形板の振動問題を積分方程式で解析する研究のまねごとをしたのと、当時就職事情も悪かったのを幸いに大学院に進学し、吉識雅夫先生の門を叩き、自然と応用力学的研究を志向するようになっていった。そして旧制大学院で 1 年半勉学にいそしんだ後、すなわち昭和 29 年 8 月から 3 年間米国リーハイ大学土木工学科大学院博士課程に進学、昭和 32 年 9 月 Ph.D. の学位を取得、帰国した。そして昭和 33 年 4 月から総理府科学技術庁航空技術研究所機体部 (現航空宇宙技術研究所第二機体部) に奉職、5 年間航空宇宙工学の分野で研究生生活を送ったのち、昭和 38 年 4 月から東京大学生産技術研究所に迎えられ、第二部 (機械、精密、船舶) の中であって 23 年間船体構造力学や材料力学、構造動力学の分野で研究生生活を送ってきた。この 34 年の研究生生活を振り返ってみて、昭和 27 年から昭和 37 年に至る間の応用力学的研究に明け暮れた第一期、有限要素法の研究開発とその普及に没頭した第二期、そして剛体-バネモデル (Rigid Bodies-Spring Model, RBSM と略称) と自称する力学モデルを考え出し、固体や構造物の最終強度を推定する実用的計算法の開発を目指した第三期 (その研究は今でも続いているが) に大きく分けることができよう。以下に各時期においてやってきた研究のハイライトを簡単に紹介

したい。

### 2. 応用力学の研究に魂を奪われた第一期 (昭和 27 年~昭和 40 年)

この時期は私が東京大学大学院からリーハイ大学に留学、Ph.D. を取得して帰国し、総理府科学技術庁航空技術研究所に勤務していた時期で科学技術用計算機が漸く我が国においても理工学分野の研究に使われ始めた頃までである。

東大大学院 (旧制) 時代は吉識雅夫先生に師事したが先輩に金沢武先生や山本善之先生がおられ、私も驥尾に付して自然と応用力学的研究を志向するようになっていった。このようにしては私は Timoshenko, von Kármán や Prandtl の創造した世界を追い求め、Love の数理弾性学や Lamb の流体力学を座右の書とし (もっとも拾い読み程度に終わってしまったが)、ただひたすら複雑な微分方程式の境界値問題、固有値問題の厳密解を求めた研究生生活に没入していった。

当時の私にとっては数値解析などは研究者のやるべきことでないとすら思っていたのである。この状態は昭和 29 年から 32 年までのアメリカ留学の 3 年間においても変わりなかった。しかし私はアメリカ留学においてその後の人生を決定するいくつかの経験をするようになったのである。

私は当時研究開発が急速に進展した塑性解析および設計 (plastic analysis & design) をペンシルベニア州ベスレヘム市にある Lehigh 大学土木工学科で勉強することになった。当時 Fritz 工学研究所は塑性設計研究のメッカとして世界に知られており、私は専門外の土木工

\*東京大学名誉教授 東京理科大学教授



A.E.H.Love



Horace Lamb



Ludwig Prandtl



S.P. Timoshenko

写真1 応用力学界の先覚者



写真3 アメリカ留学時代の恩師 (B. Thürlimann 現 ETH 教授) と共に

学科の新しい分野を3年間じっくりと勉強し、多くのよい先生とよき友を得ることができた。その中でも私の学位論文の指導教官に Bruno Thürlimann 現チューリヒ工科大学教授を得たことは、私の誇りでありまた喜びでもある。Thürlimann 教授は私よりわずか数歳年上に過ぎないが、当時の数理塑性学のメッカ Brown 大学で、Prager や Drucker 教授らに師事し、秀才の誉れ高い先生で、技術的センスは抜群であった。私は薄肉断面材の力学、板殻構造、コンクリートのクリープ理論、塑性安定論等固体力学の幅広い分野にわたる新知識を同教授から学んだ。その頃アメリカでは世界に先駆けてモータリ

THE POINTS CONNECTED WITH NON-LINEAR PROBLEMS



von Kármán

...the points connected with non-linear problems...  
...the points connected with non-linear problems...  
...the points connected with non-linear problems...

...the points connected with non-linear problems...  
...the points connected with non-linear problems...  
...the points connected with non-linear problems...

Fig. 15. The fifteen-thirty lecture hall, Berlin, 1939.

写真2 若き日の von Kármán と第15回 J.W. Gibbs Lecture の (Dec. 27, 1939) の一節



Jacob Bernoulli



Leonard Euler



Saint Venant



V.Z. Vlasov

写真4 梁理論の開拓者

ゼーション時代を迎え、全土に高速自動車道路網が建設されつつあった時期であり、高速道路用コンクリート床板の設計に関連し、橋梁工学で古くから用いられていた影響線理論の床板問題への拡張が注目され、オーストリアの Adolf Pucher 教授がその草分けの研究を発表したときであった。私は東大大学院時代に行っていた積分方程式による板の曲げ問題の研究を足場に、コンクリート床板を直交異方性板と見なした影響面理論の基礎的研究を展開した。平板の影響面理論というのは数学的には平板の曲げの影響関数 (Green 関数) の工学的応用であり、固体力学的には集中力を受ける平板の曲げに関する応力の特異性を追求する問題であって、この研究で私の学問的好奇心は心ゆくまで満たされ、充実した3年間を送ることができた。この分野における研究成果の主なものはリーハイ大学の学位論文を補足した生研報告<sup>3)</sup>のほか、国際構造橋梁学会 (通称 IABSE) に投稿した2論文が主要なものである。1つの論文で連続床板の影響関数を陽に求め、それにより中間支持 (剛および弾性支持) 辺上の応力特異性を詳細に検討し、その影響面ダイアグラムを作成した<sup>2)</sup>。またもう1つの論文は斜橋床板の鈍角頂点近傍における応力特異性と開き角の関係を板の撓みの影響関数を求めて明らかにしたもので<sup>3)</sup>、破壊力学の出発点となったといわれる M.L. Williams の論文<sup>4)</sup> に刺激されたのがその研究の動機であった。

これらの論文はどれも著名な IABSE の学会誌に掲載されお陰で世界中からかなりの反響のあったのは大変うれしかった。特に福田武雄先生に評価して頂いたことを後で知り、一流の国際学会誌に論文を投稿することの意義を改めて認識した次第である。またこの研究は日本に帰ってきてからも続けられ、平面応力場と板曲げ問題の双対性 (duality) を複素関数論的に明らかにし、それを利用して平面残留応力場の解析を試みた。また Winkler 基礎床上的無限板の撓みの影響関数を、周辺支持矩形板の Green 関数 (Lagrange の2重級数解) から辺長を無限大として Fourier 積分の形で導出し、その解析を Kelvin 関数 (または Hankel 関数) の形で求め、その影響面ダイアグラムを作成したのは記憶に残る研究であった<sup>5)</sup>。

