研　究　速　報
特 集 10
UDC 624.042.7

# ランダム非定常外乱を受ける非線形振動系へのエネルギー入力

Energy Input to Non-linear Oscillators Subjected to Non-stationary Random Excitations

大 井 謙 一*・高 梨 晃 一*
Kenichi OHI and Koichi TAKANASHI

## 1．は じ め に

建築構造物の耐震設計は現在二段構えで行うことが常識となっている．すなわち，建物がその使用期間中に一度は遭遇するような中程度の地震に対しては，その機能に支障がないように(機能限界状態設計)，また極めて稀な工学的に最大級の地震に対しては倒壊しないように設計する（終局限界状態設計）というものである．

機能限界状態設計では，地震動に対する線形応答によって構造体に生じる応力や変形が荷重効果として採用され，これらが降伏応力や機能に支障の生じる変形限界を超えるかどうかが問題にされる．

一方終局限界状態設計については，近年になって構造物の抵抗能力を弾塑性範囲にわたるエネルギー吸収能力とみなす考え方が普及していることから，荷重効果のほうも地震動が構造物に対して行う仕事量 $E_I$ (エネルギー入力)の形で表しておくのが合理的であると考えられる．もちろん，エネルギー吸収量だけで完全に構造物の倒壊あるいは破壊の判定を行えるものではないが，エネルギー入力 $E_I$ の基本的な統計量が分かっていると，さらに詳細な弾塑性応答過程を特徴づける際にも参考になる．

本報では，確定履歴振動系が非定常ランダム地動を受けて非線形ランダム応答を行う場合のエネルギー入力について，その期待値・分散を簡単に評価する手法を紹介する．

## 2．線形系へのエネルギー入力

まず，線形系へのエネルギー入力の統計量評価について記述する．一自由度構造物系の場合，$E_I$ は質点に働く有効外力 (D'Alembertの力) が地面に対する相対座標系で行う仕事として定義される．

$$E_I=-\mathrm{m}\int_{-\infty}^{\infty}\ddot{y}(t)\dot{x}(t)dt \quad (1)$$

ここで，$m$：質量

$\ddot{y}(t)$：地動加速度

$\dot{x}(t)$：相対速度応答　　である．

Fourier変換におけるPlancherelの定理を利用して，(1)式を周波数領域表示にすれば次式が得られる．

$$E_I=\int_{-\infty}^{\infty}W(\omega)|\ddot{Y}(\omega)|^2d\omega \quad (2)$$

ただし，$W(\omega)=-(m/2\pi)\mathrm{Real}[H(\omega)]$　　(3)

ここで，$\ddot{Y}(\omega)$：$\ddot{y}(t)$のFourier変換

$H(\omega)$：周波数速度応答関数　　である．

なお，ここでは次のようなFourier変換・逆変換式を使用している．

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt \quad (4)$$

$$f(t)=(1/2\pi)\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega \quad (5)$$

ここで，$\omega$：角周波数　$j$：虚数単位　$\pi$：円周率

$e$：自然対数の底　　である．

(2)式は地動加速度のFourier自乗振幅スペクトル（エネルギー・スペクトル）を，関数 $W(\omega)$ を用いて重みづけ積分することによって，構造物系へのエネルギー入力が得られることを意味している（図1）．

重みづけ関数 $W(\omega)$ は，地動加速度自体のエネルギーの，どの周波数成分が構造物へのエネルギー入力に寄与するかを規定する関数であり，構造物の「エネルギー・アドミッタンス」と呼んでいる．

粘性減衰弾性系の場合 $W(\omega)$ は次式で与えられる．

$$W(\omega)=\frac{mh\omega_0\,\omega^2}{\pi[(\omega_0^2-\omega^2)^2+4h^2\omega_0^2\omega^2]} \quad (6)$$

