

# 非連続き裂モデルによるクリープき裂パラメータの評価

Evaluation of Creep Crack Parameter by Discontinuous Crack Model

渡 辺 勝 彦\*・佐 藤 裕\*

Katsuhiko WATANABE and Yutaka SATO

## 1. はじめに

破壊力学の立場からの材料強度評価において、とりわけその解明が立ち遅れているもののひとつはクリープき裂問題であると思われる。これに関しては、き裂パラメータとして何をを用いるかということも含めて、未解決の部分が多い。ところで、き裂の一生を通じ、常にその物理的意味が明確なパラメータとして提案されたき裂エネルギー密度は<sup>1),2)</sup>、その定義にあたって構成則に何ら制限が無いことからクリープき裂パラメータとしても期待され、切欠き裂モデルによるクリープ問題のき裂エネルギー密度評価を通じてその有用性が示されてきた<sup>3),4)</sup>。本研究はこのクリープ問題におけるき裂エネルギー密度の新たな評価方法として、先に弾塑性き裂について定式化されその有効性が示された、き裂を含む面の非連続性を考慮したき裂モデル<sup>5)</sup>のクリープ問題への適用の可能性を検討したものであり、はじめに同モデルのクリープ問題における構成式、有限要素解析のための定式化を行い、さらに例題の解析を行ってそのき裂エネルギー密度評価手法としての有効性を示す。

## 2. 非連続き裂モデルにおけるクリープき裂パラメータ

非連続き裂モデルは現実のき裂先端近傍において生じるとされる非連続性を第一近似的に表現しうるき裂モデルである<sup>5)</sup>。このモデルでは、き裂を含む面を非連続な変形を許す面と考え(図1参照)、この部分に対して非連続面以外の通常の連続体として扱う部分に対して適用する構成関係に従って定められる構成式を適用する。実際には図1に示す応力 $[\sigma_n] = [\sigma_{22} \ \sigma_{23} \ \sigma_{12}]$ と相対変位 $[\delta_n] = [\delta_{22} \ \delta_{23} \ \delta_{12}]$ を考え、それらの関係として構成式が与えられるわけであるが、この $[\delta_n]$ と $[\sigma_n]$ を用いて、このモデルにおける時刻 $t$ のき裂エネルギー密度はき裂面に分布する形で次式により評価される。

$$\mathcal{E}(t, X_1) = \mathcal{E}^e(t, X_1) + \mathcal{E}^p(t, X_1) + \mathcal{E}^c(t, X_1)$$

$$= \int dW_{plane}^e + \int dW_{plane}^p + \int dW_{plane}^c \quad (1)$$

$$dW_{plane} = [\sigma_n] \{d\delta_n\} \quad (2)$$

ここで $W_{plane}$ はひずみエネルギー密度<sup>1)2)</sup>であり、上付きの $e, p, c$ はそれぞれ弾性、塑性、クリープの各寄与分を表す。式(1)、(2)により、き裂が進展を開始した後においても刻々のき裂先端およびき裂先端前方におけるき裂エネルギー密度をその履歴に従って評価することが可能である。またこのモデルにおいてはき裂端開口変位CTODも、次式により評価される。

$$CTOD(t) = \delta_{22}(t, a) \quad (3)$$

## 3. クリープ問題における非連続面の構成式

ここでは非連続面の従う構成式を弾性クリープを考える場合に対して具体的に与える。まず連続体として考える領域の構成関係であるが、ここでは弾性クリープにおいて広く用いられる次式により与えられるものとする。

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_{ij} \\ d\sigma_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} D_{ij}^e & D_{in}^e \\ D_{ni}^e & D_{nn}^e \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} d\epsilon_{ij} - d\epsilon_{ij}^c \\ d\epsilon_n - d\epsilon_n^c \end{Bmatrix} \quad (4)$$

