

BEM による応力拡大係数の高精度・汎用解析法

Accurate and Efficient Analyses of Stress Intensity Factors for Various Crack Problems with Boundary Element Method

結城良治*・松本敏郎*
Ryoji YUUKI and Toshiro MATSUMOTO

1. 緒言

境界要素法 (BEM) に FEM の離散化手法が導入され、高精度化・効率化が図られて以来¹⁾、BEM によるき裂問題の解析が発展・普及しつつあるが、精度・汎用性などの面でまだ検討の余地がある。著者らは、BEM に適した応力拡大係数の決定法として、き裂先端の変位・表面力の直接解を利用する比例変位法・比例応力法を提案し、このような K の決定法の工夫により、2 次元および 3 次元モード I き裂の K が簡便かつ高精度に求められることを明らかにしている^{2),3)}。

本研究では、実用上重要となる混合モードき裂あるいは複雑な形状のき裂、体積力場のき裂等が解析できる汎用の 2 次元 BEM 弾性プログラムを開発し、各種の 2 次元き裂の BEM 解析を行った。あわせてこのようなき裂においても前述の比例法が有効に利用できることを示す。

2. BEM の基礎式

本研究における BEM 弾性解析は、Kelvin の解を用いた直接法である。図 1 のような弾性体の境界値問題の場合、BEM の基礎式は次のように表される。

$$C_{ij}u_j(P) + \int_{\Gamma} T_{ij}(P, Q)u_j(Q)d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{ij}(P, Q)t_j(Q)d\Gamma + \int_{\Omega} U_{ij}(P, q)b_j(q)d\Omega \quad (1)$$

ここで、 i, j は座標軸、 u_j, t_j はそれぞれ変位および表面力ベクトル、 U_{ij}, T_{ij} は Kelvin の基本解であり、それぞれ無限領域中の 1 点 P の j 方向に単位集中力が作用した

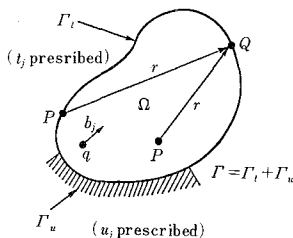


図 1 弾性体の境界値問題

ときの別の点 Q における i 方向の変位、表面力である。また、 C_{ij} は、滑らかな境界に対しては、クロネッカの記号 δ_{ij} を用いて $1/2\delta_{ij}$ 表される定数である。 b_j は体積力ベクトルである。

式 (1) 中の変位 $u_j(Q)$ 、表面力 $t_j(Q)$ は境界上の値のみからなり、境界を離散化し、境界条件を用いることによって未知数の次元からなる連立方程式に変換でき、問題が解けることになる。さらに、境界上の値 u_j, t_j が求まれば、領域内部の点 p における変位は次式により求まる。

$$u_i(p) + \int_{\Gamma} T_{ij}(p, Q)u_j(Q)d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{ij}(p, Q)t_j(Q)d\Gamma + \int_{\Omega} U_{ij}(p, q)b_j(q)d\Omega \quad (2)$$

また、内点のひずみや応力は式 (2) を微分した式に変位一ひずみ関係式、構成方程式を用いて求めることができる。

3. BEM 弾性解析プログラムの概要

前述 (1) 式の離散化解析手法については詳述を省き、本研究で用いた BEM 弾性解析プログラムの特徴のみを以下に列記する。

- 1) 境界要素に 2 次アイソパラメトリック要素を用いた。必要に応じてき裂先端には中間節点を 1/4 点に移動した特異要素も用いた。
- 2) コマンドを使って対話式に要素分割を行う自動分割システムにより分割作業の効率化を図った。
- 3) 数値積分は Gauss の数値積分公式を用い、誤差評価法による積分次数の可変により計算の効率化を図った。
- 4) 特異積分は 1 つの要素をいくつかのサブ要素に分割して行い、数値積分精度の向上を図った。
- 5) 表面力が不連続となる角点には無限小要素を用いた。
- 6) 混合モードき裂の解析では、領域をき裂を含んだ 2 つの領域に分割し、領域分割法で解析した。
- 7) 内部セルは三角形一次要素で離散化し、Gauss の数値積分を誤差評価法を組み込み実行した。