ここで，$\omega_0$：無減衰固有円振動数

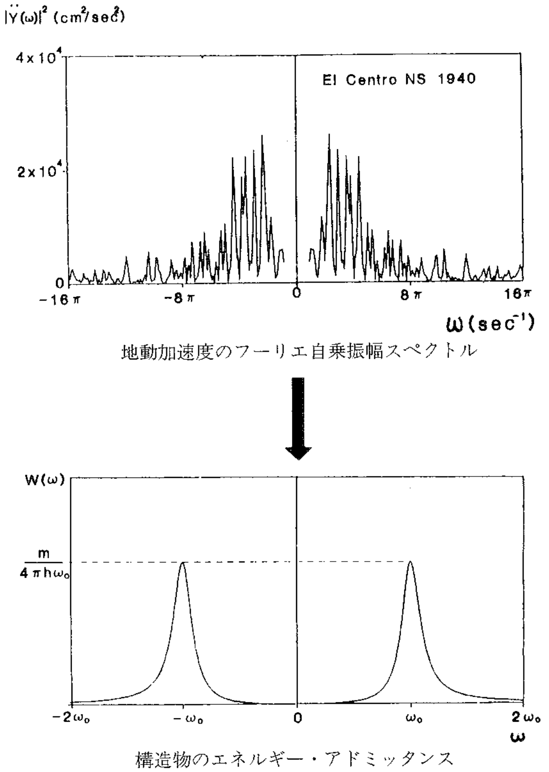
$h$　：減衰定数　　である．

構造物は確定，地動はランダムとして，(2)式の期待値・分散を取れば，次式が得られる．

$$E[E_I]=\int_{-\infty}^{\infty}W(\omega)E[|\ddot{Y}(\omega)|^2]d\omega \quad (7)$$

$$V[E_I]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}W(\omega_1)W(\omega_2)\,CV_{|\ddot{Y}|^2}(\omega_1,\ \omega_2)d\omega_1\,d\omega_2 \quad (8)$$

*東京大学生産技術研究所　第5部




$$E_I = \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega)\, |\ddot{Y}(\omega)|^2\, d\omega$$

構造物へのエネルギー入力

図1　エネルギー・アドミッタンスの概念

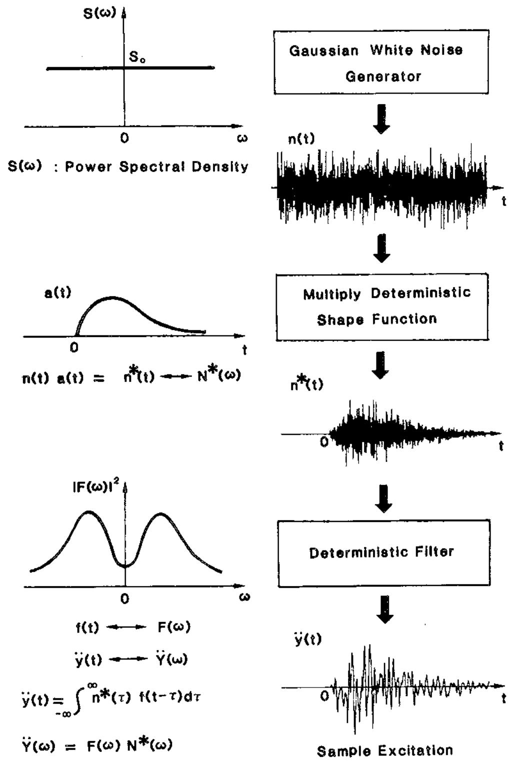



図2　非定常・非白色ランダム地動のモデル

ここで，$E$ [ ]：期待値，$V$ [ ]：分散を意味し，$CV_{|\ddot{Y}|^2}(\omega_1, \omega_2)$は，2つの振動数に対する地動のFourier自乗振幅の共分散関数を意味する．

地動のモデルとして，確定形状関数 $a(t)$ によって非定常化されたガウシアン・ホワイトノイズを確定線形フィルター（伝達関数 $F(\omega)$）に通したランダム過程（図2）を採用した場合，粘性減衰弾性系へのエネルギー入力の期待値・変動係数を評価した例を表1，表2に示している．表1および表2の諸式は，具体的な形状関数およびフィルターの形に対して(7)および(8)式を留数定理によって評価したものである．

表1の $D$ の場合は，フィルターを考慮しない場合の期待エネルギー入力であるが，振動系の固有円振動数や減衰定数には依存しないことがわかる．この事実は，ホワイトノイズに対する定常応答の場合について，Dean Karnopp[1]によって示されており，履歴振動系の等価線形化解法の一つであるパワーバランス法の理論的根拠となっている．ここでは，形状関数による非定常化を施しても，(1)式で定義されるエネルギー入力を取り扱う限り，その期待値は，振動系の特性としては質量のみに依存することが分かる．

また，表2は，フィルターを考慮しない場合の変動係数の厳密解であるが，通常フィルターは周波数に対してゆっくりと変化する関数が仮定されることが多いので，フィルターを考慮する場合にも表2の式が準用できる[2]．

### 3. 非線形振動系へのエネルギー入力

非線形振動系，特に履歴振動系の応答を等価な線形系の応答で近似する手法は古くから数多く研究されている．特に速度応答に関しては，振動中心の移動などが変位応答に比べて少ないため，かなり粗い等価線形化を行っても，低次の統計量であれば良好に推定できる．等価剛性，等価減衰などの等価線形パラメータが決定できれば，それを前節で述べた線形系の解に単に代入するこ

