

# 片側応力問題の変分不等式とポテンシャル関数

Variational Inequality and Potential Function for Stress-Unilateral Problems

半 谷 裕 彦\*  
Yasuhiko HANGAI

## 1. は じ め に

大スパン構造として用いられる代表的な構造システムとして、(a)ケーブル構造、(b)膜構造、(c)スペースフレーム(立体骨組構造)、(d)シェル構造、があげられる。剛性の視点より、(a)と(b)は柔な構造、(c)と(d)は剛な構造と大別される。図-1はこれらの構造システムに生じる形状(幾何学的)非線形問題を示したものであるが、柔あるいは剛により形状非線形性状は大きく異なってくる<sup>1)</sup>。ケーブル構造や膜構造では圧縮に対する面内剛性と曲げ剛性の極端に小さなケーブルや膜を構造材料としている。そのため、ケーブル構造では「たるみの問題」が、膜構造では「しわの問題」が生じる。本論文では、ケーブル構造に生じる「たるみの問題」を具体例として取りあげ、「たるみ」を力学的に表現することに基づく基礎方程式の誘導をおこなう。

ケーブル材のモデル化として圧縮応力に対する抵抗能力が零であることを出発点とする。言い換えると、応力が正の場合には応力伝達がおこなわれるが、負の場合には応力伝達がおこなわれない。このような応力伝達システムを「片側応力システム」と呼ぶことにする。

「片側応力システム」を含む構造物の構造解析においては、結果として得られる応力状態、つまり、応力の正、

負が解析前にはわからないことから、通常は、繰り返し計算を採用することになる。その場合の基礎方程式には「片側応力システム」であることの情報に含まれておらず、応力の正、負による部材除去という構造システムの変更を基礎としている。

本論文の目的は、「片側応力システム」であることの情報を組み込んだ基礎方程式の誘導にある。そのため、まず、片側応力問題に対する変分不等式(仮想仕事の原理を不等式で表現した式)を導入する。次いで、片側応力問題に対するポテンシャル関数を導入し、変分不等式を利用することにより、解はこのポテンシャル関数を最小にしていることを示す。

変分不等式は、境界条件に不等式を含む問題、例えば、接触問題、の定式化に多用されており<sup>2),3)</sup>、特殊な例としては、ケーブル構造の増分型方程式の誘導も試みられている<sup>4)</sup>。本論文は、Winkler基礎を扱っている文献<sup>2)</sup>を参考とし、そこでの手法をケーブル構造の片側応力問題へ適用したものである。

## 2. 変分不等式の導入

図-2に示すように、直交座標系  $0-xyz$  を座標系として採用する。節点  $i$  と節点  $j$  を結ぶ直線のケーブル部材(以下、部材と呼ぶ)を  $a$  ( $a=1, \dots, m$ ,  $m$ : 部材数)とする。節点座標値ベクトルと方向余弦ベクトル、および、節点変位ベクトルと節点力ベクトル(図-3参照)を次式で置く。

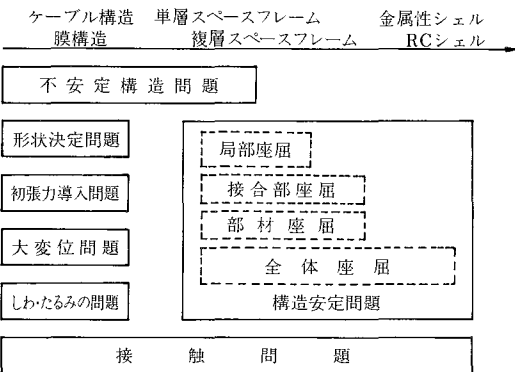


図-1 : 大スパン構造の形状非線形問題

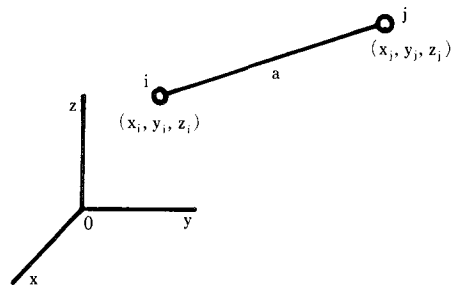


図-2 : 部材と節点座標

\*東京大学生産技術研究所 第5部

$$\mathbf{x}_i = \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{x}_j = \begin{Bmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{Bmatrix}, \quad \lambda_a = \begin{Bmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{Bmatrix}_a \quad (1)$$

$$\mathbf{u}_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{f}_i = \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{Bmatrix}_i, \quad \mathbf{f}_j = \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{Bmatrix}_j \quad (2)$$