さて日本に帰国後の5年間 (昭和33年から昭和38年まで) 私は現在の航空宇宙技術研究所にあって、薄肉梁の振動や座屈、補強板の圧縮最終強度、主翼やロケットの動的応答解析等の研究に従事した。薄肉梁の曲げ振り連成振動について当時は J.M. Gere, Y.K. Lin らの論文ぐらいしか発表されていなかった。梁の撓み振動の固有関数系を用いてその振動数方程式をあらゆる組み合わせ境界条件下で導く一般解法を示した。また薄肉材の安定問題についても、分布軸力、分布横荷重のほかに端部モーメントを受ける梁柱の座屈理論の基礎式を微小要素

内の力を平衡条件式から導き、再び撓み振動の固有関数系で未知変位を展開して任意の組み合わせ荷重下における梁柱の安定に関する特有方程式を導出した。当時梁柱の曲げと振りの連成した安定問題についての研究は黎明期にあり、Timoshenko や Bleich の座屈理論の本が海外の主要参考書であり、国内では弾性安定要覧が出版されていた。その初版にはその当時までに発表された研究を網羅した倉西先生の優れた解説が記述されていた。またその改訂版には当時本学建築学科におられた仲教授の斬新な理論が掲載され、その後加藤勉教授 (当時講師) との共著「単一材の座屈」<sup>6)</sup> が出版され、大いに刺激を受けた。しかしながら荷重条件や境界条件の任意性という点についてはこれらの理論には限界があると私は判断した。そこで任意の荷重および境界条件下における薄肉材の安定に関する一般理論を展開し、実用的な座屈荷重計算式を導く研究を行った。

私はこの研究でかなり内容のある仕事ができたと内心ほくそ笑んでいたのが、暫くして入手した V.Z. Vlasov の「薄肉弾性ばりの理論」(英訳本)<sup>7)</sup> を読んで愕然とした。実は私がやった仕事とほとんど同じ内容の研究がすでに1933年になされていたのを知ったからである。私は当時殻構造の勉強はしていなかった。Vlasov のことは余り知らなかったが、彼はソビエトを代表する固体力学の第一人者であり、殻構造の世界的権威であることを知って、その学識の高さと研究の独創性に唯々頭が下がる許りであった。

彼の研究は高度な力学的考察と精緻な殻理論の研究に裏付けられた幾何学的考察を基礎に簡潔な薄肉梁理論を構成して行ったもので、その構造工学の進歩に与えた影響の偉大さからソビエト政府はスターリン賞 (日本の文化勲賞に当たると思われる) を贈ってその功績を讃えた。

このようなわけで私はいささか気落ちしたが、詳しく研究の内容を検討して、彼のやり残した仕事も結構私はやっていることが判ったし、何にも増して Vlasov のような碩学の仕事に比べられる仕事ができただけに本当に幸せであったと今でも思っている。なおこの仕事の成果は1960年イタリーの Stresa で開催された第10回国際応用力学会議 (10th IUTAM Congress)<sup>\*</sup> で発表を認められた。しかし旅費の都合がつかず出席を断念したが、昭和36年3月吉識教授のもとに学位請求論文として提出、仲威雄 (建築)、林毅 (航空)、奥村敏恵 (土木)、金沢武 (船舶) の4先生に審査して頂いたことは無上の光栄であった。なおこの研究は薄肉開断面材の弾性力学 (I) ~ (VII)<sup>8)</sup> という題で生産研究に連載された。

その後鷺津先生の名著「弾性及び塑性における変分学的方法」<sup>9)</sup> (英文) に感化され、梁理論の精密化を仮想仕事

<sup>\*</sup> 応用力学の分野で最も権威のある会議でオリンピック開催の年に主としてヨーロッパの主要都市で開かれる。

の原理を用いて試み、Saint Venant 振り、剪断変形の影響を 2 次元、3 次元の立場から取り扱った。そして複雑な断面形状の薄肉開断面材（高速道路橋主桁構造、船体や航空機胴体、主翼構造の横断面など）の振りや剪断変形の実用的解析プログラムの開発を進めてゆくことになった。この研究は藤谷義信助手（現広工工学部助教授）の学位論文として纏められ、生産研究には「梁理論の精密化に関する二、三の研究（I）～（V）」<sup>10)</sup>として再び連載された。

また最近これらの仕事を纏めて生研報告「現代梁理論に関する二、三の考察、（I）理論<sup>11)</sup>（II）実用的解析法<sup>12)</sup>」として近く出版される予定である。しかし梁理論の精密化の研究はこれで終わったわけではなく、むしろ問題が深化したというのが偽らざる実感である。まず第一に断面不変の枠内で剪断変形の影響をどれだけ精密に取り込めるか？ 精密化の道は勢い 3 次元の変形を無視できないことに連がり、したがって断面不変の仮定に抵触することになる。また薄肉材の安定に関する平衡方程式を変分原理を用いて導出しようとする場合、断面の剪断応力と合剪断力や振りモーメントとの関係が近似的にしか求まらない難点があり、そのため座屈平衡方程式が色々違った形で提案される結果となるということである。これは殻の座屈平衡方程式に色々な形の式が提案されているのと同じ事情である。今後梁理論の研究を志す若い人はこの辺の事情をよく弁えて研究を進めていかれることを望む次第である。

この時期に比較的短期間に行った研究としては「高層平面骨組の最小重量設計に関する研究」がある<sup>13)</sup>。これは連続平面多層構造物の仮想変形法 (mechanism method) による崩壊解析ならびに最小重量設計の自動化を目指した理論的研究である。

この研究は Heyman, Neal, Horne らの研究とは別に小型電算機を用いた高層骨組の塑性解析および設計を目指したものであり、昭和 40 年リーハイ大学で行われた「高層骨組の塑性設計」に関する AISC SUMMER CONFERENCE で発表し、大変好評を博することができた。最後になったが、この時期に行った研究の一つに Timoshenko が特に先鞭をつけたエネルギー法の研究がある。

前にも述べたように私は航空宇宙技術研究所にあって超音速航空機翼やロケット構造の熱空力弾性学という難しい問題と取り組んでいた。この分野は空気力学と固体力学と振動学の三つの分野にまたがる学際的領域の問題であり、伝統的な解析の手法があまり役に立たないことをいやというほど体験した。そして長い悪戦苦闘の末、技術者にとって重要なことは物を設計したり、製作したりすることであり、壮麗な式を操って解析解を求める格好のよきよりも、設計または製作に役立つ情報をつくり

$$\begin{aligned} \Delta W &= \lambda^2 W \\ (B, C) \quad M_z &= V_z = 0 \text{ on } \overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CO} \\ W &= \frac{\partial W}{\partial y} = 0 \text{ for } y=0 \end{aligned}$$

