

修士論文

雲粒子成長モデリングにおける
統計的手法の導入に関する研究

佐藤 陽祐

東京大学大学院理学系研究科

地球惑星科学専攻

大気海洋科学大講座

平成20年2月28日

要旨

本研究では、東—東南アジアからオーストラリア、西部太平洋のミクロネシア域での降水粒子生成システムに関するビン法雲モデルを用いた数値実験を行った。この中で複数の地域を対象とした多数の実験を行うために、計算効率向上を目的としてビン法スキームに統計的手法の導入を行った。

ビン法雲モデルでは、凝結成長過程と衝突併合過程で非常に多くの計算時間が求められるため、両者の計算効率を向上させることでモデル全体の計算時間を大幅に減少させることが期待される。衝突併合過程に関しては、モンテカルロ法を基にした統計的手法を適用し、計算コストを従来の 10%程度までに削減することができた。このモデルは乱数を使うという性質上、乱数の初期値に計算結果が依存して異なる。しかしながら、この乱数の初期値による計算結果への影響はモデルの力学場の初期値等に起因する影響に比べると遥かに小さく、雲解像モデルとして利用するにあたっては問題にならない結論を得た。凝結成長過程に関しては、移流方程式に陰解法を適用することにより計算効率の向上を図った。その結果、凝結成長過程の計算コストを従来の 35%程度まで削減できた。ただし、計算のタイムステップ(dt)を大きくした場合に計算精度が著しく低下するという問題が残った。

*Takahashi and Keenan(2004)*によれば、東—東南アジアからオーストラリア、ミクロネシア域ではビデオゾンデの観測から降水粒子形成プロセスに関して、Warm frozen-drop rain Process と Graupel growth Process と呼称する 2つのプロセスによって降水粒子が形成される。そしてどちらのプロセスを介して生成された降水粒子が支配的であるかが地域によって異なることが報告されている (*Takahashi, 2006*)。モデルの実験結果から、降水粒子生成に関して Graupel growth Process が支配的になるために重要な要因の 1つは下層の湿度が低く、乾燥していることであり、また Warm frozen-drop rain Process が支配的になるために重要な要因の 1つは雲凝結核(CCN)として大粒子エアロゾル ($\sim 1[\mu\text{m}]$) が存在していることであると示唆された。

Abstract

We have performed numerical experiments using the bin cloud microphysics to investigate the precipitation mechanism over the regions from east and southeast Asia to Australia and Micronesia. New algorithms were implemented into the bin cloud microphysics to improve the computational efficiency of the model.

The computations of condensation and collision-coagulation growths are the “hot spots” of the bin cloud microphysics, that is, where a great deal of CPU time is taken. Thus the improvement of efficiency to compute these processes can significantly reduce the whole computational time. A new stochastic algorithm was implemented into the computation of collision-coagulation growth, so that the decrease in CPU time was about 90 %. Note that the simulated result depends on the initial selection of random numbers in the new scheme. We verified that the error range of the result using the new scheme is within less than that caused by initial condition of dynamics. An implicit method was newly implemented to solve the advection equation in the computation of condensation growth. As a result, about 65 % of the CPU time has been cut though the precision of computation become significantly wrong when using a large time-step interval.

Takahashi and Keenan (2004) suggested two growth modes, graupel growth and warm rain-frozen drop modes, in the precipitation mechanism over the regions from east and southeast Asia to Australia, and Micronesia. The dominant growth modes are different in these regions (*Takahashi, 2006*). Our simulated results showed that low humidity in the lower layer is important for the development of the graupel growth mode. On the other hand, giant aerosols whose radii are larger than 1 μm have an effect to develop the warm rain-frozen drop mode.

目次

1、序論.....	5
1-1、雲の放射特性と微物理構造.....	5
1-2、大気中のエアロゾルとエアロゾルが気候に及ぼす影響.....	6
1-3、雲-エアロゾル相互作用.....	7
1-4、雲微物理モデル.....	9
1-4-1、バルク法モデル	
1-4-2、ビン法モデル	
1-5、本研究の目的.....	11
2、モデルの概要と開発したスキーム.....	12
2-1、雲微物理過程.....	12
2-2、力学過程.....	12
2-3、雲微物理過程の計算コスト.....	14
2-4、本研究で開発した手法（統計的手法）.....	15
2-4-1、従来のビン法モデルでの衝突併合過程の計算法	
2-4-2、統計的手法の導入	
2-4-3、乱数の選択	
3、感度実験と結果.....	19
3-1、0次元ボックスモデルを用いた数値実験.....	19
3-1-1、0次元ボックスモデルの概要と実験設定	
3-1-2、解析解との比較（Golvin-Kernelを用いた場合）	
3-1-3、現実的な Kernel を用いた場合	
3-1-4、衝突併合過程モジュールの計算時間	
3-2、2次元ビンモデルに拡張した結果.....	24
3-2-1、実験設定	
3-2-2、層状の雲を仮定（水雲のみを仮定）した実験の計算結果	
3-2-3、対流性の雲を仮定（氷雲を含む）した実験の計算結果	
3-3、誤差とビンの数の関係.....	39
3-4、3次元領域モデルへの適用.....	41
3-5、考察1（スキームに関して）.....	44
3-5-1、統計的手法と衝突回数	
3-5-2、観測との比較	
3-5-3、統計的な誤差と初期値による誤差	

3-5-4、凝結成長過程のスキーム開発	
3-5-4-1、従来の凝結成長過程の計算方法と本研究で用いた方法	
3-5-4-2、陰解法の計算精度と問題	
3-6、スキーム開発のまとめ.....	57
4、事例解析.....	58
4-1、序論.....	58
4-2、実験設定.....	62
4-3、結果.....	64
4-4、考察2.....	66
4-4-1、降水粒子生成に支配的なプロセス	
4-4-2、本研究で用いたモデルの考察	
4-5、事例解析のまとめ.....	71
5、まとめと今後の課題.....	72
A、付録1（本研究で用いた雲微物理モデルの詳細）.....	74
A-1、核生成過程.....	74
A-2、凝結、蒸発、昇華過程.....	76
A-3、衝突併合過程.....	78
A-4、凍結過程.....	79
A-5、融解過程.....	80
A-6、重力落下および移流過程.....	80
B、付録2.....	81
B-1、スキーム開発に関する過去の事例.....	81
B-1-1、衝突併合過程のスキームについて	
B-1-2、凝結成長過程のスキームについて	
B-1-3、超水滴法	
B-2、移流スキームに関して.....	83
B-3、Kernel 関数に関して.....	84
謝辞.....	86
参考文献.....	87

1、序論

1-1、雲の放射特性と微物理構造

雲は短波放射を反射するため、大気中では地表に到達する太陽放射を減衰させる。同時に、雲は地球からの長波放射を吸収・射出するため、雲より下層の大気を加熱し、反対に雲より上層の大気を冷却する効果があると言われている (Liou, 1992)。また雲はそれ自体が水の一形態であるため、雲粒や雲からできる降水を構成する粒子は相変化に伴う熱の出入りによって大気に熱的な温度変化を与える。加えてその荷重を通して空気塊の鉛直運動の時間変化に深く関係し、それによって雲、大気の力学構造にも大きな影響を及ぼすと言われている (Murakami, 1999)。このように雲は大気中の水循環や放射収支に影響を与えるが、雲は地球表面の 6 割程度を覆っているため、気候形成において重要な役割を担っている。図 1-1 はそれらの効果をまとめた模式図である。

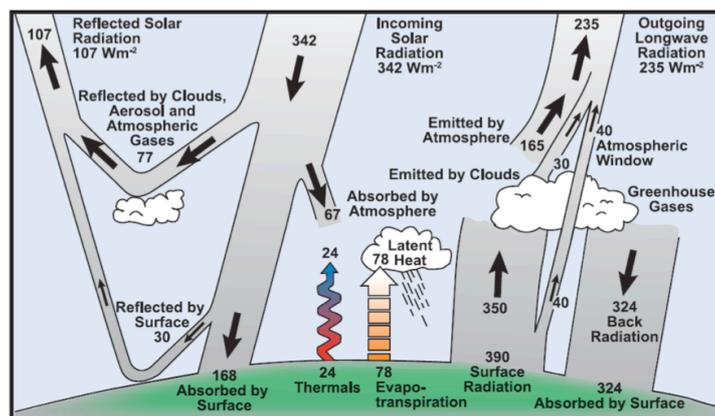


図 1-1 : 地球の放射収支の模式図 (Kiehl and Trenberth, 1997)

雲の放射特性は、光学的厚さや雲粒の粒子半径といった光学的・雲微物理量で決定づけられる。1950 年代からの航空機による観測では、陸上と海上で雲粒のサイズ、数濃度が異なる (Squires, 1958a)。また、衛星によってこれらの物理量を全球規模で観測する試みもなされており、海上の雲粒のサイズが陸上に比べて大きくなっている (Han et al., 1994, Kawamoto et al., 2001)。