4. K の決定法 (比例応力法, 比例変位法)

*東京大学生産技術研究所 第 1 部

研究速報

き裂問題の解析においては、前述の離散化解析手法の高精度・効率化に加えて、き裂先端の応力の特異性に起因して、 K の決定法を工夫する必要がある。以下に BEM に適した K の決定法として、比例応力法および比例変位法³⁾を、混合モードに拡張して定式化を示す。

図2に示すようにき裂先端近傍の応力、変位、表面力を定義する。き裂先端近傍におけるき裂前方 ($\theta=0$) の応力分布 σ_y 、 τ_{xy} およびき裂後方 ($\theta=\pm\pi$) の相対変位 Δu 、 Δv は次式で表される。

$$\sigma_y |_{\theta=0} = -t_y \doteq \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \quad (3)$$

$$\tau_{xy} |_{\theta=0} = -t_x \doteq \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \quad (4)$$

$$\frac{2G}{\chi+1} \frac{\Delta v}{2} \doteq \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{r} \quad (5)$$

$$\frac{2G}{\chi+1} \frac{\Delta u}{2} \doteq \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{r} \quad (6)$$

ここで、 $\Delta v = v|_{\theta=\pi} - v|_{\theta=-\pi}$ 、 $\Delta u = u|_{\theta=\pi} - u|_{\theta=-\pi}$ 、 G ：横弾性係数、 $\chi = 3-4\nu$ (平面歪)、 $(3-\nu)/(1+\nu)$ (平面応力)、 ν ：ポアソン比、 K_I 、 K_{II} はモード I およびモード II に対する応力拡大係数である。通常、 σ を負荷応力、 a をき裂半長として、 K を次のように無次元化して表示する。

$$K_I = F_I \sigma \sqrt{\pi a}, \quad K_{II} = F_{II} \sigma \sqrt{\pi a} \quad (7)$$

今、異なるき裂問題 A、B を考える。き裂先端の要素の相対分割 r/a を問題 A、B で互いに等しくすると、式(3)、(4)より、表面力と F_I 、 F_{II} の間に次の比例関係が得られる。

$$\left[\frac{t_y}{F_I} \right]_A = \left[\frac{t_y}{F_I} \right]_B = \frac{-\sigma \sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} = \text{const.} \quad (8)$$

$$\left[\frac{t_x}{F_{II}} \right]_A = \left[\frac{t_x}{F_{II}} \right]_B = \frac{-\sigma \sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} = \text{const.} \quad (9)$$

BEM や FEM 解析におけるき裂先端の節点値は誤差が含まれ、通常それ自身単独では使用できなく、外挿法などでは用いられないが、それが含まれる要素内である種

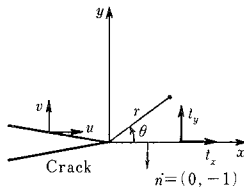


図2 き裂先端近傍の変位と表面力の定義

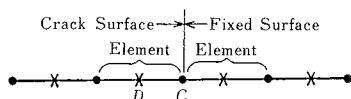


図3 き裂先端近傍の要素分割と節点

の平均値を示しているものと考えられ、式(8)、(9)における比例関係もそのまま成り立つと予想される。そこで、問題 B として K のわかっている問題 (基準問題) をあらかじめ解析し、図3の C 点での表面力を求めておき、同じ相対分割で K のわかっていない問題 A の C 点での表面力を求めれば、式(8)、(9)より問題 A の F 値が次のように求められる (比例応力法)³⁾。

$$\left. \begin{aligned} F_{IA} &= \frac{[t_{y,C}]_A}{[t_{y,C}]_B} F_{IB} \\ F_{IIA} &= \frac{[t_{x,C}]_A}{[t_{x,C}]_B} F_{IIB} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

なお、村上ら⁴⁾は、精度を上げるための要点として、き裂がない場合にももともと存在している表面力成分 $t_{y,g}$ 、 $t_{x,g}$ を $t_{y,C}$ 、 $t_{x,C}$ から差し引くべきことを重ね合わせの原理から導いている。