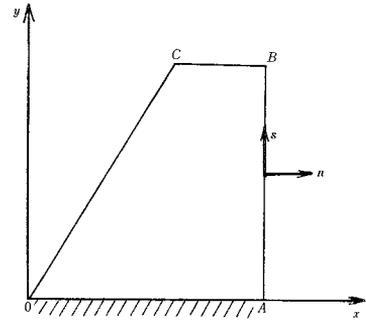


図1 平板翼の振動解析と使用座標系

出すことのほうがたいせつであるという悟りを得た。この辺のいきさつをもう少し詳しく述べてみよう。御承知のように、最近のジェット機は後退翼構造であり、翼が薄くなったこと（しかし多桁構造）でしかも胴体の中心線に対し、翼の図心軸や剪断中心軸がいわゆる後退角をもっていることから、従来の梁理論ベースの振動解析では不十分で、どうしても 1 桁、2 桁精度を上げた解析法の開発が要求されたのである。そこで私はとりあえず主翼構造を平板にモデル化し、片持平板翼として Rayleigh-Ritz の方法を用いた振動解析を埝武敏氏（現芝浦工大教授）と協同で推進した。Rayleigh-Ritz 法を成功させる秘訣は試験関数の選び方である。私は翼の形状が一般に背の高い梯形をしており、底辺固定、他三辺自由の混合境界値問題であること、また板の曲げにおける自由辺の条件は境界曲げモーメントおよび剪断力零という複雑な境界条件であるが、これは変分学におけるいわゆる自然境界条件 (natural boundary conditions) であり、敢えて試験関数がこれらの条件を満たしなくても、変分操作から逐次近似的にこの条件が満足されてゆくのであるということをも最大限に活用した解析を行った。換言すると平板の撓みを  $W(x, y)$  として底辺を  $x$  軸、平板の面内でそれに直角に  $y$  軸にとり、平板の撓みを

$$W(x, y) = \sum_{m, n=0}^{\infty} a_{mn} x^m y^{n+2}$$

のようにおいて振動解析を試みた。何の変哲もないことであるが、このような試験関数のとり方が功を奏して振動実験結果と工学的に十分満足できる振動数解析を行うことができた。もちろん手計算では無理で当然電子計算機のを借りることになったのである。そしてこの研究を拡大した平板の曲げに関する境界値および固有値問題の解析法として西独ミュンヘン市で開かれた第 11 回国際応用力学会議（1964 年 9 月）において発表した<sup>14)</sup>。計らずも私の講演を Marguerre 先生（グルムシュタット工大教授、平板の座屈後の安定問題で有名な有効幅の理論

を提案した)が最前列で聞いておられ、講演後“大変面白かった”, と言って握手して頂き感激したのを今でも思い出す。このエネルギー法の研究はその後 2 次元弾性応力場の研究にも向けられ、テーラー級数を用いて応力集中問題を解こうとしたが、この試みは見事に失敗した。

そのときこの問題はやはり応力特異性をもった項を試験関数の中に埋め込むか、テーラー級数のままでよいかから局所的に多項式の自由度を殖やすようなことができないか一生懸命考えたのを思い出す。もしこの時多項式の自由度を殖やす代わりに、応力集中点近傍の局部領域を細分化して、各小領域の変位場を高々 2 次の多項式で近似するというような考え方に思い当たっておれば私も有限要素モデル開発のパイオニアの一人に入れて貰えたであろう。

現代有限要素法の立場でいうならば、エネルギー法は、一要素有限要素法であり、後者の考え方は重みつき残差法の立場に立つ部分領域法 (subdomain method) になるであろう、いづれにしてもこの研究がきっかけとなり、私はその後の 10 年間有限要素法開発研究に情熱を傾けることになったのである。このようにして私の科学技術計算に対する考え方が次第に解析的立場から、数値解析的立場へと 180 度の方向転換を遂げることになったのである。ちょうどそのころ科学技術計算用の計算機が実用化され、有限要素法が航空宇宙産業界に花開いた時もあり、同研究所に Burroughs の DATATRON 205 が設置された。

私は灼熱の砂漠で水を求めて迷う隊商がオアシスに出会った思いでたちまちそのとりこになり、爾来昭和 50 年までの 10 年間文字どおり有限要素法の普及と研究開発にわれを忘れて没入した。この航技研時代に当時紅顔の美少年であった戸川隼人氏 (現日大教授) と知り合い、無数のランプの点滅する DATATRON 205 を巧みに操る同氏の姿が魔術師のごとくみえたのを思い出す。航技研時代に出会った方々の中で忘れられないのは中西不二夫所長である。先生は私が学生のころ本学工学部長をしておられたのでお名前は知っていたが、航技研に入ってから始めて先生の声咳に接することができた。私は当時リーハイ大学で学んだ塑性設計の応用について研究を進めようとしていたが、これが中西先生の目に留まり、しばしば適切な助言と激励をいただいた。

先生は伝統的な連続体仮定の塑性変形に関する構成則が軟鋼の降伏に関する実験的事実と合わないことを指摘され、独創的な塑性理論を提案された方である。最近になって私が研究を進めつつある不連続体の力学の考え方が、先生の材料の降伏理論と本質的に同じであることがわかり、改めて中西先生の業績の偉大さに深い感銘を受けた次第である。

### 3. 有限要素法の研究開発と普及に専念した第二期 (昭和 40 年～昭和 50 年)

私とマトリックス構造解析との出会いは 1956 年ボーイング社の Turner 氏らがニューヨークで開かれたアメリカ航空学会に歴史的な“直接剛性法 (Direct Stiffness Method)”の論文を発表したというニュースをリーハイ大学で聞いたのに始まる。当時は何か画期的な構造解析法が発表されたという話を噂として聞いた程度だったのでさほど聞き耳を立てていなかったが、実はこの方法が時を同じうして発表された IBM650 という科学技術計算専用の電子計算機にプログラムされ、それまで解くことは殆んど考えられなかったような複雑な構造解析が可能となり、当時日の出の勢いであった航空宇宙関係の会社に普及してゆくことになったのである。

これが今日の有限要素法誕生の歴史である。この論文の発表と並行してイギリスはロンドン大学航空工学科で航空機体構造力学の研究をしていた J.H.Argyris 教授がイギリスの航空学会誌に今日でいうと“応力法 (Force Method)”と呼ばれるマトリックス構造解析法の連載講座を掲載していた。応用力学至上主義の立場に立っていた当時の私にとってはさほど重大なことと思わず、関心をもたなかった。ところが時間が経っても欧米の航空宇宙産業界のこの手法に対する関心は収まるどころか、益々高まる一方でこれは放っておいたら、我が国の技術はこの新しい分野で欧米の先進国に大分水をあげられることになるのではないかといささか心配になってきた。このような危機感を本学航空学科鷺津久一郎先生に打ち明けたところ、先生も全く同じような問題意識をもっておられ、たちまち意気投合し、これに先輩の山本善之先生も加わって 3 人でまず学内でささやかな勉強会をスタートさせることになった。

これが我が国における有限要素法研究開発の夜明けであり、この学内の勉強会には土木、建築や機械等の若い好学の士が数多く集まり、学内では開催が難しい位の規模にまで発展した。そこで吉識先生にお願いし、昭和 40 年設立された日本鋼構造協会の中の構造解析小委員会 (初代委員長吉識雅夫現東京理科大学長) を設置、それに舞台を移し宮本博先生 (現東京理科大学教授) や山田嘉昭先生 (現幾徳工大教授) も加われ、月例会の形で運営していった。この研究会の活動はたちまち高度成長期を迎えた我が国産業界、特に建設、鉄鋼、造船、機械、重電機等いわゆる重厚長大型産業の注目するところとなり、我が国における有限要素法開発センターの役割を果たすこととなった。私はその中であって専門分野の壁を乗り越えて、ひたすらこの技術が我が国産業界に定着成長するよう月例研究会に、講習会、講演会に、また解説記事の執筆にと文字どおり馬車馬のごとき活動を行っ