この粒子サイズの違いは海上と陸上で大気の力学的構造が異なることに加え、エアロゾルと呼ばれる大気中の微粒子の数が海上と陸上で異なることが関係しており (Squires, 1958b, Twomey and Squires, 1959)、近年の衛星観測からもエアロゾル数濃度と光学的厚さ、雲粒有効半径といった雲の微物理的な物理量に相関関係があることが報告されている (Nakajima et al., 2001)。

1-2、大気中のエアロゾルとエアロゾルが気候に及ぼす影響

エアロゾルは砂漠等の乾燥地域において地表から巻き上げられた土壌粒子、海面のしぶきから生成される海塩粒子、火山噴火によって排出される硫黄粒子、森林火災等により放出されたる黒色炭素粒子や有機炭素粒子、人間活動によって放出される無機（硝酸塩、硫酸塩）および有機系粒子などさまざまな起源が存在し、その化学組成も様々である。

エアロゾルはそれ自体が太陽放射を散乱・吸収することにより、放射収支に影響を及ぼす結果、気候にも影響を及ぼす。産業革命以降、人間活動によって排出される人為起源エアロゾルによって大気中のエアロゾル濃度は増加していると考えられており、自然起源のエアロゾルのみならず、人為起源のエアロゾルも含めて、エアロゾルが気候に及ぼす影響を見積もる試みが成されている（IPCC AR4）。

図1-2はIPCC第4次報告書で作成された全球規模での要因毎の放射強制力の見積もりである。これによると、エアロゾルによる放射強制力は温室効果気体のそれとは逆の効果を示していることに加え、温室効果気体である二酸化炭素、メタンなどと比べてエアロゾルが気候に与える影響に関する理解度は低い（図1-2）。

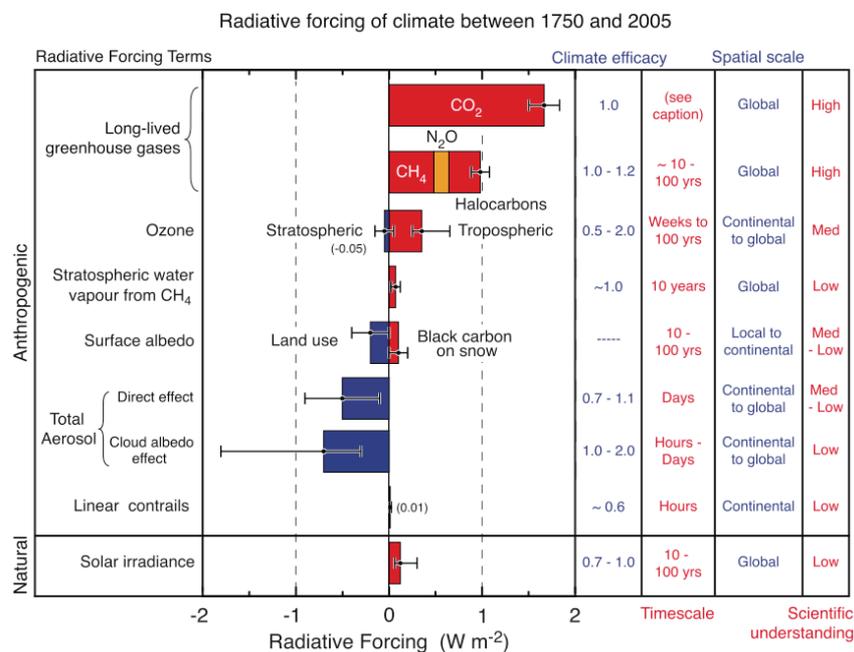


図1-2 : IPCC第4次報告書で作成された、要因ごとの放射強制力の見積もり (IPCC AR4 Chapter 2.)

また図 1-2 のエアロゾルが気候に及ぼす効果は、「直接効果」と「間接効果」の 2 つに分かれている。「直接効果」とはエアロゾル自体が太陽放射を吸収・散乱することにより放射収支に影響を与える効果のことである。間接効果については後述する。

1-3、雲-エアロゾル相互作用

エアロゾル粒子は雲粒が生成する際に雲凝結核 (CCN; Cloud Condensation Nuclei) や氷晶核 (IN; Ice Nuclei) となり、それにより雲の微物理構造を変化させ、雲の放射特性を変化させることで、地球の放射収支に影響を及ぼすと考えられている。このように、エアロゾルが雲を介して間接的に地球の放射収支に及ぼす効果を「間接効果」という。

Twomey(1974)によれば、雲水量をほぼ一定とした時 CCN の増加に伴って、雲粒が増加する結果、雲粒粒子半径を減少させて雲の光学的厚さと反射率を増加させる。この効果は「Twomey 効果」や「第 1 種間接効果」と呼ばれている。

また Albrecht(1989)は、CCN が増加した場合、雲粒粒子半径を減少させることでドリズル (霧粒) の成長を抑制する結果、雲の寿命を延ばし雲水量と雲量を増加させる可能性を指摘した。さらに、雲粒の成長が抑制されることにより、雲粒がより上空まで運ばれ、その結果雲頂が上昇する可能性も示唆された。これらの効果を「寿命効果」や「第 2 種間接効果」と呼ぶ。

またエアロゾル自体が光を吸収して大気を加熱し、その結果として雲の蒸発を促すという効果も考えられている (Ackerman et al., 2000)。これは「準直接効果」と呼ばれる。これらの第 2 種間接効果、準直接効果はフィードバックの結果起こるものであるという理由から IPCC-AR4 では考慮されておらず(図 1-2)、現象の理解には定義の仕方が様々あり、理解が困難である。

図 1-3 は雲とエアロゾルの様々な相互作用を示した模式図である。

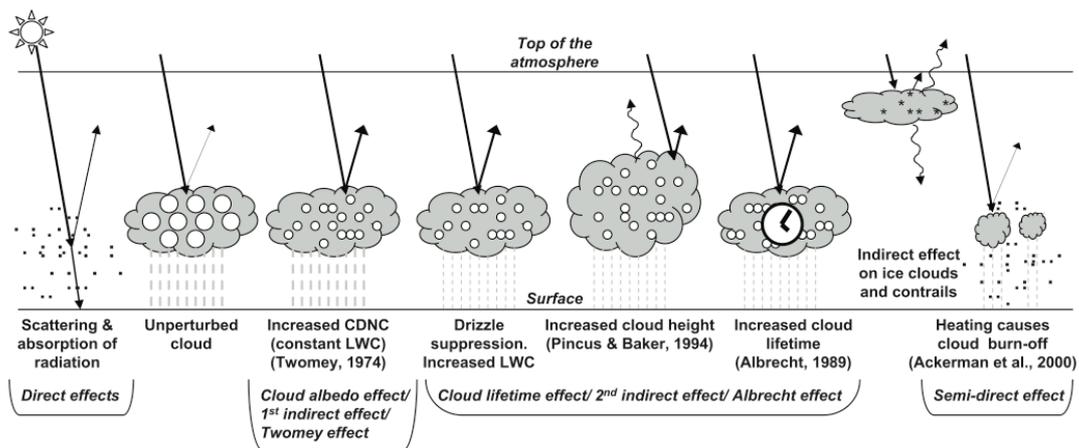


図1-3：エアロゾル-雲相互作用の一覧。黒い粒はエアロゾル粒子、白丸は雲粒子、矢印は太陽放射、波線の矢印は赤外放射をそれぞれ表す。また時計のマークは雲の寿命が延びることを示す（IPCC AR4 Chapter 2.）

図1-3には、左から直接効果、第1種、第2種間接効果、準直接効果が示されている。加えて、第2種間接効果によって雲粒粒子半径が小さくなり、より上層まで雲粒が輸送される結果、雲頂が高くなる効果、上層の巻雲、飛行機雲による効果も記されている。

これらの効果は、全てのエアロゾルで等しく生じるわけではなく、エアロゾル粒子の化学種や粒子サイズによって雲への作用の仕方や程度は異なる。また図1-3の効果は全く別々の効果ではなく、互いに関係した効果である。

例えば、第1種間接効果によって雲粒粒子半径が減少し、降水が抑制されるが、同時に雲粒が小さいと雲頂が上昇し上層で氷粒子が増加する結果、降水量が増加する。つまり、第1種間接効果によって降水が減少する効果も増加する効果も同時に働く可能性がある。

このように雲とエアロゾルの相互作用は非常に複雑であり、雲-エアロゾル相互作用（間接効果）が気候に与える影響を正しく見積もることは非常に難し命題となっている。

前述のように、雲はエアロゾルと相互に作用して、地球の気候に大きな影響を与える。雲-エアロゾル相互作用は雲の微物理構造が変化することによって引き起こされるが、その理解度は低く、気候変動予測の不確定性を生む1つの要因である。