同様な比例関係は変位についても成立し³⁾、図3で D 点の節点相対変位を Δu_D 、 Δv_D とすれば問題 A の F 値が次のように求められる (比例変位法)。

$$\left. \begin{aligned} F_{IA} &= \frac{[\Delta v_D]_A}{[\Delta v_D]_B} \frac{a_B}{a_A} F_{IB} \\ F_{IIA} &= \frac{[\Delta u_D]_A}{[\Delta u_D]_B} \frac{a_B}{a_A} F_{IIB} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

ここで、 a_A 、 a_B はそれぞれ問題 A、B のき裂(半)長である。なお、比例応力法、比例変位法の適用に当たっては、両問題のき裂先端近傍の要素の相対分割 r/a を等しくする必要があることを再記しておく。

BEM による K の解析では、従来変位ないし応力の外挿法が用いられてきた。外挿法ではき裂先端近傍の要素分割を十分細かくする必要があるが、上述の比例法では、比較的粗い要素分割でも、高精度な解が期待できる³⁾。

5. 解析結果

5.1 混合モード直線き裂の解析

対称性を利用できない混合モードき裂の解析では、領域分割法を適用することにより、BEM による解析が可能となる。以下に各種混合モードき裂の K の解析例を示す。 K の決定法として前述の比例応力法、比例変位法を用いた。その際の基準解として、図4に示す長方形板中の傾斜直線き裂 ($H/W=2$ 、 $a/W=0.5$ 、 $\alpha=45^\circ$) に対する結城ら⁵⁾による選点法の解を用いた。表1に基準解と同一の問題であるが、中央傾斜き裂の傾斜角 α 、き裂長 a/W を変えた場合の比例変位法より求めた一連の解析結果を選点法の解と比較して示す。表1からき裂が大きい $a/W=0.8$ を除き、比較的高精度の解が得られ、 K_{II} の決定に際しても比例変位法が有効に利用できることが確認された。

次に基準解を上述と同じとし、図5に示す片側傾斜き

研究速報
表1 長方形板中の中央傾斜き裂の応力拡大係数

α	a/W	BEM Present results		Collocation method by Yuuki	
		F_I	F_{II}	F_I	F_{II}
15°	0.1	0.9373	0.2505	0.9391	0.2502
	0.2	0.9571	0.2516	0.9577	0.2510
	0.3	0.9896	0.2531	0.9904	0.2527
	0.4	1.0389	0.2561	1.0402	0.2560
	0.5	1.1100	0.2616	1.1128	0.2619
	0.6	1.2283	0.2752	1.2183	0.2727
	0.7	1.3970	0.2963	1.378	0.293
	0.8	1.6604	0.3270	1.653	0.307
30°	0.1	0.7512	0.4337	0.7557	0.4339
	0.2	0.7725	0.4382	0.7730	0.4367
	0.3	0.8025	0.4434	0.8025	0.4417
	0.4	0.8440	0.4495	0.8456	0.4497
	0.5	0.9011	0.4620	0.9046	0.4617
	0.6	0.9828	0.4814	0.984	0.480
	0.7	1.0518	0.5063	1.091	0.508
	0.8	1.2316	0.5563	1.245	0.550
45°	0.1	0.5042	0.5040	0.5046	0.5018
	0.2	0.5177	0.5089	0.5181	0.5072
	0.3	0.5403	0.5173	0.5406	0.5162
	0.4	0.5718	0.5293	0.5719	0.5290
	0.5	base	base	0.6119	0.5458
	0.6	0.6621	0.5638	0.6611	0.5674
	0.7	0.7206	0.5938	0.721	0.595
	0.8	0.7869	0.6293	0.795	0.630

表2 長方形板中の片側傾斜き裂の応力拡大係数

θ	a/W	$F_I = K_I / (\sigma\sqrt{\pi a})$			$F_{II} = K_{II} / (\sigma\sqrt{\pi a})$		
		P.D.M.*1	P.S.M.*2	Freese	P.D.M.	P.S.M.	Freese
30°	0.2	1.082	1.090	1.11	0.355	0.357	0.36
	0.3	1.270	1.282	1.28	0.403	0.407	0.41
	0.4	1.551	1.565	1.55	0.471	0.478	0.48
	0.5	1.964	1.981	1.98	0.561	0.572	0.58
45°	0.2	0.797	0.796	0.80	0.404	0.402	0.41
	0.3	0.898	0.899	0.90	0.446	0.446	0.45
	0.4	1.050	1.053	1.02	0.501	0.503	0.50
	0.5	1.275	1.271	1.27	0.571	0.567	0.58