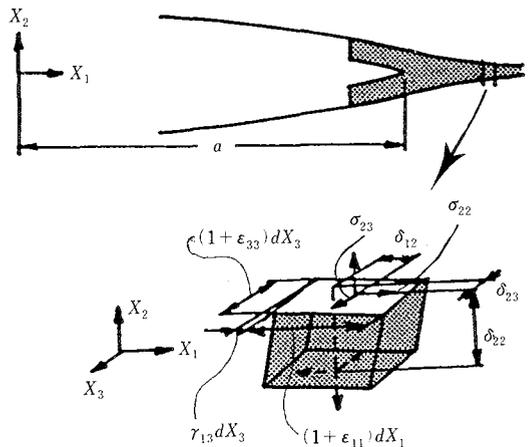


図1 非連続き裂モデル

\*東京大学生産技術研究所 第1部

ここで  $[D^e]$  は弾性マトリクスであり、また

$$\begin{bmatrix} \sigma_t \\ \sigma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{33} & \sigma_{13} \\ \varepsilon_{11} & \varepsilon_{33} & \gamma_{13} \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{33} & \gamma_{13} \\ \varepsilon_{22} & \gamma_{23} & \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{33} & \gamma_{13} \\ \varepsilon_{22} & \gamma_{23} & \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (7)$$

である。式(4)におけるひずみ増分  $d\varepsilon^e$  はクリーブポテンシャル  $f(\sigma_{ij})$  を仮定して

$$\begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_t^c \\ \dot{\varepsilon}_n^c \end{Bmatrix} = \bar{\varepsilon}^c \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \sigma_t} \\ \frac{\partial f}{\partial \sigma_n} \end{Bmatrix} \quad (\bar{\varepsilon}^c : \text{相当クリーブひずみ速度}) \quad (8)$$

により与えられるクリーブひずみ速度  $\dot{\varepsilon}^c$  により評価されるものとする。

連続体に対して以上のような構成式を用いる場合、非連続面に対しては次のような構成関係を与えることができる。

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_t \\ d\sigma_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{tt}^e & D_{tn}^e \\ D_{nt}^e & D_{nn}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ H_{nt}^e & H^{e-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\varepsilon_t - d\varepsilon_t^c \\ d\varepsilon_n - d\varepsilon_n^c \end{Bmatrix} \quad (9)$$

$$[H_{nt}^e] = -[D_{nn}^e]^{-1}[D_{nt}^e], I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, [H^e] = \begin{bmatrix} h^e & 0 & 0 \\ 0 & h^e & 0 \\ 0 & 0 & h^e \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_t^c \\ \dot{\varepsilon}_n^c \end{Bmatrix} = \bar{\varepsilon}^c \begin{bmatrix} I & O \\ O & H^c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \sigma_t} \\ \frac{\partial f}{\partial \sigma_n} \end{Bmatrix}, [H^c] = \begin{bmatrix} h^c & 0 & 0 \\ 0 & h^c & 0 \\ 0 & 0 & h^c \end{bmatrix} \quad (10)$$

ここで  $h^e, h^c$  はそれぞれ弾性、クリーブの各変形に対して、連続体の構成式と非連続面のそれを結び付けるために導入された長さの次元を持った材料定数と考えることのできる量であり、これらの値を適当に調節することで実際の応力と相対変位間の関係が成り立つようになる。なお、ここで与えた構成関係は、有限要素解析におけるマトリクスの対称性が保持されるように工夫されたものであり、そのため一部理論的整合性が失われているが<sup>6)</sup>、この問題については別に論じる。

#### 4. 有限要素定式化

クリーブ問題においても弾塑性問題と同じく<sup>5)</sup>非連続面に面要素を導入することで考えているモデルの有限要素解析が可能となる。すなわち非連続面における相対変位増分は、面要素において全体座標系を局所座標系に変換するマトリクス  $[T]$  と面要素の形状関数とも呼べるマトリクス  $[\bar{N}]$  により、節点変位増分  $[d\bar{u}]$  と

$$\{d\delta_n\} = [\bar{N}][T]\{d\bar{u}\} = [\bar{B}]\{d\bar{u}\} \quad (11)$$

のように結び付けられるので、面要素における内部仕事は  $S$  を面要素の面積として  $\int_S [\sigma_n] \{d\delta_n\} dS$  と与えられること、また式(9)も考慮して仮想仕事の原理を用いることにより次のように考える面要素の関係マトリクスが得られることになる。

$$[\bar{K}] = \int_S [\bar{B}]^T [\bar{D}] [\bar{B}] dS, [\bar{D}] = [D_{nn}^e][H^e]^{-1} \quad (12)$$

$$\{d\bar{P}_{\delta c}\} = \int_S [\bar{B}]^T [\bar{D}] \{d\delta_n^c\} dS \quad (13)$$