ここに、 $\lambda_a = (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) / |\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|$  である。

部材 a の変形前、後の部材長の差、つまり、伸びは、

$$(u_n)_a = |\mathbf{x}_j + \mathbf{u}_j - \mathbf{x}_i - \mathbf{u}_i| - |\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i| \quad (3)$$

上式を線形化すると、t を転置記号として、

$$(u_n)_a = \lambda_a (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i)_a \quad (4)$$

部材 a の軸力・伸び関係を図-4 に示す。つまり、伸びが正の場合には軸力伝達がおこなわれ、負の場合には軸力伝達がおこなわれないとする。部材 a の軸力を  $N_a$  で表すと、

$$(u_n)_a < 0 \quad ; \quad N_a = 0 \quad (5)$$

$$(u_n)_a \geq 0 \quad ; \quad N_a = k_a (u_n)_a \quad (6)$$

許容変位と伸びを  $\mathbf{u}_i^*$ ,  $(u_n)_a^*$ 、解を  $\mathbf{u}_i$ ,  $(u_n)_a$  とすると、(5), (6) 式を付帯条件として、仮想仕事式は次式で与えられる。

$$\delta W = \sum_a N_a (u_n^* - u_n)_a - \sum_i \mathbf{f}_i (\mathbf{u}_i^* - \mathbf{u}_i) = 0 \quad (7)$$

ここに、 $i = 1, \dots, n$  ( $n$ : 節点数) である。

次に、(7) 式を変分不等式へ変換する。まず、伸び  $(u_n)_a$  を次式のように分解する<sup>1)</sup>。

$$(u_n)_a = (\underline{u}_n)_a - (\overline{u}_n)_a \quad (8)$$

ここに、

$$(\underline{u}_n)_a = \frac{1}{2} \{ (u_n)_a + |(u_n)_a| \} \geq 0 \quad (9)$$

$$(\overline{u}_n)_a = \frac{1}{2} \{ -(u_n)_a + |(u_n)_a| \} \geq 0 \quad (10)$$

このとき次式の不等式が成立する。

$$k_a \cdot (\underline{u}_n)_a \cdot (u_n^* - u_n)_a \geq N_a \cdot (u_n^* - u_n)_a \quad (11)$$

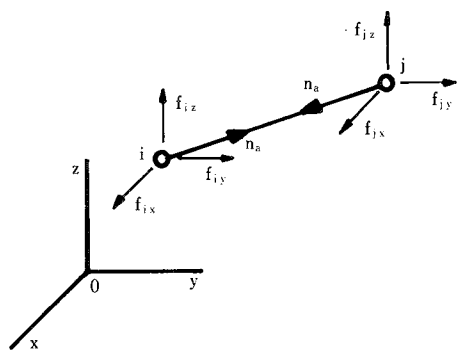


図-3 : 軸力と節点力

ここで、上式を証明しておく。証明中は添字 a を省略する。

1)  $u_n^* \geq 0, u_n \geq 0$  の場合

$$(9), (10) \text{ 式より, } \underline{u}_n^* = u_n^*, \underline{u}_n = 0, \overline{u}_n = u_n,$$

$\underline{u}_n = 0$  が成立する。これらの関係を(6)式に代入する

と、

$$N = k \cdot \underline{u}_n \text{ となる。}$$

両辺に  $(\underline{u}_n^* - \underline{u}_n) \equiv (u_n^* - u_n)$  を掛ける

$$k \cdot (\underline{u}_n) \cdot (\underline{u}_n^* - \underline{u}_n) = N \cdot (u_n^* - u_n) \quad (12)$$

となり、(11)式の等号が成立する。

2)  $u_n^* < 0, u_n \geq 0$  の場合

$$(9), (10) \text{ 式より, } \underline{u}_n^* = 0, \underline{u}_n^* = -u_n^*, \overline{u}_n = u_n, \underline{u}_n = 0 \text{ と}$$