従って信頼にするに足る見積もりを得るには、雲の微物理特性や、エアロゾルが雲の微物理構造に与える影響を正しく見積もることが重要となる。

1-4、雲微物理モデル

現在、雲の微物理特性を予報するために、雲微物理モデルが用いられている。雲微物理モデルでは、図1-4のように雲中に存在する様々なサイズをもつ粒子を、モデル中の全ての格子で粒径分布に変換し、この粒径分布の時間発展を計算することで、雲の成長を計算する。この粒径分布の取り扱い方によって、モデルはバルク法モデルとビン法モデルの2つに大別することができる。

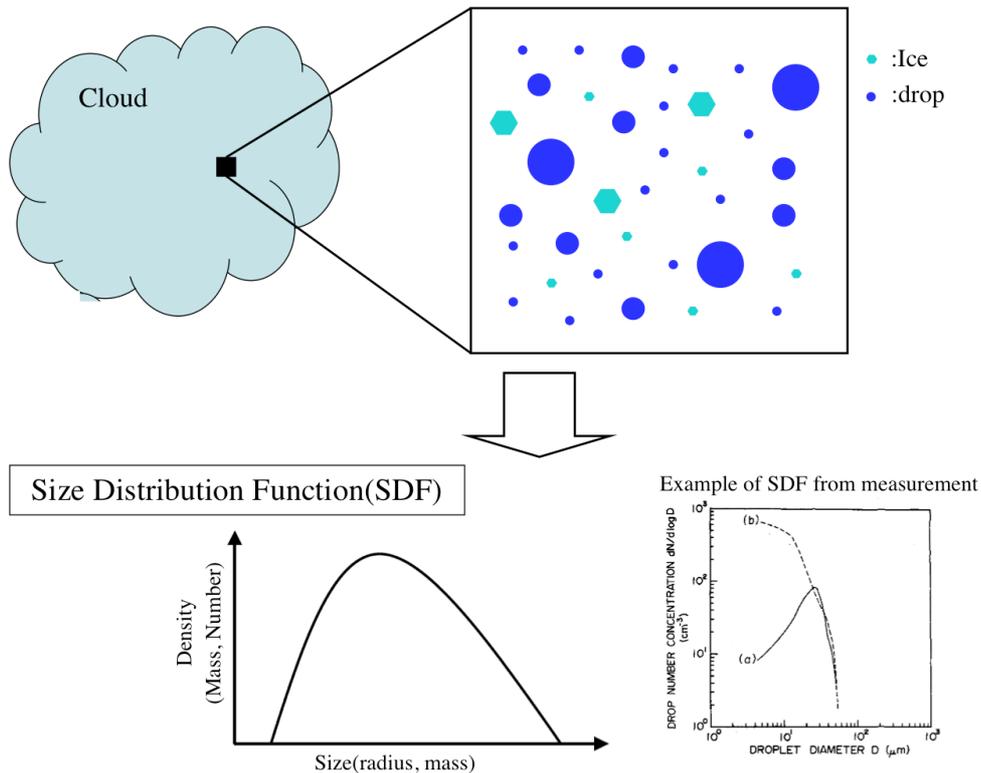


図1-4：雲微物理モデル中での雲の取り扱い方の模式図と粒径分布の観測事例。図のように様々なサイズ、密度の粒子を粒径分布に変換して取り扱う。観測事例は *Hobbs et al.(1980)*

1-4-1、バルク法モデル

バルク法雲モデルは上述の粒径分布を図1-5のように、雲や氷晶粒子の粒径分布を全体としていくつかのモードと呼ばれる等価的な粒径分布に分けて取り扱い、できるだけ少ない予報変数で表現するモデルである。

このモデルの利点は計算コストの少なさであり、現存する全球モデルや、領域モデルのほとんどは、バルクモデルを用いている (*Numaguchi et al., 1995, Saito et al., 2006* など)。その反面、図1-4にある粒径分布を強制的に図1-5のようにいくつかのモードのみに変換してしまうため、粒径の情報を陽に扱うことが

できないという欠点を持つ。そのため雲-エアロゾル相互作用のようなエアロゾルが雲の粒子サイズに与える影響等に関しては、間接的に取り扱うことしかできない。

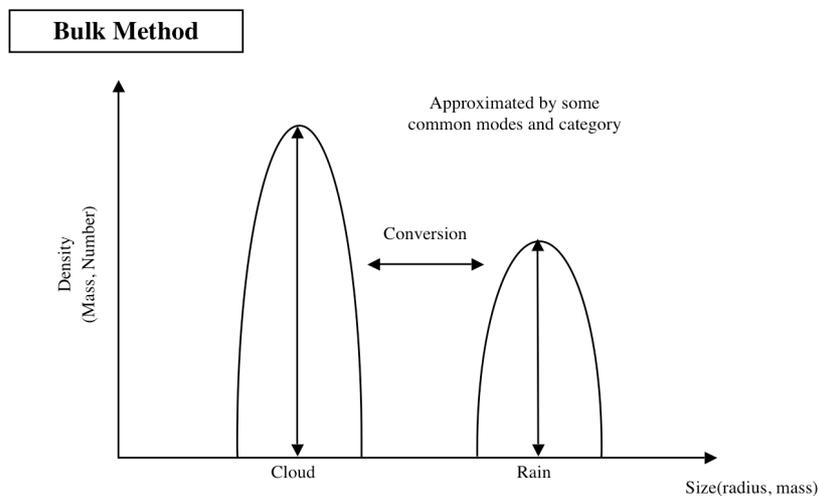


図 1-5 : バルク法モデルでの粒径分布の扱い方。この図の例では雲と雨の 2つのカテゴリに分けて取り扱う

従ってバルク法モデルでは、例えば図 1-6 で表される粒径の情報を直接的に求めることは困難であり、観測データとの比較も困難である。また、後述のように、粒径を直接的に扱わないために、降水に関して現実場との再現性が悪いという報告もある (Lynn et al., 2005b)。

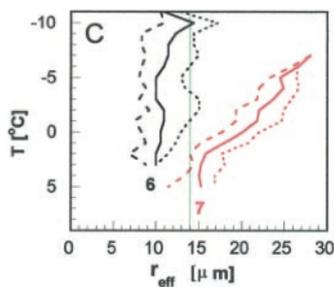


図 1-6 : 衛星観測により得られた層状雲のサイズと高度の関係。横軸は雲粒の有効半径で、雲粒のサイズの指標である。縦軸は気温で、高度の指標である (Rosenfeld, 2000)

1-4-2、ビン法モデル

ビン法モデルは粒径分布関数を図 1-7 のように短冊に離散化した形で表現するモデルであり、粒径分布の短冊のことをビンと呼ぶためにビン法と呼ばれる。このモデルは、雲粒の様々な成長過程を各ビンの濃度変化で表現し、粒径

分布の時間発展を計算する。

このモデルの利点は、粒径の情報を陽に扱えることであり、前述のエアロゾルが雲粒子サイズに与える影響を直接取り扱うことができる。

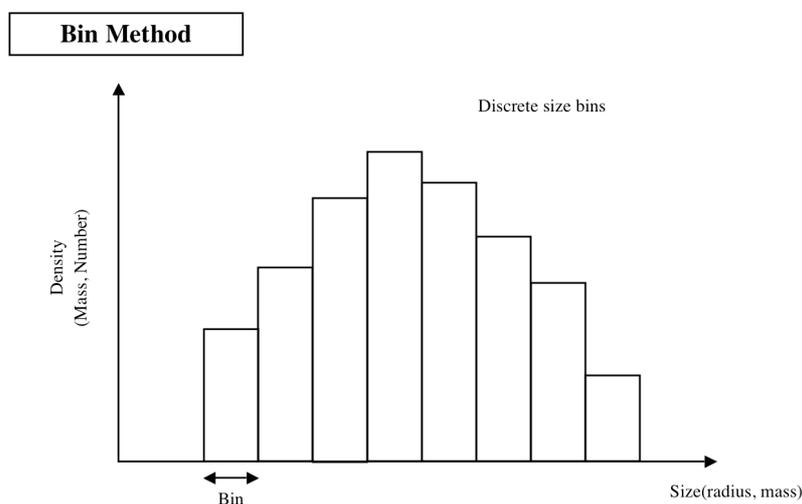


図 1-7 : ビン法モデルでの粒径分布の扱い方

1-5、本研究の目的

以上のように、エアロゾルが雲粒の粒子サイズに影響を及ぼすこと、また放射収支を決める雲の放射特性が雲粒の粒子サイズに大きく依存するということをふまえると、粒子サイズの情報を陽に扱えるビン法モデルを用いて雲-エアロゾル相互作用の影響を見積もることが妥当である。また粒子サイズの情報を陽に扱うことは降水予報の観点からも重要であり、ビン法モデルを用いた場合の方が、層状の雲をより再現できるとの報告もある (Lynn et al, 2005b)。