ここで  $[\bar{K}]$  は面要素の要素剛性マトリクス、 $\{d\bar{P}_{\delta c}\}$  は相対変位増分のクリーブ成分に等価な要素節点荷重ベクトルである。したがってこれら面要素のマトリクスと連続体と考える領域の通常要素に対するマトリクスを組み合わせることにより系全体のマトリクスを得ることができ、考えている非連続き裂モデルの有限要素クリーブ解析が可能となる。

面要素として実際にどのようなものを用いるかは連続体要素との適合も考慮して決める必要があるが、ここでは後の解析例で使用した、二次元問題において連続体要素に三角形定ひずみ要素を用いた場合に対応する図2に示す三角形面要素についての  $[\bar{B}]$ 、 $[\bar{K}]$  の具体的表示を示しておく。

$$[\bar{B}] = \begin{bmatrix} \xi_2 \sin \theta & -\xi_2 \cos \theta & \xi_1 \sin \theta & -\xi_1 \cos \theta & -\sin \theta \\ -\xi_2 \cos \theta & -\xi_2 \sin \theta & -\xi_1 \cos \theta & -\xi_1 \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{matrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{matrix} \begin{matrix} \xi_1 = l_1/l, \xi_2 = l_2/l \end{matrix} \quad (14)$$

$$[\bar{K}] = \frac{ht}{2} [\bar{B}]^T [\bar{D}] [\bar{B}] \quad (15)$$

#### 5. 解 析 例

本節では二次元クリーブき裂のき裂パラメータ評価例を通じて以上に述べた手法の有効性を示す。

##### 停留き裂

図3に示すような形状の中央き裂材が時刻  $t=0^+$  において一様な応力を受けたのち、その応力が維持される場合を考える。連続体要素としては三角形定ひずみ要素を用い、面要素としてははりガメント面に前節で述べた三角