*1 Proportional Displacement Method (比例変位法)

*2 Proportional Stress Method (比例応力法)

裂の K を比例応力法・比例変位法により求めた。表2に $\theta=30^\circ, 45^\circ$ の場合について本解析結果を選点法(MMC)によるFreeseの解⁹⁾と比較して示す。Freeseの解は図から読み取った値であるが1%前後で両者が一致し、き裂

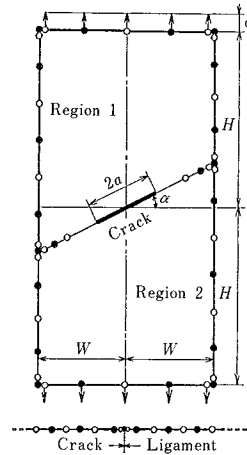


図4 長方形板中の中央傾斜き裂と要素分割

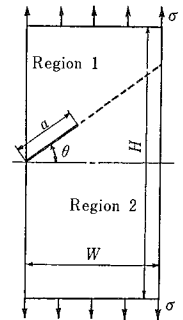


図5 長方形板中の片側傾斜き裂

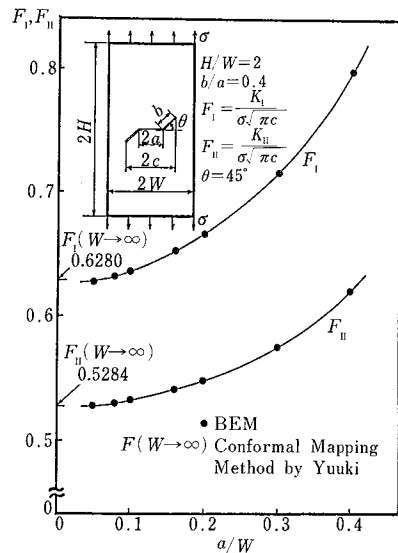


図6 長方形板中の両端屈折き裂の応力拡大係数

形状、境界条件が基準解と異なっても比例法が適用できることがわかる。

5.2 屈折き裂の解析

上述の結果から領域分割法の適用および K の決定法の工夫により、非直線形状の複雑な2次元き裂の K もBEMにより簡便かつ比較的高精度に解析できる見通しが得られた。ここでは、図6に示すような両端屈折き裂が長方形板($H/W=2$)の中で一様引張を受ける場合についてBEM解析を試みた。き裂形状を一定($\theta=45^\circ, b/a=0.4$)に保ったまま、 a/W を徐々に大きくした場合の比例変位法により求めた K_I, K_{II} の変化を図6に示す。

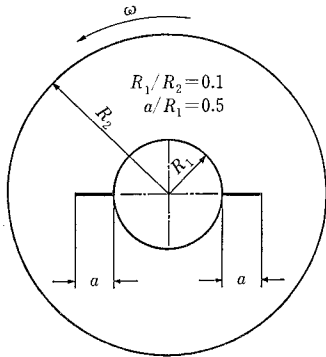


図7 き裂を有する回転円板

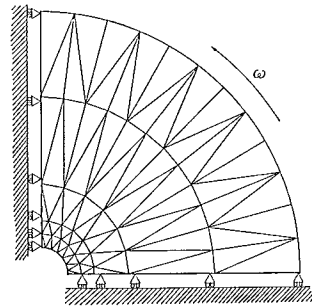


図8 内部セルの分割例

表3 き裂を有する回転体の応力拡大係数 (平面応力)

	BEM*			FEM**		体積力法 村上, 西谷
	接続外挿法	比較変位法	比較応力法	直接法	エネルギー法	
$f_1(\lambda)$	1.5919	1.5955	1.3559	1.569	1.601	1.594
$f_2(\lambda)$	1.1043	1.1069	1.1488	1.089	1.111	1.106
$F(\lambda)$	0.8884	0.8864	0.8540	0.901	0.883	0.887