写真5 第一回日米マトリックス構造解析セミナー出席者  
記念写真(昭和44年8月 於東京)



写真6 故鷲津久一郎教授と M. J. Turner 氏(ボーイング社  
における FEM 開発チームリーダー)  
(第一回日米マトリックス構造解析セミナー晩餐会にて)



写真7 若き Oden 教授夫妻と坪井善勝先生御夫妻  
(第一回日米マトリックス構造解析セミナー晩餐会にて)

た、その甲斐あってこの技術は造船、航空、機械、土木建築等のいわゆる構造工学分野に浸透し、その目覚ましい進歩に多大の貢献がなされた。この時期私の研究室には異なった専門分野の俊秀が学内のみならず学外からも集まり、現在原子力、造船、建築、数学等諸専門分野の第一線で活躍している多くの教授、助教授が僅か10年の間に次々と巣立ってゆくことになったのである。そして間もなく数多くの優れた論文が我が国からも国際会議の場で発表されるようになった。すなわち日本学術振興会と米国国立科学財団(NSF)の援助のもと、マトリックス構造解析に関する日米セミナーが昭和44年8月東京、昭和47年3月パークレーの2回にわたって開催され、その論文集は、現在でも重要な有限要素法の参考文献となっている<sup>15)16)</sup>

私にとって何といっても思い出の多いのは第一回日米マトリックス構造解析セミナーである。昭和44年(1969年)はアメリカだけでなく全人類にとってアポロ11号が月面着陸という歴史的快挙を成し遂げた記念すべき年であり、特に有限要素法という基礎技術を自ら開発し、それを武器に技術開発を進めてきたボーイング、ダグラス、

ロッキード、ノースアメリカン、等の一流航空宇宙産業のトップエンジニア、それにNASAの技術開発のリーダー、シアトルにあるワシントン大学、カリフォルニア大学バークレー分校、MIT、コーネル大学等のベテランおよび若手の教授を含む総勢約30名(オブザーバーを含めて)の米国側代表が来日し、日本側は本学を中心とし我が国の構造工学の諸分野を代表する大先生を初め、京大、阪大、九大のベテラン教授、助教授が加わった。それに我が国の産業界を代表する、建設、鉄鋼、造船、重工、重電機、自動車等メーカーの一線級技術者等多数のオブザーバーが参加、総勢約100名を越える代表団になり、ほぼ1週間に及ぶ大セミナーになった。アメリカ側の代表はR.H.Gallagher コーネル大学土木工学科教授でこの人はコーネル大学に移る前はバッファローにあるBell Aerosystem という航空宇宙会社の構造設計部門のリーダーとしてアポロ月ロケットの第1段に使われたサターン5型ロケットの構造設計に指導的役割を果たしたという話を聞いていた。

私は昭和41年8月から1年間ニューヨーク州立大学バッファロー分校土木工学科に客員教授として出張していたが、その時Gallagher教授は非常勤講師として大学院で有限要素法の講義をしておられ、また同時に私のリーハイ時代の友人のもとでPh.D.の論文を纏めているところであった。私の海外出張の目的の一つは米国における有限要素法開発のリーダーに会って、速やかにアメリカの水準に追いつくために必要な情報収集と実状調査であったので、文字どおり産業界にあって有限要素法開発のリーダーになっていた彼に労せずして知り合えたことは本当に幸せであった。また同じ会社から東洋系の風貌をもったハンサムな若手技師が大学で有限要素法に関する講義をしにきていて、直ぐに仲良くなった。この人が、日本でも良く知られている固体の非線形解析プログラム「MARC」を開発したPedro Marçal博士であった。このGallagher教授との出会いがきっかけとなり、

第 1 回目米セミナーの話がとんとん拍子に進んだのと、吉識先生が学振の要職についておられたので話がスムーズに纏まって昭和 41 年 8 月夢のセミナーが実現したのである。夢といったのは、アメリカ側の参加者は文字どおりアメリカ技術陣を背負って立っていた方々ばかりで、普段はそれぞれ多忙に駆け廻っているため、アメリカ国内の学会でこれだけの顔ぶれが一堂に会したことはなかったようで正に夢のようなことだとアメリカ側参加者の 1 人が言っていたからである。

さてこの会議はアポロ月ロケットの打ち上げに成功して意気軒昂のアメリカ技術陣と出遅れて懸命になってアメリカを追う立場にある日本側技術陣の出会いであり、アメリカ側は恐らく幕下力士に胸を貸す横綱の出稽上位のつもりで来日した人が多かったと思う。このセミナーを計画した 1 人として正直言って、彼我の技術力の差は歴然であることを認めざるをえなかったが、理論的基礎の研究では十分対抗できると私は見ていた。その理由は我が方には鷺津久一郎教授が居られたからである。先生には昭和 38 年以降有限要素法の普及開発に当たって一方ならぬお尽力とご指導を賜った。先生の書かれた不朽の名著「弾性および塑性における変分法」<sup>17)</sup>は、有限要素法研究者のみならず広く固体力学研究者のバイブルとして世界中の構造技術者に愛読され続けることであろう。先生はこの本を書くのに全身全霊を傾けられたのか、燃え尽きるようにこつ然としてこの世を去られたのは誠に残念であり我が国計算力学界にとって大きな損失となった。

この第 1 回目米セミナーにおいて受けた強烈な印象はアメリカ側のベテランに混じって 3 人の若手研究者（当時 30 才であったと聞いている）の活躍である。その中の 1 人にテキサス大学オースチン分校の J. T. Oden 教授がある。同教授は現在 48 歳位で文字どおり非線形連続体力学の有限要素解析理論においてアメリカを代表する学者であるが、当時は全く無名のアラバマ大学教授であった。その彼がセミナーの席上、流れ、拡散や電磁場などの連成した移動現象の数学的定式化を非平衡熱力学の観点から試み、今日の重みつき残差法による構造以外の問題の有限要素解析を応用する可能性を示唆する大論文を発表したのである。私は今でもその時受けた衝撃的印象をはっきり覚えている。アメリカには Oden 教授のように彗星のごとく現れて画期的業績をあげる一握りのエリートがいることを我々は常にマークしておく必要がある。彼の研究開発に掛ける情熱とバイタリティには数々のエピソードがあるが、第 1 回目米セミナーの回顧はこのくらいにして先を少し急ごう。

その後この日米セミナーは、テーマを境界領域問題の有限要素解析に変更して、昭和 58 年 8 月コーネル大学で開かれ、数多くの興味ある論文が日米双方の代表から発

表された<sup>17)</sup>。そして最近では昭和 57 年 8 月第 4 回流れ問題の有限要素解析に関する国際シンポジウムが東京で開催され、有限要素法関係では始めて参加者 400 名（うち外国人参加者 100 名）を越える大会議となった<sup>18)</sup>。

