研究速報
特集 8
UDC 624.073.132：519.6

平板座屈固有値の有限要素再解析
——圧縮を受ける正方形板に補強材をつける場合——
Finite element reanalysis of buckling eigenvalue of flat plate
——Stiffener attachment to square plate under compression——

中桐　滋*・恒成敬二**
Shigeru NAKAGIRI and Keiji TSUNENARI

1. 緒　言

構造変更による構造応答の変化を，はじめから解析をやり直すのではなく，変更に応じた小規模な演算で効果的に行う手法は再解析と呼ばれている[1),2)]．構造変更を有限要素法の観点から分類すると，剛性マトリックス等の対象マトリックスのサイズの変化の有無（たとえば構造部材の追加），また変更に影響される対象マトリックス成分数の大小に分けられる．変更を構造諸元のパラメータの観点から分類すると，パラメータ変化量の大小によって分けられる．パラメータ変化量が小さい場合には，構造変更の影響を受ける対象マトリックス成分数の大小にかかわらず，摂動解法が再解析手法としても有効であろう．パラメータ変化量が大きく，変化するマトリックス成分数が大きい場合には，再解析の細工をするよりも解析をやり直すほうが簡便である．再解析の所要演算時間はやり直し解析のそれより短くなければならないとの要請が存在するので，再解析が有効となるのはパラメータ変化量が大きく，変化する成分数が小さい場合である．

静的問題の構造再解析の有効さについては悲観的な報告もある[3)]．しかしながら，構造の局部的変更を考慮した固有値問題は古くから研究されている[4)]．同自由度数の固有値問題と連立一次方程式の求解の演算時間は，前者のほうが格段に長い．固有値問題の再解析を連立一次方程式の求解に置き換えて定式化できれば，再解析の有効さが生かされる可能性がある．本稿は，かかる考えに基づき，圧縮を受ける正方形平板の座屈固有値を対象とし，構造変更としては補強材を付加する場合を例にとり，固有値問題，特に固有ベクトルの変化を考慮して，この再解析手法を定式化するものである．さらに，数値計算例により再解析の所要演算時間が解析をやり直す場合よりも短いことを示す．

*東京大学生産技術研究所　第1部
**新日本製鉄(株)

2. 固有値問題再解析の問題設定

線形座屈固有値問題の基礎式を式(1)で表す．ここで上横棒は構造変更前の原設計に対応するものであることを示し，$[\bar{K}]$ は剛性マトリックス，$[\bar{K}_G]$ は座屈に関する初期応力マトリックスである．原設計に対して固有値解析が行われており，座屈固有値$\bar{\lambda}$と固有ベクトル$\{\bar{\phi}\}$は既知であるとする．

$$([\bar{K}]+\bar{\lambda}[K_G])\{\bar{\phi}\}=\{0\} \tag{1}$$

たとえば補強材付加のような構造変更により，剛性および初期応力マトリックスには$[\varDelta K]$，$[\varDelta K_G]$の変化が生ずるものとする．ただし，その非零成分の個数は$[\bar{K}]$等のサイズに較べて小さい，また $[\varDelta \bar{K}]$ 等のサイズは $[\bar{K}]$ 等のサイズに等しい場合を取り扱う．ここで

$$[K]=[\bar{K}]+[\varDelta K] \tag{2}$$

$$[K_G]=[\bar{K}_G]+[\varDelta K_G] \tag{3}$$

$$\lambda=\bar{\lambda}+\varDelta\lambda \tag{4}$$

$$\{\phi\}=\{\bar{\phi}\}+\{\varDelta\phi\} \tag{5}$$

とし，構造変更後の固有値問題式(6)の解を

$$([K]+\lambda[K_G])\{\phi\}=\{0\} \tag{6}$$

$[\varDelta K]$，$[\varDelta K_G]$ を与件として，$\varDelta\lambda$と$\{\varDelta\phi\}$の形で求めるのが本稿で設定する問題であり，$[\varDelta K]$，$[\varDelta K_G]$の変化量は大きいものとする．