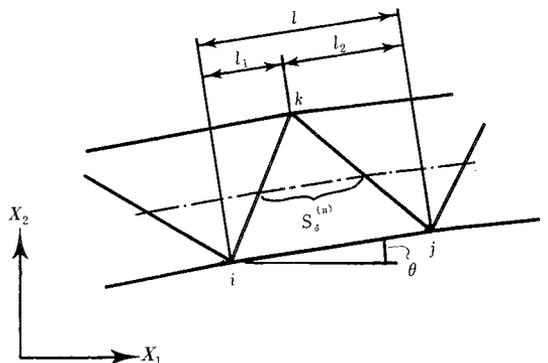


図2 三角形面要素

研 究 速 報

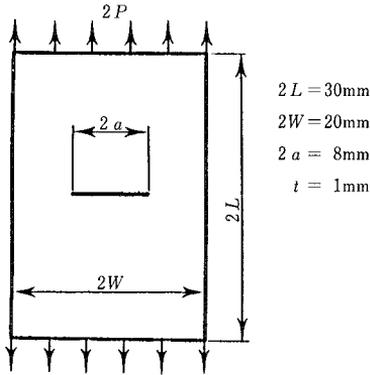


図3 試験片の形状および負荷様式

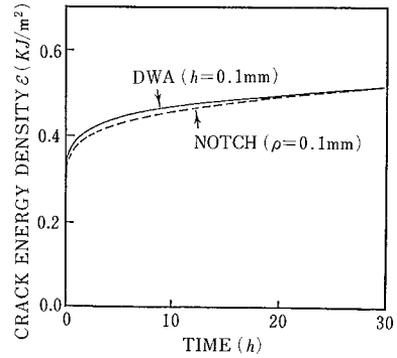


図4 き裂エネルギー密度の時間変化

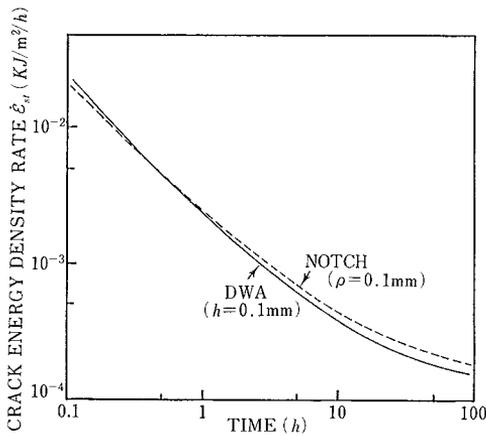


図5  $\dot{\epsilon}_{st}$ の時間変化

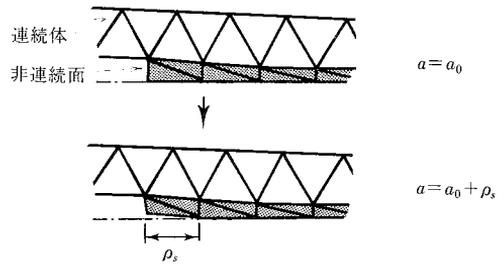


図6 非連続面におけるき裂の進展

形面要素を用いている。また解析は対称性を考慮して1/4の領域について行った。材料定数はヤング率 $E=147Gpa$ 、ポアソン比 $\nu=0.3$ またクリープ構成則はNorton則 $\dot{\epsilon}^c=A\bar{\sigma}^n$  ( $\bar{\sigma}$ :相当応力)を用い $A=7.05 \times 10^{-21}(Mpa)^{-n}h^{-1}$ 、 $n=8$ とし非連続面における材料定数としては、 $h=h^e=h^c$ と仮定して $h=0.1mm$ を用いた。図4は、式(1)によって評価したき裂エネルギー密度の時間変化を切欠きき裂モデル<sup>3)4)</sup>(切欠きの曲率半径 $\rho=0.1mm$ )において径路独立積分 $\mathcal{E}_{Jst}$ により評価されるものと比較したものである。両者は物理的に全く同等の意味を持つものであり $h$ あるいは $\rho$ を調節することにより等価なモデルとなりうる。また図5はき裂エネルギー密度の時間変化率 $\dot{\epsilon}_{st}$ をやはり切欠きモデルのそれと比較したものである。これらの結果より、切欠きき裂モデルによるものと非連続き裂モデルによるものはほぼ一致し、適切な $h$ を選択することにより、本論文で示した手法は十分有効なき裂パラメータ評価手段となりえることがわかる。

進展シュミレーション

ここでは非連続き裂モデルによる弾性クリープき裂の進展シュミレーションの例を示す。切欠きき裂モデルと比べ<sup>5)</sup>このモデルでは図6のように非連続要素の節点の拘束をひとつずつはずすことにより進展シュミレーションを容易に行うことができる。進展の条件としては、累積損傷の程度を表すと考えられるき裂エネルギー密度の値がある限界値 $\mathcal{E}_c^c$ に達したときに面要素のメッシュ一つぶん(一回の進展量 $\rho_s=const.$ )だけ進展するという仮定を用いた。 $\mathcal{E}_c^c$ としては弾性、クリープのき裂エネルギー密度に対する寄与分の総和としての限界値 $\mathcal{E}_c^c$ を用いる場合と、そのクリープ成分 $\mathcal{E}_c^c$ のみを用いる場合の二通りが考えられるが、き裂進展開始条件に関する最近の実験的研究から $\mathcal{E}_c^c=const.$ がき裂進展開始の条件である可能性が示唆されていることから<sup>7)</sup>、ここでは後者を採用し、 $\mathcal{E}_c^c=0.5kJ/m^2$ を進展の条件とした。試験片としてはやはり図3の中央き裂材を用いており、 $h$ としては本解析においては結果の絶対値は問題としていないので計