以上の会議には組織委員の 1 人として関係し、微力を尽くしてきたし、また海外で開かれた数多くの国際会議に出席、招待講演の榮に浴している。これらについて色々思い出はあるが、紙面の関係で割愛し、その代わりに国際交流の一環として本所に招待した数多くの学者、研究者の中から、2、3の世界的に有名な有限要素法の指導者の横顔を紹介したい。さきに紹介した R. H. Gallagher 教授についてはもう説明する必要はないと思われるが、彼はアリゾナ州立大 Tucson 分校工学部長を経て現在ボストン近傍にある Worcester Polytechnic Institute の副学長を務めている。この工科大学は我々にとっては馴染が薄いが、アメリカで創立された最初の工科大学であると聞いており、その副学長のポストは大変榮譽のある要職であると聞いている。彼の学問的業績はかなり歴史的なものになったが、有限要素法の開発期にその啓蒙普及に果たした彼の功績は偉大である。特にいろいろな学問分野における研究の現状紹介に関しては正に第 1 人者の貫禄十分であったのを記憶している。私も日本における有限要素法の旗振り役を務めさせられた関係上、彼の現状展望は非常に参考になったし、また教えられるところが多かった。次に紹介するのは、ベルギーのリエージュ大学航空工学科の B. Fraeijs de Veubeke 教授で、この人はヨーロッパにおける有限要素法の変分定式化、特に応力モデル開発のパイオニアであり、また幾何学的非線形問題の定式化に大きな貢献をした人であり、Swansea の Zienkiewicz 教授と学問上の交流が深かった。確かバイオリンの名手でリエージュ大でクワルテットを組んでしばしば演奏旅行にも出かけるという楽才に恵まれた高潔な学者であったが、日本から帰国して半年足らずで愛車のスポーツカーを運転中心臓発作を起こして急逝したのは大変惜しまれている。応力モデルやハイブリッドモデルの研究における世界的指導者は云々までもなく MIT の T. H. H. Pian 教授である。Pian 教授の研究は鷺津教授との出会いによって生まれ、また鷺津教授の各著は Pian 教授との学問上の交流により磨きがかけていった様である。いづれにしても有限要素法の理論的基礎固めに対する鷺津、Pian 両教授の貢献は歴史に残るであろう。Pian 教授は中国のいわゆる“大人”の風貌があり、多くの日本人留学生を育て我が国に知己が多い。Zienkiewicz 教授はイギリス Wales 大学 Swansea 分校土木工学科主任教授で有限要素法の世界的リーダーである。緩和法 (relaxation method) の創始者 Southwell の弟子で 1981 年 Fellow of Royal Society に選ばれた。その飾らない、親しみやすい人柄から世界中に知

己が多く、大の親日家で数多くの日本人留学生を育て上げられた。いつだったか同大学に先生を訪ねた際、居室の壁に掲げてあった一枚の額が私の目に留まった。それには“Imagination is more important than knowledge”と書いてあり、よく見るとアインシュタインのサインがしてあった。Zienkiewicz 教授にはこんこんと湧き出るような“思想”の泉があり、彼の想像力が果てしなく広がってゆくのに深い感銘を受けていたが、その源が彼の座右の銘にあったのかと改めて感心させられた次第である。これらの方々の来日は我が国学界、産業界の技術者再教育に少なからぬ影響を与えたものと思っている。さて私自身が行った有限要素法関係の研究論文としては有限要素法開発期に、ライト・パターソン空軍基地で開催されたマトリックス構造解析会議に発表した有孔板の座屈解析(昭和43年10月)<sup>19)</sup>と、コンテナ船の薄肉梁理論による振り有限要素解析(昭和46年10月)<sup>20)</sup>の2論文をあげておきたい。とくに後者の論文は船体構造初期設計の段階で使用しうる実用的構造解析法として内外の造船界で高く評価して頂いた。また我が国造船界では折からのタンカーブームに乗って昭和45年5月から2年6カ月の予定で“PASSAGE”と称する汎用船体構造解析プログラムの開発プロジェクトがスタートし、私とそのプログラム開発ワーキンググループのリーダーとなってプロジェクトが遂行された。これは我が国で計画された最初の汎用プログラム開発プロジェクトであり、多くの斬新なアイデアのもられたプログラムができあがったが、世界を突如として襲ったオイルショックのため不幸にしてこのプログラムを実船設計に応用する機会を殆んど失った。しかしその開発の成果は貴重なノウハウとして我が国造船技術のレベルアップに大きな貢献をなしたのである<sup>21)</sup>。また同じような汎用構造解析プログラムの開発が大手造船、自動車メーカーによってなされ、その成果が権威ある学会賞の形で評価されたのはうれしいことであった。私は鋼構造協会を中心とし、いくつかの学会協会また民間セミナー会社のセミナーの企画立案や、その講師講演をおこなった回数は数え切れないほど多く、多数の有限要素法関係著書の翻訳のほかに、鋼構造協会編の形で培風館(株)から(昭和45年)“コンピューターによる構造工学講座(全11巻22分冊)”を出版した。これは世界でも初めての総合的な有限要素法講座として国の内外で注目され、特に国内では権威ある教科書として広く読まれるようになった。また最近では昭和58年有限要素法ハンドブック(I)&(II)がこれも世界で初めて出版されたが、これらの出版計画の企画立案からその推進まで骨がかなり折れたが生きがいのある仕事であったと思っている。

#### 4. 剛体-ばねモデルの開発を目指した第三期 (昭和51年~61年)

このようにして私が続けてきた有限要素法旗振りの仕事も昭和43年夏に東京で開催された第1回日米マトリックス構造解析セミナーを境にして次第に情熱を失っていくことになった。その理由を簡単にいえば固体力学非線形問題に対する有限要素解析法の実用性に疑いを抱いたからである。

すなわち永年にわたる検討の結果、有限要素法が固体力学非線形問題において当面する問題点(解の信頼性と計算時間やコスト)は、固体力学が基礎とする連続体仮説に由来するという結論に到達した。昭和51年私は連続体仮説を捨て剛体を、有限個の剛体ブロックを分布ばね系で結合したモデルに理想化し“剛体-ばねモデル”と名付け固体力学非線形問題を全く新しい角度から研究する離散系力学理論の構築を試みた<sup>22)</sup>。この離散化モデルは剛体が載荷の極限において示す次の2つの実験的事実すなわち

- (1) 固体の塑性変形は本質的にすべり(Slip)である。
- (2) 固体は載荷の極限においていくつかの固体ブロックが互いに剛体運動をしながら運動学的不安定状態になっていく。

に基づいて任意形状の3次元剛体をその接触面上に分布させた2種類のばね、すなわち接触面の法線方向と接線方向の相対方向の相対変位に基づいて反力を発生するばね系で接合させたモデルである。

このばね系に適当な構成則(応力-歪み関係式)を導入すれば、従来の有限要素法の標準的手法および荷重増分法に従って、その変形や応力解析を極限状態まで行えるようになった。