なる。よって、(6)式より  $N = k \cdot \underline{u}_n$  が成立する。こ

のとき、 $N \cdot (u_n^* - u_n) - k \cdot \underline{u}_n \cdot (\underline{u}_n^* - \underline{u}_n) = k \cdot \underline{u}_n \cdot (u_n^*$

$$- u_n) - k \cdot \underline{u}_n \cdot (\underline{u}_n^* - \underline{u}_n) = -k \cdot \underline{u}_n \cdot \underline{u}_n^* \leq 0 \text{ となる。}$$

故に、

$$k \cdot (\underline{u}_n) \cdot (\underline{u}_n^* - \underline{u}_n) \geq N \cdot (u_n^* - u_n) \quad (13)$$

上式は(11)式に一致している。

3)  $u_n < 0$  の場合

$$(9), (10) \text{ 式より } \underline{u}_n = 0 \text{ となる。よって、} k \cdot \underline{u}_n = 0$$

および  $N = 0$  が成立する。故に、

$$k \cdot \underline{u}_n \cdot (\underline{u}_n^* - \underline{u}_n) = N \cdot (u_n^* - u_n) \quad (14)$$

となり、(11)式の等号が成立する。

(11) 式を(7)式へ代入することにより仮想仕事式を示す変分不等式を得る。つまり、

$$\sum_a k_a \cdot (\underline{u}_n)_a \cdot (u_n^* - u_n)_a - \sum_i \mathbf{f}_i (\mathbf{u}_i^* - \mathbf{u}_i) \geq 0 \quad (15)$$

以上より、(5), (6) 式を付帯条件とする仮想仕事式は、付帯条件無しの変分不等式、つまり、(15) 式、に変換された。

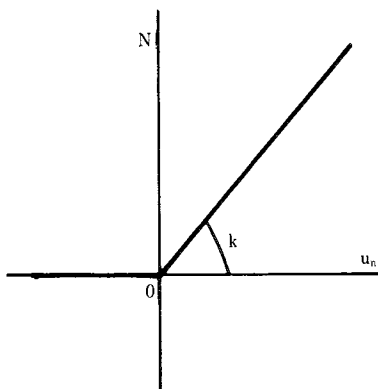


図-4 : 軸力・伸び関係

研 究 速 報

3. ポテンシャル関数と最小化

図-4 に示す軸力・伸び関係を示す片側応力問題に対するポテンシャル関数として次式を採用する。

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_a k_a \cdot (u_n)_a^2 - \sum_i f_i u_i \quad (16)$$

このとき、片側応力問題の解は(16)式のポテンシャル関数を最小化する値として得られる。以下、このことを示す。

許容変位と許容伸びによるポテンシャル関数を  $\Pi^*$  とすると、

$$\Pi^* - \Pi = \frac{1}{2} \sum_a k_a \cdot \{ (u_n^*)_a^2 - (u_n)_a^2 \} - \sum_i f_i (u_i^* - u_i) \quad (17)$$

ここで、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} k_a \cdot \{ (u_n^*)_a^2 - (u_n)_a^2 \} - k_a \cdot (u_n)_a \cdot \{ (u_n^*)_a - (u_n)_a \} \\ &= \frac{1}{2} k_a \cdot \{ (u_n^*)_a - (u_n)_a \}^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (18)$$

が成立するから、上式を(17)式へ代入すると、

$$\begin{aligned} \Pi^* - \Pi &\geq \sum_a k_a \cdot (u_n)_a \cdot \{ (u_n^*)_a - (u_n)_a \} \\ &\quad - \sum_i f_i (u_i^* - u_i) \end{aligned} \quad (19)$$

(19)式の右辺は(15)式に一致しているから

$$\Pi^* \geq \Pi \quad (20)$$

故に、解  $(u_i)$  は(16)式で導入したポテンシャル関数を最小化する値として得られる。

(9)式を(16)式へ代入することにより、

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_a k_a \cdot \left\{ \frac{(u_n)_a + |(u_n)_a|}{2} \right\}^2 - \sum_i f_i u_i \quad (21)$$

また、微小変位の範囲においては、(4)式を代入することにより、

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \sum_a k_a \cdot \left\{ \frac{{}^i\lambda_a(u_j - u_i)_a + |{}^i\lambda_a(u_j - u_i)_a|}{2} \right\}^2 \\ &\quad - \sum_i f_i u_i \end{aligned} \quad (22)$$