3. 固有値問題再解析の定式A

式(2)から式(5)を式(6)に代入した結果に，左から$\{\bar{\phi}\}^T$（Tはマトリックスの転置を意味する）を乗じ，さらに $[\bar{K}]$ 等の対称性を利用すると$\varDelta\lambda$の決定方程式が式(7)と得られる．この式によれば$\varDelta\lambda$は$\{\varDelta\phi\}$に依存している．

$$\varDelta\lambda=\frac{\{\bar{\phi}\}^T([\varDelta K]+\bar{\lambda}[\varDelta K_G])\{\bar{\phi}+\varDelta\phi\}}{\{\bar{\phi}\}^T([\bar{K}_G]+[\varDelta K_G])\{\bar{\phi}+\varDelta\phi\}} \tag{7}$$

前記代入結果を$\{\varDelta\phi\}$について整理すると式(8)が得られる．

$$([K]+\bar{\lambda}[K_G])\{\Delta\phi\}=-([\Delta K]+\bar{\lambda}[\Delta K_G])\{\bar{\phi}\} -\Delta\lambda([\bar{K}_G]+[\Delta K_G])\{\bar{\phi}+\Delta\phi\} \quad (8)$$

$[\bar{K}]+\bar{\lambda}[\bar{K}_G]$)は特異であるが，上式左辺の$[K]+\bar{\lambda}[K_G]$は非特異であり，その逆マトリックスは存在する．しかしながら，式(8)の連立一次方程式としての解として$\{\Delta\phi\}$を計算しても，固有ベクトルの規準化条件が不明確となる．そこで，固有ベクトルの規準化条件として式(9)をとる．

$$\{\bar{\phi}\}^T[\bar{K}_G]\{\bar{\phi}\}=\{\bar{\phi}+\Delta\phi\}^T([\bar{K}_G]+[\Delta K_G])\{\bar{\phi}+\Delta\phi\}=1 \quad (9)$$

式(9)右側の式を変形すると$\{\Delta\phi\}$に関する付帯条件式(10)が得られる．

$$2\{\bar{\phi}\}^T[K_G]\{\Delta\phi\}=-\{\bar{\phi}\}^T[\Delta K_G]\{\bar{\phi}\}-\{\Delta\phi\}^T[K_G]\{\Delta\phi\} \quad (10)$$

式(9)の規準化条件を式(10)の付帯条件として加味した$\{\Delta\phi\}$の決定方程式は式(11)の形にまとめられる[5]．

$$[A]^T[A]\{\Delta\phi\}= [A]^T\begin{Bmatrix} -([\Delta K]+\bar{\lambda}[\Delta K_G])\{\bar{\phi}\}-\Delta\lambda[K_G]\{\bar{\phi}+\Delta\phi\} \\ -\{\bar{\phi}\}^T[\Delta K_G]\{\bar{\phi}\}-\{\Delta\phi\}^T[K_G]\{\Delta\phi\} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

ここで $[A]$ は下式で与えられる非正方マトリックスである．

$$[A]=\begin{bmatrix} [K]+\bar{\lambda}[K_G] \\ 2\{\bar{\phi}\}^T[K_G] \end{bmatrix} \quad (12)$$

式(11)には$\Delta\lambda$が含まれており，また右辺には$\Delta\lambda$と$\{\Delta\phi\}$，$\{\Delta\phi\}$と$\{\Delta\phi\}$の積が現れている．したがって，$\Delta\lambda$と$[\Delta\phi]$は式(7)と式(11)の非線形連立方程式の解となるので，反復解法が必要となる．反復にあたっては，第m回の$\Delta\lambda$と$\{\Delta\phi\}$の値を式(7)，(11)の右辺に入れて，第$m+1$回の値を左辺の解として定める．本定式において式(11)の係数マトリックス$[A]^T[A]$は反復回数によらず一定であることが特長である．一方，$[K]$と$[K_G]$は帯状マトリックスであるが，$[A]^T[A]$は帯状とならず，さらに$[K]+\bar{\lambda}[K_G]$と$2\{\bar{\phi}\}^T[K_G]$とは数値が桁違いなので精度保持のための桁揃えの因子を付帯条件に乗じて置く必要のあることに注意を要する．