しかしながら、ビン法はバルク法に比べ非常に多くの予報変数が必要になるため、計算コストが膨大になってしまうという欠点を持つ。そのため、過去の事例では2次元の理想化モデル (Khain and Sednev, 1996、Takahashi and Kawano, 1998、Suzuki, 2004 など) または領域モデル (Lynn et al., 2005a, b、Iguchi et al, 2007) といった空間的に小さな現象を扱うことのみにはしか用いられていない。

以上のような背景から、本研究では従来のビン法モデルより、計算コストの少ないスキームを開発し、開発したスキームを用いて、雲-エアロゾル相互作用に関する事例解析を行うことを本研究の目的とした。

本論文では、2章に使用したモデルの概要と開発したスキームの詳細を、3章にスキーム開発に関する感度実験を、4章に事例解析の詳細を記述する。ま

たスキーム開発に関する過去の研究に関しては付録2(B-1)にまとめた。

2、モデルの概要と開発したスキーム

本研究では2つのモデルを用いた。一方は *Suzuki(2004)* によって開発された2次元非静力学モデルであり、もう一方は *Iguchi et al.(2007)* で開発された、気象庁非静力学モデル (JMA-NHM) (*Saito et al., 2006*) をベースとする3次元非静力学モデルである。これら2つのモデルは共に雲微物理過程では粒径分布を陽に予報するビン法モデルを用いており、共に Hebrew University Cloud Model (*Khain and Sednev, 1996*) をベースにして開発された。ここではその概要を記述する。

2-1、雲微物理過程

Hebrew University Cloud Model (以下 HUCM) では水の凝結物 (以下、粒子) を性質によって代表的な7種類に分類しており、液滴、氷晶3種 (樹枝状、柱状、平板状)、雪片、霰、雹で表現される。これらの粒子種(指標 μ) の各々について、粒径分布関数 f^μ を定義し、その時空間分布を予報する。

本モデルで考慮されている粒径分布に変化を及ぼす過程は、力学過程では移流と重力落下であり、雲微物理過程では核生成、凝結・蒸発・昇華過程、衝突併合過程、凍結・融解過程である。詳細は付録1 (A-1~A-6) に記述する。

2-2、力学過程

Suzuki(2004) のモデルの力学過程の基礎方程式は完全圧縮流体方程式で、(2-1)~(2-7)式で与えられる。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \dots (2-1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \dots (2-2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \dots (2-3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \dots (2-4)$$

$$\frac{\partial(ev)}{\partial y} + \frac{\partial(ew)}{\partial z} = -p \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + S_e \dots (2-5)$$

$$p = \left(\frac{C_p}{C_v} - 1 \right) e \dots (2-6)$$

$$T = e / \rho C_v \dots (2-7)$$

ここで、 u, v, w は風速の x, y, z 成分を、 e は単位体積あたりの内部エネルギーを、 p, T はそれぞれ圧力と気温を表す。

この基礎方程式の数値解法は *Suzuki(2004)* のモデルでは、時間積分を陽解法で行い、座標系はデカルト座標系を用いる。このモデルでは *Stone and Norman(1992)* にもとづいて、風速成分を空間格子の境界で、スカラー量を空間格子の中心に定義するスタガード格子 (図 2-1) を用いる。

密度、内部エネルギー、運動量、および水蒸気の移流については凝結生成物の移流と同じく *van Leer(1977)* のスキームを用いている。また *Suzuki(2004)* のモデルは水平スケールが小さく、数時間程度より短い時間積分を行うことを目的として作られているため、運動方程式中のコリオリ力による項は省略している。なお、境界条件は側面で周期境界条件、上、下端は固定端である。

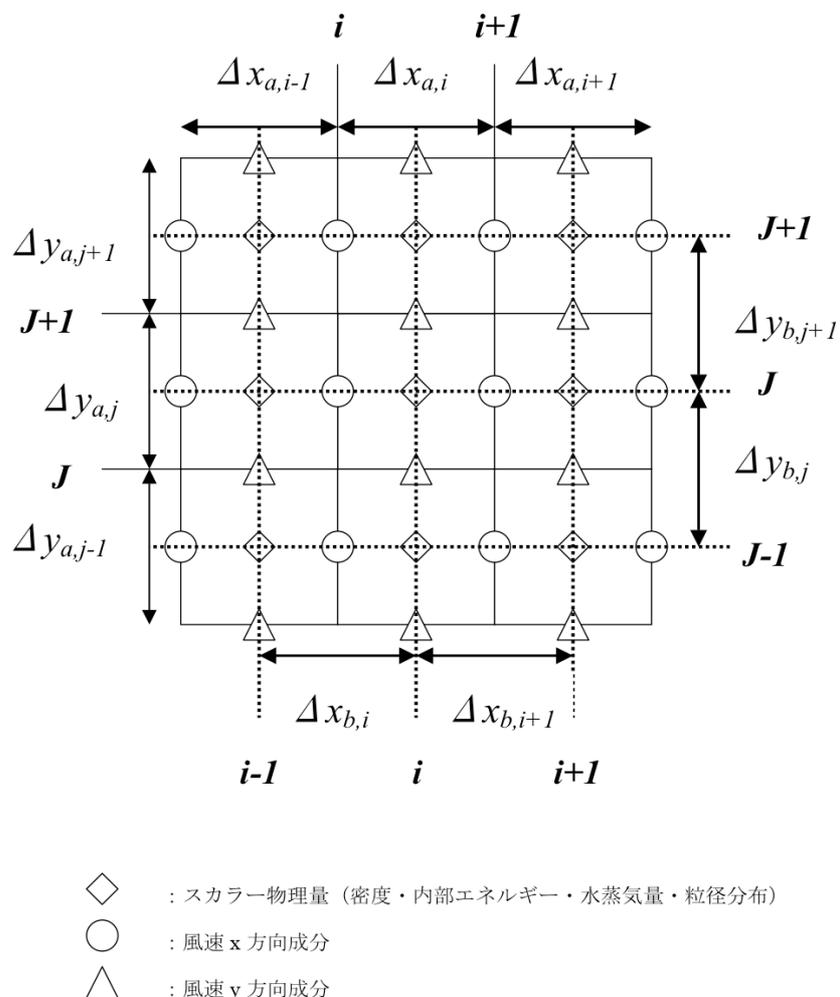


図 2-1 : *Suzuki(2004)* のモデルで用いられているスタガード格子の模式図 (*Suzuki, 2004*)

一方 *Iguchi et al.(2007)* のモデルは、力学過程は JMA-NHM (*Saito et al., 2006*) のものに準拠する。

また本研究で用いた領域モデルの計算領域は、*Iguchi et al.(2007)* の計算領域よりも空間的に小さい領域 (図 2-2) であり、水平解像度は 7[km]、鉛直解像度は 20 層 (上層ほど粗い) で行った。

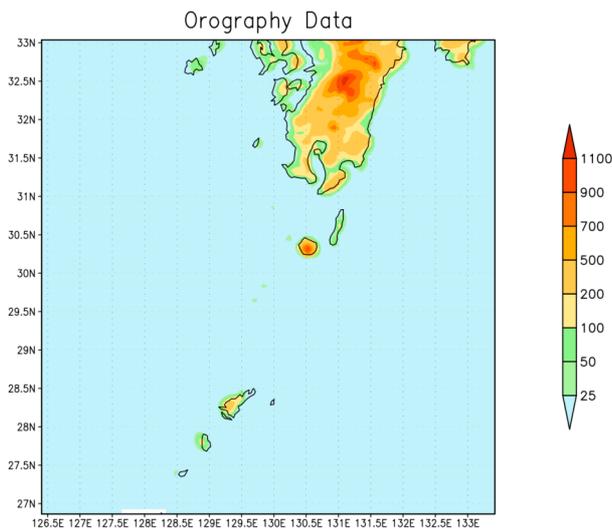


図 2-2 : 本研究で用いた領域モデルの計算領域。横軸は経度、縦軸は緯度、カラーバーは標高[m]をそれぞれ表す

2-3、雲微物理過程の計算コスト

表 2-1 は従来のビン法で計算した、雲微物理過程の計算時間 (CPU Time) の内訳の一例を表している。これを見ると、衝突併合過程と凝結成長過程が CPU Time の大半 (99%以上) を占めており、計算コストが高い。そのため、衝突併合過程、凝結成長過程の計算コストを削減する手法が求められる。以上のような観点から本研究では衝突併合過程と凝結成長過程の計算の高速化に取り組んだ。

表 2-1 : 従来のビン法での雲微物理過程の計算時間の内訳の一例

	CPU時間[sec]	割合[%]
核生成	2.98	0.3
凍結・融解	3.45	0.3
凝結 (蒸発・昇華も含む)	808.39	70.9
衝突併合	325.13	28.5
合計	1139.95	100

2-4、本研究で開発した手法（統計的手法）

ここでは、本研究で適用したモンテカルロ法を用いた統計的手法について説明する。モンテカルロ法は数値積分する際に、乱数を用いる方法であり、もともとは中性子の運動を考察するために考案された方法である。本研究ではこの方法を雲粒子成長過程における、衝突併合過程の計算に適用した。