表1　粘性減衰弾性系への期待エネルギー入力

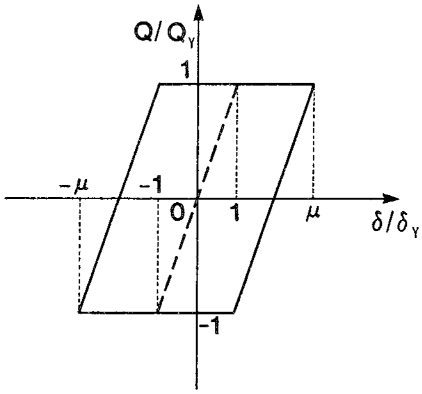
| CODE | $\lvert F(\omega)\rvert^2$ | $E[E_I] \Big/ \left[ m\,\pi\,So \cdot \int_{-\infty}^{\infty} [a(t)]^2\,dt \right]$ |
|---|---|---|
| A | $\dfrac{\omega_g{}^4}{(\omega_g{}^2-\omega^2)^2+4h_g{}^2\omega_g{}^2\omega^2}$ | $\dfrac{\omega_g{}^3(\omega oh+\omega_g h_g)}{h_g\,[(\omega_g{}^2-\omega o^2)^2+4\omega_g\omega oh_g h(\omega o^2+\omega_g{}^2)+4\omega_g{}^2\omega o^2(h_g{}^2+h^2)]}$ |
| B | $\dfrac{\omega_g{}^4+4h_g{}^2\omega_g{}^2\omega^2}{(\omega_g{}^2-\omega^2)^2+4h_g{}^2\omega_g{}^2\omega^2}$ | $\dfrac{\omega_g{}^2[\omega_g(\omega oh+\omega_g h_g)+4\omega oh_g{}^2(\omega oh_g+\omega_g h)]}{h_g\,[(\omega_g{}^2-\omega o^2)^2+4\omega_g\omega oh_g h(\omega o^2+\omega_g{}^2)+4\omega_g{}^2\omega o^2(h_g{}^2+h^2)]}$ |
| C | $\dfrac{\alpha\,\omega_g(\alpha^2+\omega_g{}^2+\omega^2)}{(\alpha^2+\omega_g{}^2-\omega^2)^2+4\alpha^2\omega^2}$ | $\dfrac{\omega_g[\alpha(\omega_g{}^2+\alpha^2+\omega o^2)+2\omega oh(\alpha^2+\omega_g{}^2)]}{(\alpha^2+\omega_g{}^2-\omega o^2)^2+4\omega o(\alpha+\omega oh)[\alpha\omega o+h(\alpha^2+\omega_g{}^2)]}$ |
| D | 1　(No filter) | 1 |

$F(\omega)$：フィルターの伝達関数　$m$：振動系の質量　　$\omega_g$, $h_g$, $\alpha$：フィルターのパラメータ
$S_0$：ホワイトノイズのパワースペクトル密度　　$\omega_0$：振動系の非減衰固有円振動数
$a(t)$：非定常性を表わす形状関数　　$h$：振動系の減衰定数

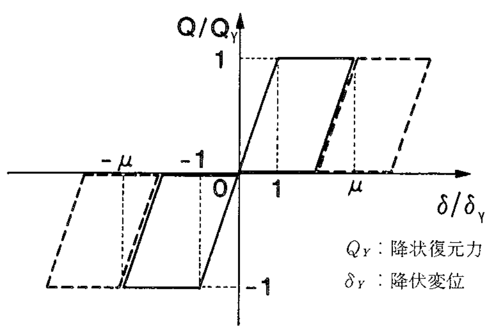
表2　粘性減衰弾性系へのエネルギー入力の変動係数

| CODE | a(t) | c.o.v.$[E_I]$　$\left(\sqrt{V[E_I]}\,/\,E[E_I]\right)$ |
|---|---|---|
| I | $a_1 \cdot t\,e^{-ct}$ | Square root of $\dfrac{c}{8(1-h^2)} \cdot \left[ \dfrac{8c^2+9c\omega oh+3\omega o^2h^2}{(c+\omega oh)^3} + \dfrac{7c^5(1-2h^2)+c^3[c(1-2h^2)+\omega oh](c+2\omega oh)-\omega oh(3\omega o^2+8c^2+6ch\omega o)\cdot(2ch+\omega o)^2}{(c^2+\omega o^2+2c\omega oh)^3} \right]$ |
| II | $a_2 \cdot e^{-ct}$ | $\sqrt{\dfrac{c}{1-h^2} \cdot \left[ \dfrac{1}{c+\omega oh} + \dfrac{c(1-2h^2)-\omega oh}{c^2+\omega o^2+2c\omega oh} \right]}$ |