4．固有値問題再解析の定式B

3節所論の定式Aでは，式(11)右辺に$\Delta\lambda$と$[\Delta\phi]$の非線形項が残り，反復解法において近似精度の向上が期待できない．非線形項を除外するには，式(11)にかえて式(13)を用いる定式も可能である．肩符mは反復回数を示す．

$$[B^m]^T[B^m]\{\Delta\phi^{m+1}\}= [B^m]^T\begin{Bmatrix} -([\Delta K]+\bar{\lambda}[\Delta K_G])\{\bar{\phi}\}-\Delta\lambda^m[K_G]\{\bar{\phi}\} \\ -\{\bar{\phi}\}^T[\Delta K_G]\{\bar{\phi}\} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

ここで

$$[B^m]=\begin{bmatrix} [K]+(\bar{\lambda}+\Delta\lambda^m)[K_G] \\ \{2\bar{\phi}+\Delta\phi^m\}[K_G] \end{bmatrix} \quad (14)$$

この定式では，係数マトリックス$[B^m]^T[B^m]$が反復ごとに変化する，また$\Delta\lambda$が正解に近づくにつれて$[K]+(\bar{\lambda}+\Delta\lambda^m)[K_G]$が特異に近づく点に注意を要する．

5．圧縮を受ける正方形平板に関する数値計算例

図1に再解析の対象とする正方形平板を示す．負荷はY方向の圧縮荷重とし，平板は全周で単純支持条件にあるとする．これを原設計とし，構造変更として図中の中央線に沿いY方向の縦補強材を付加する場合を想定する．補強材の断面を同図右下隅に示し，補強材の高さHを設計変数とする．補強材の捩り剛性は無視する．Hが小さく補強材の曲げ剛性が小さいときは，座屈は平板と補強材が共に撓む固有モードで生ずる．補強材の曲げ剛性EIと平板曲げの剛性指標Dbの比γが限界剛比を越えるほどHが大きくなると，補強材は撓まず平板が二つの板場にわかれて座屈するモードとなる．ここでDは平板の曲げ剛性，bは平板Y方向の幅である．

正方形平板を64個の二等辺三角形要素に規則的に分割する．正方形板は薄く，Kirchhoff-Loveの仮説が成立するとして，使用要素は曲げに関して9自由度非適合BCIZ要素[6]であり，面内変形に関しては一定面内ひずみ要素である．圧縮負荷を圧縮辺で一様変位条件として加えるとき，補強材を付加しても面内の平面応力場は変化せず，補強材の曲げによるひずみエネルギの寄与分のみにより$[\Delta K]$と$[\Delta K_G]$は定められる．一方，負荷を一様分布圧縮荷重として加えるときは，補強材を付加するとその圧縮剛性により平板内の平面応力場に変化を生じ，$[\Delta K_G]$にその寄与分が現れる．圧縮方向直角に横補強材を付加する場合も同様である．これらの場合，平面応力