2-4-1、従来のビン法モデルでの衝突併合過程の計算法

衝突併合過程は Stochastic-Collision-Equation (*Pruppacher and Klett, 1997, Khain et al., 2000*) とよばれる式(2-8)、(2-9)を数値的に解くことで計算される。

$$\frac{\partial f(m)}{\partial t} = 2 \int_0^{m/2} f(m')f(m-m')K(m',m-m')dm' - f(m) \int_0^{\infty} f(m'')K(m,m'')dm'' \dots (2-8)$$

$$\frac{\partial f^{(\lambda)}(m)}{\partial t} = \sum_{\nu} \sum_{\mu} 2 \int_0^{m/2} f^{(\nu)}(m')f^{(\mu)}(m-m')K(m',m-m')dm' - f^{(\lambda)}(m) \sum_{\sigma} \int_0^{\infty} f^{(\sigma)}(m'')K(m,m'')dm'' \dots (2-9)$$

ここで f は粒径分布関数を、 m 、 m' は粒子質量を表す。 K は Collection カーネル関数と呼ばれ、粒子が衝突する確率を表している。

式(2-8)、および式(2-9)を数値的に解くためには、離散化した粒径分布関数の式に適用する必要がある。従来のビン法での計算には *Bott(2000)* を用いる。具体的には以下のように計算される。まずビンに離散化された粒径分布関数を $\{g(m_i)^{(\mu)}\}$ と定義する。ここで i ($1, 2, \dots, n$) は離散化されたビンの番号を表す。

衝突する2つの粒子種のうちでサイズの小さいものを μ 、大きいものを ν とし、これによって生成される粒子種を λ とする。この μ 、 ν 、 λ の組み合わせは付録に掲載した表 A-1 に従う。それぞれの粒子サイズに対応した i 番目のビンと j 番目のビンにおける質量の減少分を記述する式は(2-10)のようにかける (な

お $g(m_i)^{(\mu)}$ は $g_i^{(\mu)}$ と表記する)。

$$\frac{\partial g_i^{(\mu)}}{\partial t} = -g_i^{(\mu)} K(i, j) \frac{g_j^{(\nu)}}{m_j} \Delta \eta \quad \text{および} \quad \frac{\partial g_j^{(\nu)}}{\partial t} = -g_j^{(\nu)} K(i, j) \frac{g_i^{(\mu)}}{m_i} \Delta \eta \cdots (2-10)$$

この式は(2-8)、(2-9)における右辺第2項に相当する。なお $\Delta \eta$ はビンの幅、 m_i, m_j は i, j 番目のビンの粒子質量である。

この式を数値計算で解く際に、 Δt の値によっては $g^{(\mu)}$ が負値になる可能性がある。*Bott(2000)* では Δt に上限を設けることで正定値を保証しているが、*Suzuki(2004)* では正定値を保証するために下記の処理を行っている。

タイムステップ Δt 秒後の ij ($i > j$) 番目のビンの質量の減少分は(2-10)を解析的に解くことにより、式(2-11)のようになる。

$$\begin{aligned} \Delta g_i^{(\mu)} &= g_i^{(\mu)} \left(1 - \exp \left[-K_{vu}(i, j) \frac{g_j^{(\nu)}}{m_j} \Delta \eta \Delta t \right] \right) \\ \Delta g_j^{(\nu)} &= g_j^{(\nu)} \left(1 - \exp \left[-K_{vu}(i, j) \frac{g_i^{(\mu)}}{m_i} \Delta \eta \Delta t \right] \right) \end{aligned} \quad \cdots (2-11)$$

式から明らかなように $\Delta g^{(\mu)}$ は $g^{(\mu)}$ より必ず小さくなるので、正定値が保証される。この減少分が i 番目と j 番目のビンから質量が保存する形で算出される k 番目 (質量 $m_k = m_i + m_j$) のビンに加えられることになる。

よって(2-12)であらわされる質量 ($\Delta g_k^{(\lambda)}$) が k 番目のビンに加えられる。

$$\Delta g_k^{(\lambda)} = \Delta g_i^{(\mu)} + \Delta g_j^{(\nu)} \cdots (2-12)$$

なおこの(2-12)であらわされる変化分が(2-8)、(2-9)の右辺第1項に相当する。

k 番目の質量は $m_i + m_j$ であるが、これが必ずしもビンの中心をとる訳ではない。 $m_i + m_j$ が k 番目と $k+1$ 番目の中間になる場合、質量の増分をそれぞれ k 番目と $k+1$ 番目のビンに振り分けるという手法がとられている。この方法は具体的には以下のように計算される。

振り分ける質量を $f_{k+1/2}$ 、 k 番目のビンに(2-12)で表される増分が加えられた後の k 番目のビンの質量密度を g'_k とするとき、 $f_{k+1/2}$ は式(2-13)のようになり、最終的に k 番目と $k+1$ 番目の質量密度は(2-14)式のように与えられる。

$$f_{k+1/2} = \frac{\ln(\Delta g_i^{(\mu)} + \Delta g_j^{(\nu)})}{\beta} \left\{ \exp \left[\frac{\beta}{2} \right] - \exp \left[\frac{\beta}{\left(\frac{1}{2} - c \right)} \right] \right\} \cdots (2-13)$$

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{\ln g_{k+1}^{(\lambda)}}{\ln g_k^{(\lambda)}} & c &= \frac{\ln(m_i + m_j) - \ln m_k}{\ln m_{k+1} - \ln m_k} & g_k^{(\lambda)} &= g_k^{(\lambda)} + \Delta g_k^{(\lambda)} \\ g_k^{(\lambda)} &= g_k'^{(\lambda)} - f_{k+1/2} & g_{k+1}^{(\lambda)} &= g_{k+1}^{(\lambda)} + f_{k+1/2} \end{aligned} \cdots (2-14)$$

この粒径分布の変化を考慮しているすべての粒子種について、すべてのビンの相互作用を計算する。

2-4-2、統計的手法の導入

本研究で適用したモンテカルロ法とは、本来数値積分等ですべてのグリッドの計算を行うべきところを、すべての計算を行わずに乱数を用いて選択したグリッドのみの計算で代表させるという手法である。すべての計算を行わないために計算コストの削減が見込まれる。本研究ではこの手法を以下のように適用した。

式(2-11)~(2-14)を全ての粒子種に対して全てのビン同士の衝突を計算すると、式(2-15)のように4重積分となり、コストが非常に高い計算となる。

$$\left\{g_l^{(\lambda)}\right\}_{l=1,2,\dots,N_{bin}}^{\lambda=1,2,\dots,N_{spc}} = \sum_{\lambda_1} \sum_{\lambda_2} \left[\sum_i \sum_j (\Delta g_i^{(\lambda_1)} + \Delta g_j^{(\lambda_2)}) \right] \dots (2-15)$$

N_{spc} は粒子種の数、 N_{bin} はビンの数を表し、(2-15)式は[]の外側で衝突する粒子種の組み合わせ(λ_1, λ_2)に対して、[]の内側でビン(粒子サイズ)の組み合わせ(i, j)に対して、順に計算している。すると、粒子種の組み合わせで N_{spc}^2 個の組み合わせが考えられ、それぞれの組み合わせに対して、 $N_{bin} C_2$ 個のビンの組み合わせが考えられ、これら全ての組み合わせに関して計算を行わねばならない。

そのため、ビンの数が増加すると計算コストが $O(N_{spc}^2 \times (N_{bin}^2 - N_{bin})/2)$ のオーダーで増大する。

そこで本研究で用いた統計的手法では下記のように、全粒子種の組み合わせ、全ビンの組み合わせに対して、一様な乱数によってそれぞれ M_{spc} 、 M_{bin} 個の組み合わせを選択し、(2-15)の計算を(2-16)式のように2重積分で代替する。

$$\left\{g_l^{(\lambda)}\right\}_{l=1,2,\dots,N_{bin}}^{\lambda=1,2,\dots,N_{spc}} = \sum_{k_1=1}^{M_{spc}} \sum_{k_2=1}^{M_{bin}} \left[(\Delta g_{k_2}^{(\lambda_{k_1})} + \Delta g_{k_2'}^{(\lambda_{k_1'})}) \times w \right] \dots (2-16)$$

$$w = \left[\frac{N_{bin}(N_{bin}-1)}{2M_{bin}} \frac{N_{spc} \times N_{spc}}{M_{spc}} \right] \dots (2-17)$$

ここで式(2-16)右辺の w は本来よりは少ない組み合わせで計算を代替する関係上、計算1回あたりの変化量を大きくするために乗じられる重み関数である。

この手法では乱数の数 M_{spc} 、 M_{bin} が少ないほど、計算コストが少なく、乱数の数が増えると積分回数が増加する。また $M_{spc}=N_{spc}^2$ かつ、 $M_{bin}=N_{bin} C_2$ のときは $w=1$