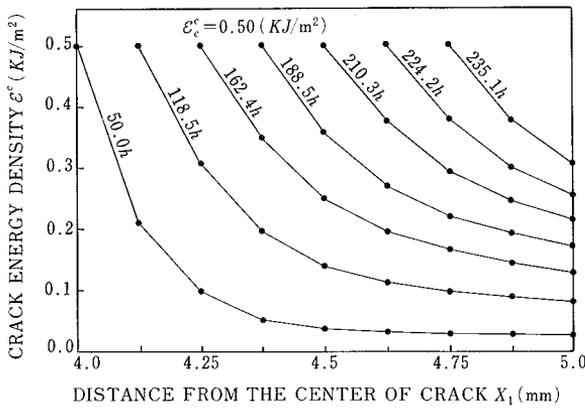


図7 き裂進展に伴うき裂エネルギー密度の分布

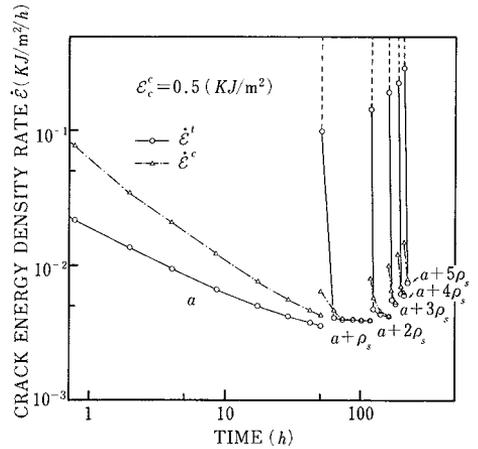


図8 き裂進展に伴うε̇^cの時間変化

算時間短縮のため 2 mm を用いた。図 7, 8 は以上の仮定のもとに行った進展シミュレーションの結果である。図 7 はき裂の進展に伴うき裂先端前方のき裂エネルギー密度の分布を示しており、進展が進むにつれてき裂先端前方における勾配が相対的にゆるやかになり、ある定常的な状態に向かう傾向が読み取れる。ただしリガメント面積の減少により平均的な応力は増加するので進展速度自体は加速されている。また図 8 は進展に伴うき裂先端におけるき裂エネルギー密度の時間変化率  $\dot{\epsilon}^c$  の時間変化を表している (図 5 の  $\dot{\epsilon}_{ST}^c$  はき裂が進展を開始するまでの  $\dot{\epsilon}^c$  に対応する)。進展が進むにつれて進展直後からほぼ定常状態に近いと見なせる状態に至るまでの時間が短くなり定常状態に近い状態における  $\dot{\epsilon}^c$  の値が高くなっていく傾向が読み取れる。ここで修正  $J$  積分  $J'$  が定義される<sup>8)</sup> 定常クリープ状態においては  $\dot{\epsilon}^c$  は  $J'$  と一対一対応の関係にあることが示されているので<sup>3)</sup>、き裂進展パラメータとしてしばしば用いられる  $J'$  の意味が明らかになると共に、損傷速度に対応すると考えられる  $\dot{\epsilon}^c$  が一般的なクリープき裂進展速度パラメータとして期待できるものとなることがわかる。

### 6. おわりに

非連続き裂モデルのクリープ問題に対する定式化を行い、クリープき裂パラメータの評価を通じてその有効性を確認した。このモデルの性質については今後一層の検討が必要であるが、切欠き裂モデルに比べ一般に有限要素分割が容易であり、特にき裂進展解析が容易に行えることから、クリープき裂問題解析のための中心的役割を果たすモデルになりうる可能性があるものと考えられる。(1986年5月9日受理)

### 参考文献

- 1) 渡辺, 機論, Vol.47, No. 416 (1981), p. 406
- 2) 渡辺, 機論, Vol., 48, No. 433 (1982), p.1226
- 3) 渡辺, 倉繁, 機論, Vol. 50, No. 454 (1984), p. 1291
- 4) 渡辺, 番, 機論, Vol. 51, No. 467 (1985), p. 1836
- 5) 渡辺, 畔上, 機論, Vol. 51, No. 469 (1985), p. 2154
- 6) WATANABE, K. & SATO, Y. 生産研究, Vol. 38, No. 8 (1986)
- 7) WATANABE, K. et al., Proceedings of the International Conference on Creep (1986), p. 245
- 8) 大路ほか 2 名, 機論, Vol. 42, No. 354 (1976), p. 350