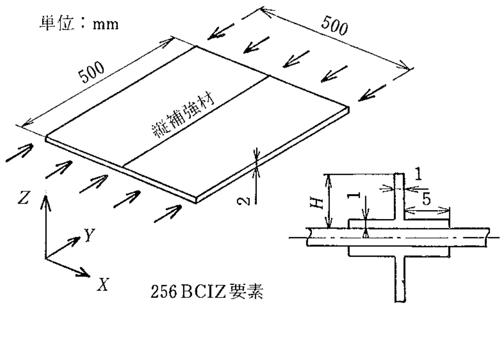

図1　圧縮を受ける正方形平板と縦補強材詳細

研　究　速　報

場の変化はわずかではあるが平板全面で生ずるので，$[\Delta K_G]$の非零成分の個数は増大する．

図2に剛比γを変えて固有値再解析を定式Aで行って得られた1次から4次モードまでの座屈応力を示す．原設計の座屈モードは，X方向半波数/Y方向半波数で表すと，1次が1/1，2次は2/1，3次は3/1，4次は2/2である．この例の縦補強材はX方向の座屈波形を抑制する作用をするから，3次までの補強効果は著しい．4次モードについて中央縦補強材は座屈モード節線に位置するので補強効果は得られない．本図は，定式Aによっても，原設計での固有モードで固有次数を数えるとき，座屈固有値の逆転が追跡可能であることを示している．図3は，剛比0.9の縦補強材を付加した場合の座屈モードの反復収束状況を2次モードについて示したものであり，定式Aによっても固有ベクトルのかなりの変化が再解析されている．なお，図中の点線は縦補強材位置を示す．座屈応力の定式Aでの反復収束状況を剛比0.9の縦補強材の場合について図4に示す．本図より3節所論の非線形連立方程式の反復解法の収束は早く，3次等の高次モードでも$m=5$で十分収束の得られることがわかる．

6．所要演算時間と考察

5節に述べた数値計算は要素数64，総自由度数123，バンド幅30で原設計の剛性マトリックス等を構成し，構造変更により影響を受ける自由度数は10である．FACOM M 380 Q計算機による原設計固有値解析の演算時間は2.74秒であり，反復5回に対する第1回の再解析では1.64秒を要した．2回以降の再解析の所要時間は0.85秒である．2回以降の再解析というのは，5節の例