で、従来のビン法と同じ積分回数になる。

この方法を用いると、 w を大きくとったときに 1 回の計算での変化量が大きくなり、 $g^{(\mu)}$ が負値になることがあり得る。その場合は、ビンに存在する質量分以上は変化しないように変化量に上限を設けることで、正定値を保証する

$$(g_i^{(\mu)}(After) = \max[(g_i^{(\mu)}(Before) - \Delta g_i^{(\mu)}), 0])$$

この手法により、式(2-15)の 4 重積分の部分が、式(2-16)のように 2 重積分に削減されるために、計算コストの削減が見込まれる。また、計算精度を向上させるためにビンの数を増やして計算を行う場合でも、この手法を用いると計算コストの増大率は $O(M_{spc} \times M_{bin})$ のオーダーであり、乱数の数に比例する形（従来のビン法はビンの数の 2 乗に比例）程度で済むため、ビンを増やした計算に対してもコストの削減が見込まれる。この手法の概要図を図 2-3 にまとめた。

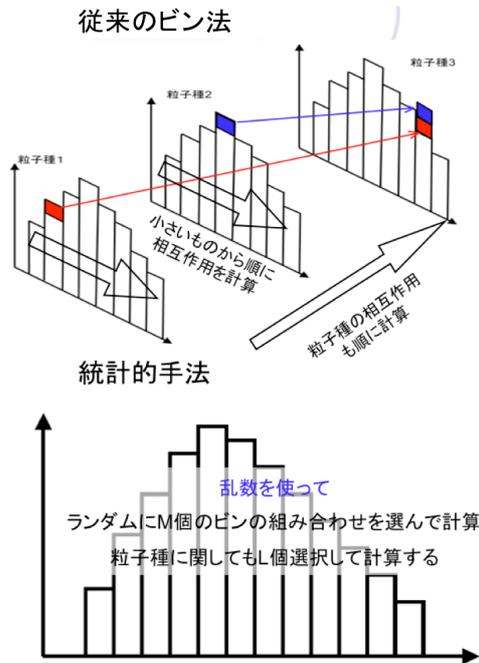


図 2-3 : 統計的手法の模式図

また従来のビン法では、式(2-15)を数値的に解く際に、計算コストと計算の安定性のために粒子サイズの小さいものの相互作用から順に計算されている。しかし本来自然現象では衝突併合の順番は小さい粒子からではなく、ランダムな順序で起こっていると考えるのが自然である。その観点から考えると、統計的手法は計算の順序を一様乱数でランダムに決めており、より自然現象に近いといえる。

2-4-3、乱数の選択

統計的手法では2-4-2節で述べたように粒子種の組み合わせとビンの組み合わせを一様乱数によって選択する。そのため、乱数発生法の選択が重要であり、乱数は一様なものが理想である。

数値計算を行うコンピュータでは完全に一様な乱数を生成することは熟雑音サーバなどのような外部機器を用いない限り不可能であり、擬似乱数を使うのが通例である。本研究でも擬似乱数を用いる。理想的な擬似乱数は長周期、均質性（一様性）、高速という3要素が要求される。乱数生成にはさまざまな方法があるが、本研究では上記3要素をすべて備えたメルセンヌ・ツイスターという方法を採用する。

このメルセンヌ・ツイスターは *Matsumoto and Nishimura(1998)* で提案された方法で、周期は $2^{19937}-1$ であり、現存する擬似乱数の中では圧倒的に長い周期と均質性（一様性）を持つ。

3、感度実験と結果

本論文ではまず、0次元のボックスモデルを用いてスキームの評価を行い（3-1節）、その後2次元のモデル（3-2、3節）、3次元のモデル（3-4節）に拡張し、スキームに関する考察（3-5節）を行う。

3-1、0次元のボックスモデルを用いた数値実験

3-1-1、0次元ボックスモデルの概要と実験設定

ここでは2章で記述した雲微物理スキームのうち、衝突併合過程のみを単離した0次元モデルを用いる。このモデルはボックスモデルとよばれ、衝突併合過程のみでの粒径分布の時間変化を考察する。

ビンの数は300ビンとし、計算時間は1時間 ($dt=1[\text{sec}]$ で3600ステップ)。粒子種に関しては液滴のみの1種類とした。実験に用いたKernel関数に関しては3-1-2、3-1-3節でそれぞれ後述する。また粒径分布(f)の初期条件は γ 関数形で式(3-1)のように与える。

$$f(m, t=0) = \frac{L}{\bar{m}^2} \exp\left(-\frac{m}{\bar{m}}\right) \cdots (3-1)$$

この(3-1)は *Bott(1998)* および、*Shima et al.(2007)* を参考にしており、 L は総雲水量、 \bar{m} は平均質量であり、平均半径を \bar{r} 、水の密度 ρ としたとき、 $\bar{m} = (4/3)\pi\rho\bar{r}^3$ のように与えられる。本実験では $L=1[\text{g}/\text{m}^3]$ 、 $\bar{r}=10[\mu\text{m}]$ とした。また積分回数は従来のビン法の積分回数（計算量）を1とした時、ビン選択に関する積分回

数の割合が 1~0.028 の範囲で計算を行った。以下ではこの従来のビン法に対する統計的手法の積分回数の割合を R とする。なお粒子選択に関する積分回数の割合を以下では R_{spc} と表す。

3-1-2、解析解との比較（Golovin-Kernel を用いた結果）

始めに Golovin(1963)で求められている粒径分布関数の時間変化の解析解と本研究で導入した統計的手法を比較する。解析解は Kernel 関数 K を各ビンの質量 m_i に対して線形と仮定したときに導出される。

ここでは Kernel 関数は Berry(1967)に従って(3-2)のように置く。

$$K(m_i, m_j) = 1.5 \times (m_i + m_j) \cdots (3-2)$$

なお m_i 、 m_j は衝突する粒子の質量を表す。

図 3-1 は粒径分布の時間変化の解析解と、統計的手法で $R=0.125$ 、 $R=0.031$ として計算をおこなった結果である。これを見ると、統計的手法を用いた結果は粒径分布関数が滑らかではなく、誤差が生じ、その誤差は R の値によって異なる。これは一部のビンの計算のみで全体の計算を代替するために、生じるものである。しかし、誤差が時間とともに発展していくことはなく、各時刻において粒径分布関数がピークをとる半径は解析解とほぼ等しく、粒径の時間発展の様子はよく再現できている。図 3-1 では積分回数を従来のビン法の 3%程度 ($R=0.031$) まで減らしているが、ほぼ解析解に近い結果が得られている。

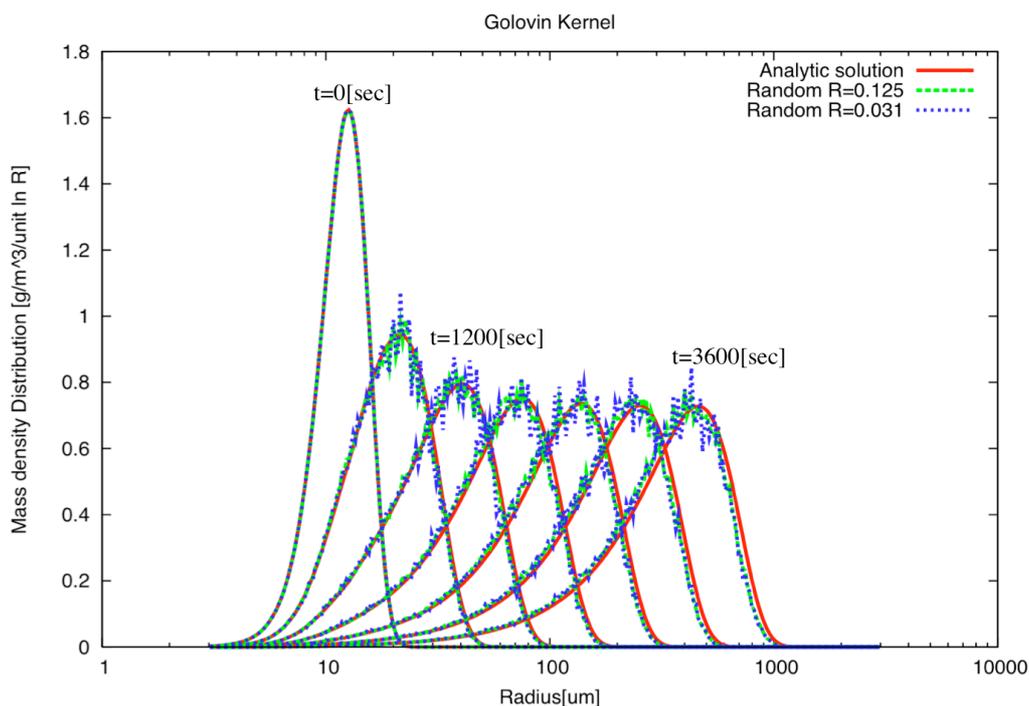


図3-1：0次元のボックスモデルで計算された粒径分布の時間発展の様子
赤線が解析解、緑線($R=0.125$)、青線($R=0.031$)が統計的手法を用いた結果である。 R は従来のビン法を1としたときの統計的手法の積分回数割合を示す。横軸は半径を、縦軸は粒子の質量密度（粒径分布関数）を表す