そして過去10年間行ってきた理論的基礎固めの研究も予想以上に進展し、骨組、板殻構造や土質、岩盤コンクリート構造等構造工学諸問題への応用研究が精力的に展開され、その実用性は十分に立証された。最近はさらに粒状体力学、材料科学(含破壊力学)、地球科学(含地震学)、水海工学、整形外科バイオメカニクス、トライボロジー等理工学の広い分野にわたってその応用が研究されている<sup>23)</sup>。

この離散化モデルは物理的考察から得られたモデルであるため、その数学的意味づけがきわめて困難であるが最近 Hughes らによって開発された低自由度の板殻要素と剛体-ばね板殻要素の間の相関性が都井助教授によって論ぜられた。

さてこのようにして構築された離散化解析法はやがて Prager, Drucker らによって創始された完全弾塑性体の極限解析を一般化したものであることが明らかとなり、任意の3次元固体の非弾性、大変形および亀裂の影響を



O.C.Zienkiewicz



R.H.Gallagher



B.Fraeijns de Veubeke



T.H.H.Pian

写真8 本所を訪れた FEM の世界的指導者

取り入れ、従来の有限要素法の手法にのっとり静的のみならず動的極限解析が実用的なレベルで行えることがわかってきた。

柱の塑性座屈理論において Shanley が提案した独創的なモデルは有名であるが、このモデルは本離散化モデルを単純化したものであることも判明した。このことは板殻、さらに3次元固体が任意の荷重を受けた場合に現れる複雑な非弾性不安定現象(座屈、塑性変形の局所化、くびれ、破断、崩壊等)の低自由度計算機シミュレーションの道を開きうることを示唆したものである。実際この線に沿って板殻の塑性座屈現象の本質はすでにかなり明快に捉えられており、材料の破壊現象の定性的研究の道も一步一步開けつつある。この事実は学問的に次の2つの重要な意味をもっている。第一には現在理論的にゆきづまったマクロの破壊力学および材料試験ならびに構成則の考え方を棄てて、材料の破壊現象を不連続体(粒状体)力学の立場から再建しようとするものであること、また第二に本離散化モデルによる固体の塑性安定の研究は未知のベールに閉ざされていた塑性座屈理論の体系化を一步前進させるものであり、数学的には Poincaré の提案したトポロジーに源を発し、René Thom が創始したカストロフイー理論の工学的応用の道を開きつつあるものと思われる<sup>24)</sup>。そして固体に起こるあらゆる非線形現象の本質をモデルによる計算機シミュレーション



22. アンリ・ポアンカレ。

写真9 トポロジーの創始者 H. Poincaré

により捉える手法が確立されたことになり、現在激しい論争が続いているニュートン以来の学問的業績といわれているカストロフイー理論の妥当性を立証したことになるであろう。またこの時期に本所では都市災害公害問題がまだ世論の対象にならなかった時期に全所的プロジェクトを組み、第一次臨時事業：都市における災害・公害の防除に関する研究(昭和46年～49年)、第二次臨時事業：都市災害・公害の最適防護システムに関する研究(昭和50年～昭和53年)を遂行した。私はプロジェクトリーダーの平尾収先生の補佐役を務めながら大気汚染問題に関連し重みつき残差法による広域汚染拡散問題の計算機シミュレーションや構造物の地盤系の地震応答問題に関連しいくつかの基礎的研究を行った。特に後者については軟弱地盤の液化化現象の計算機シミュレーション手法の開発を志したが、その経験が基礎となって昭和59年3月から3ヶ年計画で民間主導型ではあるが Zienkiewicz 教授と共に日本の大手建設および重工、電機約20社の参加を得て地盤の非線形動的応答解析プログラム DIANA-J の開発を進めている。一方私と竹内則夫助手(現明星大講師)が開発した「剛体一ばねモデル」を用いた地盤力学解析プログラム EARTH はすでに多くの成果をあげ、本四連絡橋や各地における宅地造成、トンネルや高速道路建設工事の安全性診断のツールとして使用され、その将来性に大きな期待が集まっており、東京都内の建設工事についてもいくつかの実施例の報告を得ている。また最近「EARTH」に動的応答解析機能が追加され長野県西部地震による御岳山大崩壊の計算機シミュレーションを行い、その成果がNHK特集番組で放映され、かなりの反響を呼んだ。またエネルギー問題に関連し、深い地下空洞掘削や放射能物質の拡散、物理探

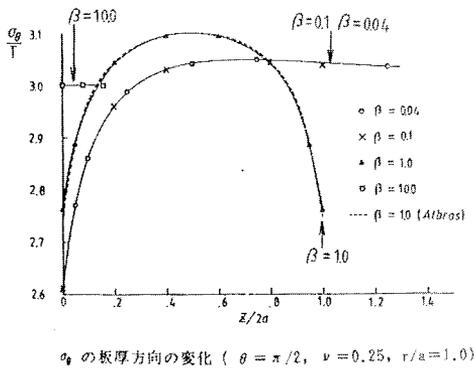
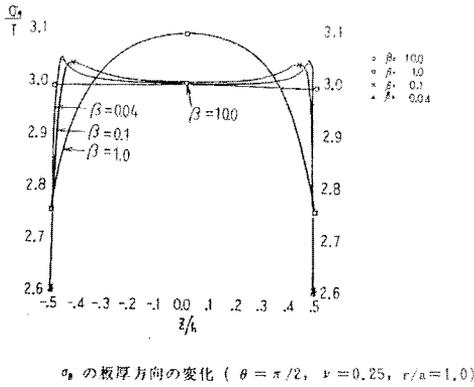


図2 3次元応力集中問題の研究(円孔を有する無限厚板の引張り)  $\beta = \frac{2a}{h}$ ,  $a$  円孔半径,  $h$  板厚

査技術に関する基礎的研究を地質調査所の研究グループと計画中である。“剛体—ばねモデル”の応用研究として最後に特記しておきたいのは整形外科バイオメカニクス分野への応用である。

すなわち私は昭和55年頃より整形外科臨床医の協力を得て、本モデルを用いた人体関節における接触圧分布を可視化するマイクロコンピュータ-X線画像診断システムを開発、股関節、膝関節、手関節その他の病気診断に使用しその研究成果が学会で大きな反響を巻き起こしている。最近その成果が世界一の医学研究所といわれる米国ロチェスター市の Mayo Clinic の Coventry, Chao 両博士等に認められ同クリニックと共に共同開発研究を進めつつある。我が国では最近特に老人医療の問題が喧しく論議され、整形外科の治療を必要とするリハビリテーション問題がクローズアップされている。このX線画像診断システムは将来CTと結合させまた3次元解析を可能ならしめることにより整形外科領域全般にわたる総合画像診断システムの開発にまで発展するであろう。