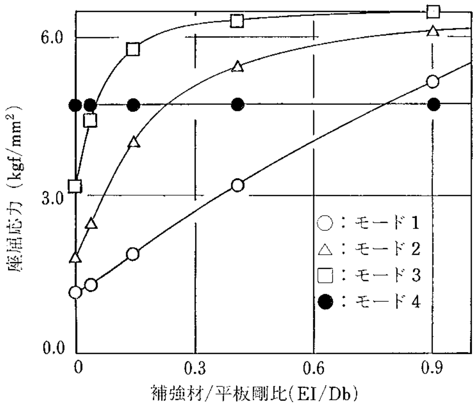

図2　縦補強材の設計変更による座屈応力の変化

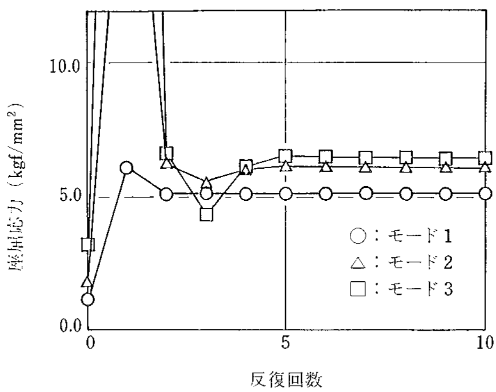

図4　座屈応力の反復回数mに対する収束状況

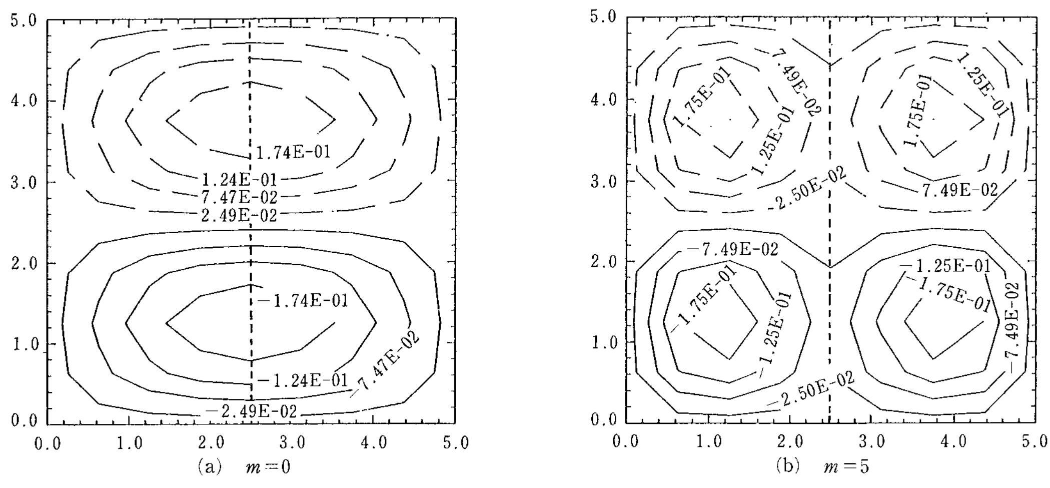

図3　縦補強材付加時の座屈モードの反復回数mによる変化

でいえば設計度数Hを順次変えることを意味する．$[A]^T[A]$の作成において基本となるマトリックス乗積を行っておいて，パラメータ値のみを変えるようにできるので，２回目以降の再解析は第１回の再解析より演算時間が短縮される．2.74秒より1.69秒は短いので本手法は再解析の要請を満たしている．また，同じ解析対象を要素数256，総自由度数435，バンド幅54，変更を受ける自由度数18で解析するときには原設計に102.2秒，第１回の再解析に30.5秒，２回以降の再解析に19.5秒を要した．これは固有値問題を連立一次方程式の求解に置き換えて再解析を行うとき，総自由度数に対して変更を受ける自由度数が相対的に少なくなると，再解析の有効度が向上することの証左である．

$\Delta\lambda$を定める式(７)では$\{\bar{\phi}+\Delta\phi\}$が分母，分子に現れている．したがって，$\{\Delta\phi\}$の誤差が大きくても，$\Delta\lambda$が収束してしまう場合もある．本稿では例示しなかったが，たとえば板場中央線に圧縮荷重に対して垂直となる横補強材を付加する場合，６次座屈モードで設計変数Hの変更量が大きい場合，定式Ａによる再解析では固有ベクトル変化の収束が得にくい．このような場合には，定式Ｂにより収束解が正しく得られるが，反復ごとに$[B^m]$を作成し，連立一次方程式の求解を行わねばならないので，再解析の演算時間は256要素の例で原設計解析時間の80%に達する．

（1986年４月24日受理）

参考文献

1) Arora, J.S.; Survey of Structural Reanalysis Techniques, Proc. ASCE, Vol. 102, No. ST 4, (1976), pp.783～802
2) Wang, B.P., Pilkey, W.D. and Palazzolo, A.R.; Reanalysis, Modal Synthesis and Dynamic Design, The State of Art Surveys on Finite Element Technology, ed. Noor, A.K. and Pilkey, W.D., ASME,(1983), pp. 225～295
3) Kavlie, D. and Powell, G.H.; Efficient Reanalysis of Modified Structures, Proc. ASCE, Vol. 97, No. ST 1, (1971), pp. 377～392
4) Hirai, I, Yoshimura, T. and Takamura, K.; On a Direct Eigenvalue Reanalysis for Locally Modified Structures, Int. J. num. Meth. Engrg, Vol. 6, No. 3, (1973), pp. 441～442
5) Fox, R. L. and Kapoor, M.P.; Rates of Change of Eigenvalues and Eigenvectors, AIAA J., Vol. 6, No. 12, (1968), pp. 2426～2429
6) O.C.ツィンケヴィッチ著，吉識雅夫，山田嘉昭監訳，マトリックス有限要素法，培風館，(1984)，第10章