3-1-3、現実的な *Kernel* を用いた数値実験

解析解と比較する際には *Kernel* 関数は式(3-2)を用いたが、これは現実的な *Kernel* ではない。現実の大気中では、式(3-3)の *Kernel* 関数が与えられるのが通常である。この *Kernel* を用いた場合、その複雑さから解析解は得られていないため、従来のビン法を真値と見なして、統計的手法と比較を行う。

$$K(m, m') = \pi \{r(m) - r(m')\}^2 |V(m) - V(m')| E_{col}(m, m') E_{coal}(m, m') \dots (3-3)$$

ここで r_i 、 r_j は質量 m_i 、 m_j に対応する雲粒の半径、 E_{col} は衝突係数、 E_{coal} は捕獲係数、 $V(m)$ は質量 m の粒子の終端落下速度である。

図3-2は式(3-3)の *Kernel* を用いて計算した、従来のビン法と統計的手法 ($R=0.5$ 、 $R=0.125$ ；左、 $R=0.056$ 、 $R=0.031$ ；右)での粒径分布の時間発展の様子を表す。

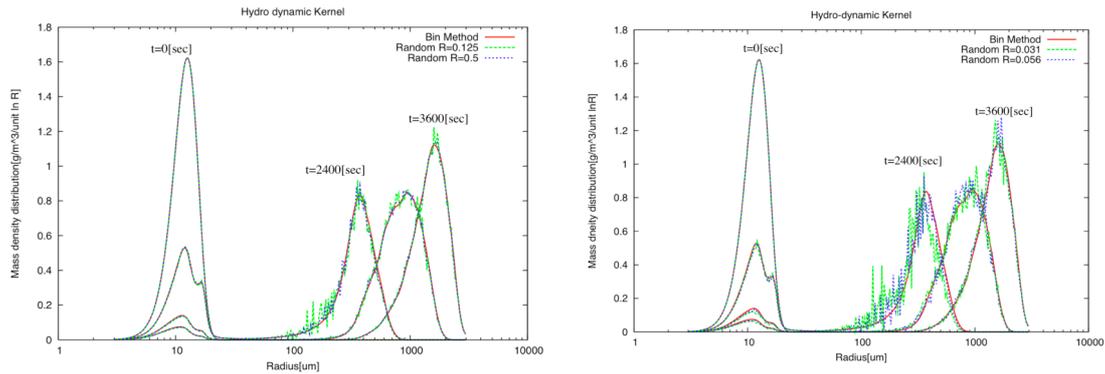


図 3-2：0次元ボックスモデルで、式(3-3)のKernelを用いた粒径分布の時間発展の様子。横軸と縦軸は図3-1と同じである。両図共に赤線が従来のビン法を用いた計算結果、その他の線は統計的手法で計算した結果であり、左図は緑線が $R=0.5$ 、青線が $R=0.125$ の結果を、右図は緑線が $R=0.056$ 、青線が $R=0.031$ の結果をそれぞれ表す

図3-1と同じく、積分回数を減少させると粒径分布関数に誤差が生じる様子が見て取れるが、積分回数を従来の13%程度まで減少させても($R=0.125$)、従来のビン法に近い結果が得られている(図3-2左図)。積分回数をさらに減らしたとき、積分回数を減らしていくにつれ粒径分布の誤差は大きくなる(図3-2右図)。図3-3は図3-2の結果にスムージングをかけた結果を示す。これを見ると積分回数を従来のビン法の3%程度($R=0.031$)まで減らすと、 $t=2400[s]$ の時は粒径分布のピーク値が半径の小さい側に移動し、半径 $100\sim 500[\mu m]$ 付近(以降ドリズルモードとする)に成長の遅れが生じる。

その原因として以下の一連のプロセスが推察される。積分回数を減少させるということは、式(2-16)をみると、従来のビン法に比べ衝突併合を計算する回数が減少することであり、モデル中での粒子の衝突回数が減少することになる。この衝突回数の減少を補うために重み関数 w を乗じるが、積分回数があまりに減少すると式(2-17)の w が大きくなるため、計算1回当たりの変化量が大きくなり、本来ビンに存在する質量を上回る場合が生じ得る。この場合は粒径分布が負値になってしまうので、負値の発生を防ぐためにモデル中ではビンに存在する分以上は変化しないように処理している($g_i^{(u)}(After) = \max[g_i^{(u)}(Before) - \Delta g_i^{(u)}, 0]$)。そのため $g_i^{(u)}(Before) < \Delta g_i^{(u)}$ の時は変化量が $\Delta g_i^{(u)}$ より小さくなるため、成長が遅くなる。またドリズルモードのみでこの現象が起こるのは、ドリズルモードはそれより小さいサイズの粒子に比べ衝突確率が急激に大きくなる粒子サイズである(付録2 B-3)。そのため、積分回数を減らしたときには成長の遅れが生じやすい。

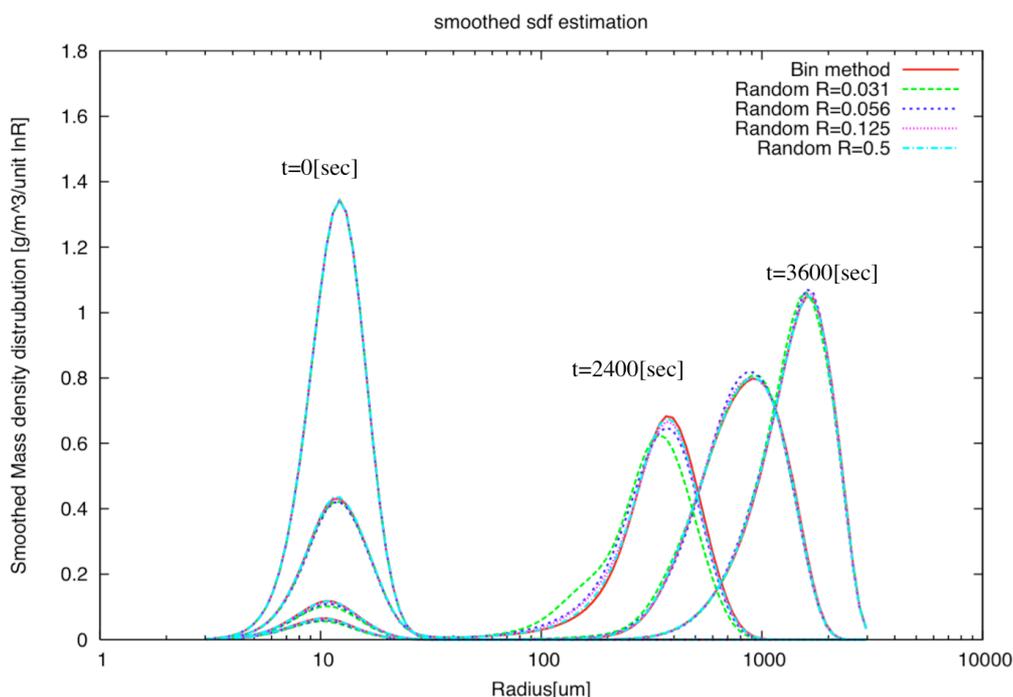


図 3-3 : 図 3-2 と同じだが、スムージングをかけたものである。赤線が従来のビン法で計算された結果。その他は統計的手法で計算された結果であり、緑、青、ピンク、水色線はそれぞれ $R=0.031$ 、 $R=0.056$ 、 $R=0.125$ 、 $R=0.5$ の時の計算結果である

以上の 0 次元ボックスモデルの結果を踏まえると、従来のビン法による粒径分布の時間発展を表現するには、本研究で開発した統計的手法で積分回数を従来の 6% ($R=0.056$) 以上に設定することが妥当である。

3-1-4、衝突併合過程モジュールの計算時間

統計的手法を適用する主たる目的は計算コストを削減することにある。よって、CPU Time に相当する計算時間と積分回数の関係を知っておくことが必要となる。ここでは、この点について議論する。

図 3-4 は 0 次元ボックスモデルで測定した、計算時間と積分回数 (R) の関係である。なお粒子種選択に関しては、 $R_{spc}=1$ で計算時間が 1 となるように設定して計算時間を算出した。