* BEM 要素数 46, 内部セル 81

** FEM 要素数 868, 節点数 945

$a/W \rightarrow 0$ の極限では、結城らの等角写像法による無限板中の屈折き裂の解²⁾とはほぼ一致した。この結果から、実際の構造物で見られる複雑な形状のき裂についても、本解析法により実用上十分の精度で解析できるものと思われる。さらにき裂伝播方向に関するクライテリオンを導入すれば、き裂進展シミュレーション解析も可能と思われる。

5.3 き裂を有する回転円板の解析

一般に体積力が作用する場合は BEM においても領域を内部セルに分割し領域積分を実行する必要がある。ここでは、体積力として遠心力が作用する図7に示すき裂を有する回転円板の K を BEM により解析した。その内部セルの分割例を図8に示す。比重 $\gamma = 7.85 \times 10^{-6} \text{kg/mm}^3$, $\nu = 0.3$, $N = (30/\pi)\omega = 10000 \text{rpm}$, $E = 2.1 \times 10^4 \text{kg/mm}^2$ としたときの解析結果を表3に示す。表には同一問題に対する FEM³⁾および体積力法⁹⁾による結果も併記した。応力拡大係数は次式で無次元化している。

$$f_1(\lambda) = K_1 / (\sigma_0 \sqrt{\pi a}), \quad f_2(\lambda) = K_1 / (\sigma_1 \sqrt{\pi a})$$

$$F(\lambda) = \sigma_0 \sqrt{\pi a} / K_1, \quad \lambda = a / R_1$$

$$\sigma_0 = \frac{3 + \nu}{8} \frac{\gamma \omega^2}{g} R_2^2 \tag{12}$$

$$\sigma_1 = \frac{3 + \nu}{8} \frac{\gamma \omega^2}{g} \left\{ R_1^2 + R_2^2 - \frac{1 + 3\nu}{3 + \nu} (R_1 + a)^2 + \frac{R_1^2 R_2^2}{(R_1 + a)^2} \right\}$$

ここで ω は角速度, g は重力加速度, σ_0 はき裂のない回転円板の中心に生じる円周応力, σ_1 はそのき裂先端となるべく位置での円周応力である。 K は、接続外挿法²⁾・比例応力法・比例変位法³⁾で求めたが、比例変位法で求めた K が最も精度が良く、精度の高い解として信頼できる体積力法の解と一致 (0.1%以下) した。また FEM の解と比べて精度・効率の面ではるかにすぐれていることがわかる。本プログラムは、体積力場の問題のみならず、熱弾性、初期ひずみの問題にも直接利用できる。

6. 結 言

汎用の2次元 BEM 弾性解析プログラムを開発し、各種混合モードき裂や体積力場中のき裂を解析した。本解析では、 K の決定法として、BEM の直接解であるき裂先端での表面力や変位の節点値を用いる比例応力法、比例変位法を用い、本方法がいずれのき裂問題に対しても有効に利用でき、簡便かつ高精度な K の決定法であることを示した。
(1986年5月9日受理)

参 考 文 献

- 1) Lachat, J.C. and Watson, J.O.; Int. J. Num. Mech. Eng., 10 (1976) pp. 991
- 2) 北川, 結城, 木須, 川端; 日本機械学会論文集 A 編, 50-450 (1984) pp. 129
- 3) 木須, 結城, 北川; 日本機械学会論文集 A 編, 51-463 (1985), pp. 660
- 4) 村上; 日本機械学会論文集, 42-360 (1976), pp. 2305
- 5) 北川, 結城; 日本機械学会論文集, 43-376 (1977) pp. 4354
- 6) Bowie, O.L.; "Mechanism of Fracture 1, Method of Analysis and Solutions of Crack Problems" ed. Sih, G.C., Noordhoff, (1973) pp. 51
- 7) 北川, 結城; 日本機械学会論文集, 41-386 (1978) pp. 3346
- 8) 回転体の強さ試験研究分科会報告書, 日本機械学会 (1977) pp. 40
- 9) 村上, 西谷; 日本機械学会論文集, 41-348 (1975) pp. 2255