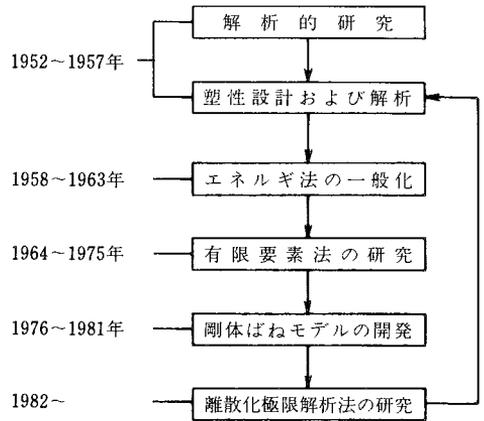


図3 私の固体力学研究における思想の遍歴

さて最後の話になったが、昭和59年から昭和60年にかけての定年前の2年間円孔を有する無限平板が一方に一定引張り荷重を受ける場合の3次元応力集中問題に挑戦し、破壊力学の世界で未解決のまま残されている板厚効果を厳密に捉えるのに成功した<sup>25)</sup>。本郷にあるスーパーコンピュータをフルに生かして計算した結果はこれまでの実験から予想されていたような厚板の表面近傍の(板厚の約1~2%)で引張り応力が最大(応力集中係数およそ3.1)が現れ、表面で約2.5位まで急激に低下すること、またその低下の度合いがポアソン比に著しく影響されることがわかった。

この板厚効果はおそらく楕円孔板の場合にも保持され、したがって楕円孔を扁平にした極限として得られる貫通クラックの場合でも引張り応力の最大値や表面値は変動するが同じような板厚効果は現れるものと断定している。

### 5. 旅路の果てで得たもの

以上長々と自分の歩んで来た道の回顧を試みたが、私の固体力学研究における思想の遍歴を図式化して示すと、図3のようになる。解析的方法の研究からこの世界に入って30代(昭和30年~昭和40年)の前半にアメリカで塑性解析の手法と Rayleigh-Ritz や Galerkin 法で代表されるエネルギー法を学んだ。やがてその限界に到達したところで有限要素法に乗り移り、これも40年代(昭和40年~昭和50年)の終わりに訣別して、剛体—ばねモデルを用いる離散化極限解析法(discrete method of limit analysis)と自称する方法に最終的に到達することになったが、この手法はよくよく考えてみるとリーハイ大学で学んだ塑性解析の手法を有限要素法の光に当てて一般化させた手法にほかならないということである。このようにして本所を中心とした私の固体力学研究30年の生活は終わった。月並の表現ではあるが「少年易老、

◇ 自然現象の二面性

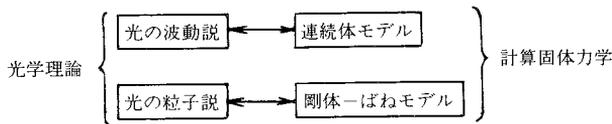


図 4 光学と固体力学における連続と不連続モデル



写真 10 カタストロフィー理論の創始者  
ルネ・トム パリ大学教授  
(菊池俊吉氏撮影)

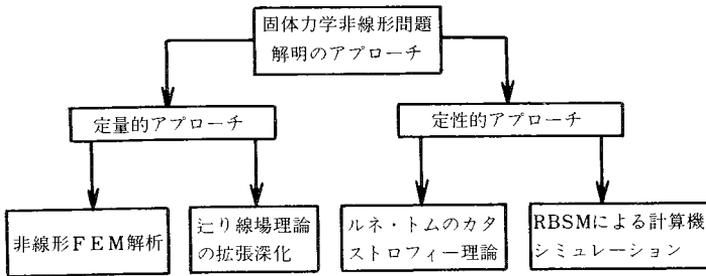


図 5 固体力学非線形問題解明のみち

学難成……」の心境である。しかしながら旅路の果てで何か悟りに似たものを得た心境である。以下におこがましくも私の悟ったことの要点を披露して結びとしたい。

(1) 自然現象の二面性

自然現象は連続を仮定して説明できる面と、不連続性（あるいは粒子性）を考えなければ説明し難い面がある。光の波動説と粒子説はその典型的な例である。

(2) 自然現象は本質的に非線形である

現代の物質観によればあらゆる物質は粒子（マクロの粒子、結晶、分子、原子、素粒子、……）の階層的集団構造になっている。連続体仮説の力学や物理学の枠内でそのすべてを理解しようとすると、そのついでが数学的難題となって現れてくる。これが「非線形の壁」であると私は思っている。

(3) 固体力学非線形問題解明の道

固体力学非線形問題解明の道としては図に示すような定量的と定性的アプローチが考えられる。定量的アプローチでは従来の力学や物理学の理論を精緻し、数理科学的手法（FEM, FDM, BEM 等）を限りなく研ぎ澄ます方法である。これが現状の計算力学や計算物理といわれる手法であろうが、もし特性曲線法（method of characteristics）を一般化して任意の場所にその不連続性を導入した解析ができるようになれば、非線形問題の解析研究の道も豁然と開けてゆくのではなからうか。この意味において私は非線形有限要素解析法の将来を否定してしまっているわけではない。

(4) 非線形問題解析における定性的手法の重要性

正直いって私は非線形問題の定量的研究に強い疑問をもっている。これは有限要素法の旗振りを長年やってきた人間の発言と思えないかも知れないが、私は本当にそう思っている。その理由はいたって簡単である。

材料の構成式というのが信頼できないからである。もっと具体的にいうと材料の精密な構成則というものは一般に求められないと思うからである。これは例えば土や岩盤、コンクリート、その他いわゆる複合材料の機械的性質や生体材料のそれを考えて見れば明らかであろう。それなら金属材料はどうかといわれるかもしれないが、金属材料は弾性域の場合にはある程度の精度は期待できようが非弾性状態に入ってから他は材料と五十歩、百歩である。また精密な材料構成則がわかっているということはその材料の力学的性質は解明されているということと同じ意味でなからうか？ 換言すると力学解析には信頼できる材料構成則が必要であるが、その構成則を求めるためには精密な力学解析が必要であるという鶏が先か卵が先かの議論になってしまうのである。これはあらゆる材料の研究で宿命的なことであり、したがって非線形問題の定量的解析の意義が疑問視される所以である。

私の本音を云わせて頂くと固体材料の構成則は突き詰めてゆくとどんな材料も粒子間の結合則と思われる Mohr-Coulomb の法則に支配されていると思っている。これは私のこれまで行ってきた多くの土、岩盤やコンクリート材料の破壊に関する計算機シミュレーション結果からの結論である。

以上のような観点に立って考えると我々に残された道は材料の本質的挙動を表せる離散化モデルを提案し、それに現在判っている最良の構成則を仮定し、物理学の法則にのっとったシミュレーションを計算機の中でさせて、出てきた結果が、手許にある実験や実測データを説明できるかどうかを見るのである。そして余り良く合わないようであればモデルの構成則を試行錯誤的に修正してゆくのである。これが今後大いに期待できる自然現象を計算機シミュレーションにより定性的に理解してゆく方法の骨子であり、剛体—バネモデルは正しく固体に起こる非線現象を適確に捉えうるモデルであると自画自賛している次第である。それは数学的には前にも述べたようにルネ・トムのカストロフィ理論の工学的応用といえるし、物理学的には寺田寅彦の抱いた“寺田物理学”の世界であるようにも思われる<sup>26)</sup>。理工学の世界では数理科学的手法が通用する分野はハイテクの分野と一般的にみなされている。しかし良く考えてみると工学における設計という仕事は理論解析のように解の唯一性が成り立つような世界ではない。要するにある与えられた条件を満足し、所期の目標または目的を達成できるようなものが設計されればよいわけである。この意味において物を作ったり、設計したりする仕事は定性的であるといえないだろうか。よくみるとわれわれの工学の分野では精密な理論解析が不可能で、経験や勘で会得しなければならないノウハウが非常に多い。そのような知識体系を計算機シミュレーションによってその構成メカニズムを知り、データベース化する作業が今後できるならばそれが本当の工学的知識といえるのではないだろうか。ここに言う定性的アプローチがそれに答える方法になっていると思うのである。