ここで、次の記号を導入する。

$$\text{sgn}({}^i\lambda(u_j - u_i)) = \begin{cases} 1 : {}^i\lambda(u_j - u_i) \geq 0 \text{ の場合} \\ -1 : {}^i\lambda(u_j - u_i) < 0 \text{ の場合} \end{cases} \quad (23)$$

この記号を用いると、(22)式は次式となる。

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \sum_a \frac{1 + \text{sgn}({}^i\lambda_a(u_j - u_i)_a)}{2} k_a [{}^i\lambda_a(u_j - u_i)_a]^2 \\ &\quad - \sum_i f_i u_i \end{aligned} \quad (24)$$

4. 荷重・変位関係式

(24)式で与えられるポテンシャル関数には付帯条件は付いていないので、荷重・変位関係式は  $\delta\Pi = 0$  より求め

ることができる。j 節点の荷重・変位関係式は

$$\sum_a \frac{1 + \text{sgn}({}^i\lambda_a(u_j - u_i)_a)}{2} k_a {}^i\lambda_a (u_j - u_i)_a = f_j \quad (25)$$

ここに、a は j 節点に集まる部材を意味している。上式的具体例は文献 5) に示してある。

(25)式は sgn 記号を含んでおり、非線形方程式となっている。そのため、数値解法には繰り返し計算を含む近似解法が用いられる。(25)式の代わりに、付帯条件付きの次式を利用する機会が多い。

$$\sum_a k_a {}^i\lambda_a (u_j - u_i)_a = f_j \quad (26)$$

ただし、 ${}^i\lambda_a(u_j - u_i)_a < 0$  のとき  $k_a = 0$

圧縮力が作用する場合、応力伝達がおこなわれない、つまり、 $N_a = 0$  を  $k_a = 0$  で置き換えていることになる。

(25)、(26)式のどちらを用いても数値結果は一致することになる。別の見方をすると、本論文において、付帯条件無し基礎方程式が導かれたことになる(部材 a の断面積、ヤング率、部材長を  $A_a$ 、 $E_a$ 、 $l_a$  とするとき、 $k_a = E_a A_a / l_a$  である。部材性状より  $E_a \neq 0$ 、 $A_a \neq 0$  であるから  $k_a \neq 0$ 。つまり、(26)式は物理的意味の上からは正しい式ではない)。

5. 連続体への適用

前節までは直線部材両端の変位を未知量とすることにより、離散的に表現した場合を扱った。本節では、ケーブル部材を 1 次元弾性体とした場合を考察する。ここでは最も単純な例として、等断面 (A で表示) を有し、直線的に配置した 1 次元弾性体を採用する。座標系として 0-x 座標系を用い、変位、ひずみ、応力、体積力を  $u$ 、 $\epsilon$ 、 $\sigma$ 、 $\bar{X}$  で表示する。応力・ひずみ関係式としては、(5)、(6)式に対応して次式とする。

$$\epsilon < 0 \quad ; \quad \sigma = 0 \quad (27)$$

$$\epsilon \geq 0 \quad ; \quad \sigma = E\epsilon \quad (28)$$

許容変位と許容ひずみを  $u^*$ 、 $\epsilon^*$  とし、解を  $u$ 、 $\epsilon$  とすると、(27)、(28)式を付帯条件として仮想仕事式は次式となる。

$$\begin{aligned} \delta W &= \int_0^l \sigma_x (\epsilon_x^* - \epsilon_x) A dx - \int_0^l \bar{X} (u^* - u) A dx \\ &\quad - [\bar{F}(u^* - u)]_0^l = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

ここに、 $\bar{F}$  は境界断面に作用している断面力である。次に、(29)式を変分不等式に変換する。ひずみ  $\epsilon_x$  を次式のように分解する。

$$\epsilon_x = \epsilon_x^+ - \epsilon_x^- \quad (30)$$

ここに、

$$\epsilon_x^+ = \frac{1}{2} (\epsilon_x + |\epsilon_x|) \geq 0, \quad \epsilon_x^- = \frac{1}{2} (-\epsilon_x + |\epsilon_x|) \geq 0 \quad (31)$$