$a_1$, $a_2$, $c$：形状関数 $a(t)$ のパラメータ

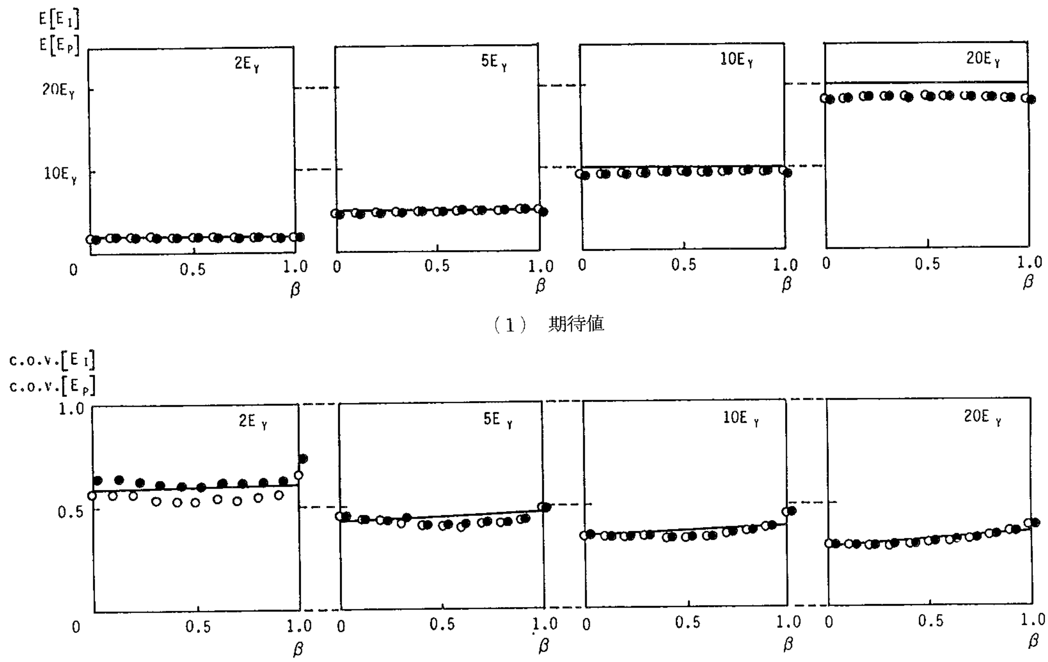



（1）　完全弾塑性型要素




（2）　進行スリップ型要素

図3　解析に用いた並列型非線形ばねの構成要素




（1） 期待値

（2） 変動係数

○ : $E_I$ の統計量（シミュレーション）

● : $E_P$ の統計量（シミュレーション）

—— : $E_I$ の統計量の予測値

$E_I$ : エネルギー入力

$E_P$ : 塑性エネルギー吸収量（$E_I$ から残留振動エネルギーを除いたもの）

$E_Y$ : 降伏エネルギー$=Q_Y\,\delta_Y$

$\beta$ : 進行スリップ型要素の強度分担率

図4　非線形振動系へのエネルギー入力の等価線形化による予測

とによって，エネルギー入力の期待値・分散が近似的に評価できる．

図4では，一例として，完全弾塑性ばねと進行スリップ型ばね（図3）との並列型非線形ばねを有する1自由度振動系が，表2におけるII型形状関数で非定常化されたホワイトノイズを受けた場合のエネルギー入力について，その期待値・変動係数を等価線形化法で求め（実線），標本数各400のシミュレーション結果（○）と比較している．ここでは，等価剛性は弾性剛性とし，等価線形パラメータと関係なく定まる1周期当たりの期待エネルギー散逸量から等価減衰を評価した．塑性化が大きくなるほど，また進行スリップ型ばねの寄与$\beta$が小さくなるほど，エネルギー入力のばらつきが小さくなるという定性的性質はもちろんのこと，定量的にも十分に等価線形予測とシミュレーション結果は一致している．

## 4. ま と め

確定履歴振動系が非定常ランダム地動を受けて非線形応答を行う場合のエネルギー入力について，その期待値・分散を近似的に評価する手法を紹介した．本手法は，履歴吸収エネルギーにある限界が存在するような構造物に対して，その耐震信頼性を簡便に評価するために利用することができる．

（1986年5月2日受理）

## 参 考 文 献

1) Dean Karnopp: "Power Balance Method for Non-linear Random Vibration," ASME, Mar. 1967.

2) 大井，田中，高梨：「地震動による構造物へのエネルギー入力の統計量予測に関する基礎的考察」，日本建築学会構造系論文報告集，第347号，1985年1月．