最後にあとからくる若い人のために残された固体力学の研究課題について簡単に述べておしまいにしたい。

(i) 三次元弾性論の開拓

本文中でこの問題について若干ふれたが、この分野は弾性学上の残された問題であろう。特に3次元破壊力学の基礎固めに必要であるだけでなく、梁理論、板殻理論の精度を評価する上でも重要である。解析解の高精度計算に計算機をいかす道があることを述べておきたい。

(ii) 構造動力学の課題として

- (a) 減衰機構の解明
- (b) 多自由度振動系の新しい時間積分法の開発
- (c) 波動伝播の新しい解析手法の開発

が今後期待されよう。

(iii) 固体接触問題の解明はいうまでもなくトライボロジー問題の基礎にある難問題で、その進展によって機械力学や粒状体力学の前途が明るくなるであろう。

(iv) 21世紀はライフサイエンス花盛りとなるように思われる。そのような世の中の流れを考えると柔かい物体の力学の建設とその計算力学手法の開拓が大いに期待されよう。

終わりに臨み、退官記念講演と解説記事の2つを書くこと約束しておきながら、多忙のため、大変遅れ、その2つの合わせたような記事にしてしまったことをお詫び申し上げますと同時に本特集号を企画して頂いた出版委員会のメンバー各位、原稿の校正で大変お世話になった出版掛の方々に厚く御礼申し上げる次第である。

(1986年6月2日受理)

### 参 考 文 献

- 1) T. Kawai “Influence Surfaces of Orthotropic Plates”, Report of the Institute of Industrial Science, the University of Tokyo, Vol. 13, No. 6, February, 1964.
- 2) T. Kawai and B.Thürlimann “Influence Surfaces for Moments in Slabs Continuous over Flexible Cross Beams”, Publications of the Internal Association for Bridge and Structural Engineering, Vol. 17, 1957.
- 3) T. Kawai “On the Bending of a Sectorial Plate”, Publications of the International Association for Bridge and Structural Engineering, Vol. 18, 1958.
- 4) M. L. Williams, “Stress Singularities Resulting From Various Boundary Conditions in Angular Corners of Plates in Extension”, Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME, Vol. 74, 1952 P. 526.
- 5) T. Kawai “On the Bending of an Infinite Plate Resting on the Elastic Foundation”, Proc. of the 8th Japan National Congress for Applied Mechanics, March, 1959.
- 6) 仲威雄, 加藤勉著, “単一材の座屈”, 東京大学出版会 (1959).
- 7) V. Z Vlasov 著, 奥村敏恵外共訳 “薄肉弾性ばりの理論”, 技報堂, 昭和42年9月初版.
- 8) 川井忠彦 “薄肉開断面材の弾性力学(I)~(VII)”, 生産研究 16巻1, 2, 4, 6, 8号 (1964) 及び17巻4, 5号 (1965).
- 9) K. Washizu: “Variational Methods in Elasticity and Plasticity”, Pergamon Press Oxford 2nd Ed. (1975).
- 10) 川井忠彦, 藤谷義信 “梁理論の精密化に関する二, 三の研究(I)~(V)”, 生産研究, 25巻6, 7, 9, 11号 (1973) 及び26巻6号 (1974).
- 11) T. Kawai and Y. Fujitani, “Some Considerations on the Modern Beam Theory—Theoretical Studies”, Report of the Institute of Industrial Science, the University of Tokyo, Vol. 32, No.3, April, 1986.
- 12) T. Kawai and Y. Fujitani, “Some Considerations on the Modern Beam Theory—Development of Practical Methods—”, Report of the Institute of

- Industrial Science, the University of Tokyo, Vol. 32, No.4, June, 1986.
- 13) T. Kawai, "Plastic Analysis and Minimum Weight Design of Multi-Story Plane Frames", Guest Lectures, the 1965 Summer Conference on Plastic Design of Multi-Story Frames, Lehigh University, Bethlehem, Pennsylvania, July, 1966.
  - 14) M. Yoshiki and T. Kawai, "On the Method of Application of Energy Principle to Problems of Elastic Plates", Proc. of the 11th International Congress of Applied Mechanics, Munich, Germany, Springer-Verlag, Berlin, 1964.
  - 15) R. H. Gallagher, Y. Yamada and J. T. Oden "Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis and Design", the University of Alabama Press, 1971.
  - 16) J. T. Oden, R. W. Clough and Y. Yamamoto, "Advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design", UAH Press, the University of Alabama in Huntsville, Huntsville, Alabama, 1972.
  - 17) J. Abel and T. Kawai, Proceedings of the U.S.-Japan Seminar on Interdisciplinary Finite Element Analysis, August 7-11, 1978 Cornell University, Ithaca, New York, U.S.A.
  - 18) T. Kawai, Proceedings of the 4th International Symposium on Finite Element Methods in Flow Problems, University of Tokyo Press, Tokyo, July, 26-29, 1982.
  - 19) T. Kawai and H. Ohtsubo, "A Method of Solution on the Complicated Buckling Problems of Elastic Plates with Combined Use of Rayleigh-Ritz's Procedure and the Finite Element Method," Proc. of the 2nd Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, 15-17, October, 1968.
  - 20) T. Kawai, T. Muraki, N. Tanaka and T. Iwaki, "Finite Element Analysis of Thin-Walled Structures Based on the Modern Engineering Theory of a Beam", Proc. of the 3rd Conference on the Matrix Methods in Structural Mechanics, Wright-Patterson, Air Force Base, Ohio, October, 1971.
  - 21) M. Yoshiki, T. Kawai, T. Okabe and M. Hidaka "On the Development of the "PASSAGE" Program", Theory and Practice in Finite Element Structural Analysis, Proceedings of the 1973 Tokyo Seminar on the Finite Element Analysis, University of Tokyo Press, November, 1973.
  - 22) T. Kawai, "Some Considerations on the Finite Element Method", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 16, October, 1980.
  - 23) 川井忠彦論 "離散化極限解析法に関する最近の話題", 生研セミナーテキストコース 116, 財団法人生産技術研究奨励会 (昭和 61 年 1 月).
  - 24) R. トム著 弥永昌吉, 宇敷重広訳: "構造安定性と形態形成" 岩波書店 (1980).
  - 25) T. Kawai and T. Endoh: "Analytical Solution on the 3D Stress Concentration Problem of a Plate with a Circular Hole under Uniform Tension at Infinity," Computational Mechanics '86. Theory and Applications Vol. I V-37, Springer-Verlag, May 25-19, 1986, Tokyo.
  - 26) 宮田親平著: "科学者たちの自由な樂園, 一栄光の理化学研究所—" 文藝春秋社 1983 年 7 月.