研 究 速 報

このとき、次式の不等式が成立する。

$$E \varepsilon_x (\varepsilon_x^* - \varepsilon_x) \geq \sigma_x (\varepsilon_x^* - \varepsilon_x) \quad (32)$$

証明は(12)~(14)式と同様である。上式を(29)式へ代入することにより次の変分不等式を得る。

$$EA \int_0^1 \varepsilon_x (\varepsilon_x^* - \varepsilon_x) dx - \bar{N} \int_0^1 (u^* - u) dx - [\bar{F}(u^* - u)]_0 \geq 0 \quad (33)$$

ここに、 $\bar{N} = A \bar{X}$ 。以上より、付帯条件付きの仮想仕事式((29)式)は付帯条件無しの変分不等式((33)式)に変換された。

(27)、(28)式で与えられる1次元弾性体の片側応力問題に対するポテンシャル関数として次式を採用する。

$$\Pi = \frac{EA}{2} \int_0^1 (\varepsilon_x)^2 dx - \int_0^1 \bar{N} u dx - [\bar{F}u]_0 \quad (34)$$

このとき、解は(36)式のポテンシャル関数を最小化する値として得られる。証明は3節で述べた方法と同様である。微小変位の範囲においては  $\varepsilon_x = \frac{du}{dx}$  が成立するから

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2} \left( \frac{du}{dx} + \left| \frac{du}{dx} \right| \right) = \frac{1 + \operatorname{sgn} \left( \frac{du}{dx} \right)}{2} \frac{du}{dx} \quad (35)$$

上式を(34)式へ代入すると

$$\Pi(u) = \frac{EA}{4} \left\{ 1 + \operatorname{sgn} \left( \frac{du}{dx} \right) \right\} \int_0^1 \left( \frac{du}{dx} \right)^2 dx - \int_0^1 \bar{N} u dx - [\bar{F}u]_0 \quad (36)$$

第1変分を求め、荷重・変位関係式を求めると次式となる。

$$\frac{EA}{2} \left\{ 1 + \operatorname{sgn} \left( \frac{du}{dx} \right) \right\} \frac{d^2 u}{dx^2} + \bar{N} = 0 \quad (37)$$

なお、応力境界条件として次式が得られる。

$$\frac{EA}{2} \left\{ 1 + \operatorname{sgn} \left( \frac{du}{dx} \right) \right\} \frac{du}{dx} - \bar{F} = 0 \quad (38)$$

6. お わ り に

1次元片側応力システムとしてケーブル構造を採用し、「たるみ」を考慮に入れた基礎方程式の誘導を試みた。圧縮応力時には応力伝達がおこなわれないことを付帯条件とする仮想仕事式を変分不等式へ変換し、この変分不等式を利用して、片側応力問題に対するポテンシャル関数を導入した。解はこのポテンシャル関数を最小とすることにより求まる。このポテンシャル関数は非線形であるが付帯条件は無い。そのため、繰り返し手法を容易に適用することが可能となる。さらに、このポテンシャル関数より荷重・変位関数式を導き、得られた式を基に、通常利用している式の位置づけをおこなった。本論文で述べた方法は2次元弾性体への拡張も可能である。

最後に、本所における「理工学における非線形現象の数理解析研究会」を始め、種々の機会に御教示をたまわった川井忠彦教授に御礼申し上げます。

(1986年5月6日受理)

参 考 文 献

- 1) 半谷裕彦, “大スパン構造の安定問題と大変形問題”, 第34回応用力学連合講演論文抄録集, pp.33-38, 1984.
- 2) Panagiotopoulos, P.D., “A Nonlinear Programming Approach to the Unilateral Contact-, and Friction-boundary Value Problem in the Theory of Elasticity, Ingenieur-Archiv, 44, pp. 421-432, 1975.
- 3) Endo, T., Oden, J.T., Becker, E.B. and Miller, T., “A Numerical Analysis of Contact and Limit Point Behaviour in a class of Problems of Finite Elastic Deformation, Computers & Structures, 18, pp. 899-910, 1984.
- 4) Panagiotopoulos, P.D., “A Variational Inequality Approach to the Inelastic stress-Unilateral Analysis of Cable-Structures, Computers & Structures, 6, pp. 133-139, 1976.
- 5) 半谷裕彦, “片側応力問題の変分不等式による定式化, 日本建築学会大会学術講演梗概集, 1986.