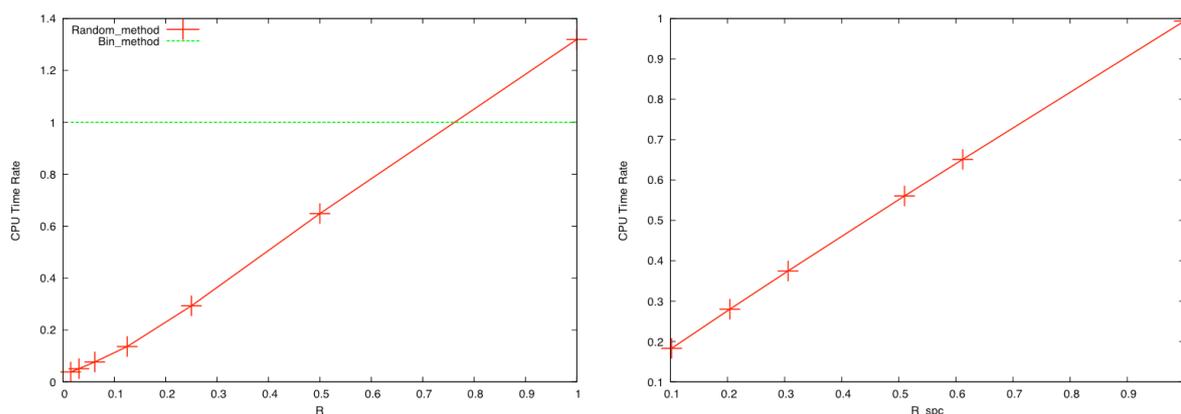


図3-4：0次元ボックスモデルでの、計算時間とビンの選択における積分回数（左）、および計算時間と粒子種を選択における積分回数（右）の関係。縦軸は従来のビン法の計算時間が1となるように規格化された計算時間（CPU Time）、横軸は R （左）、 R_{spc} （右）である。緑が従来のビン法の計算時間である

図3-4の縦軸は計算コストに相当するが、ビンの選択において積分回数が従来のビン法のおおよそ7割程度するとき、計算コストは従来のビン法と同程度になる。これは乱数を発生させる計算のために $R=1$ の時は従来のビン法よりも計算コストが高くなっているものである。

また計算コストはビン選択に関する積分回数に比例して増加し、粒子種を選択に関しても、計算コストは積分回数に比例して増加する。3-1-3章の見積もりで妥当とした積分回数が6%の時は計算コストが従来の10%まで削減できる。全体の計算コストの削減割合はビンの選択と粒子種を選択の積で表されるので、ビンの選択で積分回数を6%程度に、また仮に粒子種選択で積分回数を従来の20%程度にそれぞれ削減できれば、全体では計算コストは従来の3%に削減することが可能である。

この結果は0次元ボックスモデルでの結果であり、実際に2次元、3次元のモデルに拡張した場合は、衝突併合過程の計算がなされる各グリッドで計算時間の短縮が見込まれる。

3-2、2次元ビンモデルに拡張した結果

ここでは統計的手法を2次元のビンモデルに適用した計算結果を示す。評価に用いたモデルは2章で記述したモデル（Suzuki, 2004、以下従来のビン法）と、このモデルの衝突併合過程に統計的手法を適用したモデルである。

3-2-1、実験設定

ビンの数は 60 ビンとした。計算時間は 2 時間 ($dt=1[s]$ で 7200step) である。積分回数は、ビンの選択で $R=1\sim 0.028$ までの範囲で計算した。また特に指定のない限り $R_{spc}=1$ で計算する。ここでは代表的な対流性の雲、および下層の層状性の雲を仮定した 2 種類の実験を行った。なお以降、液滴に関しては粒子サイズにより雲 ($3[\mu m]\sim 30[\mu m]$)、ドリズル ($30[\mu m]\sim 300[\mu m]$)、雨 ($300[\mu m]\sim 3000[\mu m]$) の 3 種類に分割して扱い、雲水量、ドリズル水量、雨水量を $\int_{r_1}^{r_2} 4\pi r^2 \rho / 3n(r) dr$ と定義する。(ただし r_1 、 r_2 はそれぞれの境界の半径、 ρ は水の密度、 $n(r)$ は数密度 (粒径分布関数) を表す)。

計算領域は層状性の雲を仮定した実験では、水平方向に $30[km]$ 、鉛直方向に $5[km]$ 設定し、グリッド間隔は $dx=0.5[km]$ 、 $dz=0.05[km]$ とした。一方、対流雲を仮定した実験では、水平方向に $30[km]$ 、鉛直方向に $15[km]$ 設定し、グリッド間隔は $dx=0.5[km]$ 、 $dz=0.2[km]$ とした。

初期の力学場は水平一様で、層状性の雲の実験では、*Suzuki et al.(2006)* に従って、図 3-5 (上) のように、対流性の雲の実験では、図 3-5 (下) のように与えた。また初期の対流を起こすために式 (3-4) で与えられる温位の perturbation(warm bubble)を *Gallus and Rancic(1996)* に従って与えた。

$$\Delta\theta = \Delta\theta_0 \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\left(\frac{x-x_0}{x_r} \right)^2 + \left(\frac{z-z_0}{z_r} \right)^2} \right) \dots (3-4)$$

ここで層状性の雲を仮定した実験では $\Delta\theta_0=1[K]$ 、 $x_0=9[km]$ 、 $z_0=0.5[km]$ 、 $x_r=5[km]$ 、 $z_r=0.5[km]$ 、対流性の雲を仮定した実験では $\Delta\theta_0=1[K]$ 、 $x_0=9[km]$ 、 $z_0=1[km]$ 、 $x_r=5[km]$ 、 $z_r=1[km]$ とした。

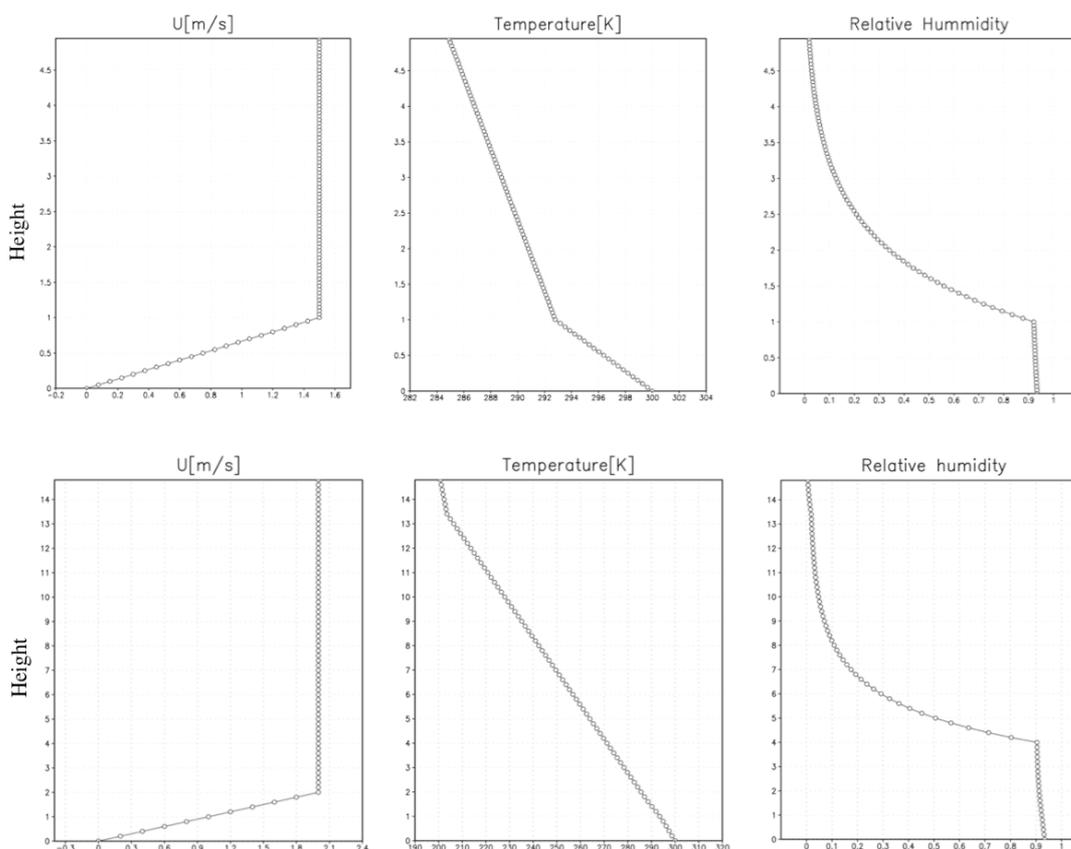


図 3-5 : 力学場の初期条件。上が層状の雲を仮定したとき、下が対流性の雲を仮定したときの初期条件である。横軸はそれぞれの物理量の値を、縦軸は高さ[km]を表す

なお力学場をはじめとする初期条件は統計的手法と従来のビン法で同じとし、この実験でも従来のビン法の結果を真値と見なした。また統計的手法の結果は、乱数を用いるため、乱数の初期値が異なる 5 回の実験を行い、その平均の値を用いて解析した。

3-2-2、層状の雲を仮定（水雲のみを仮定）した実験の計算結果

ここでの解析は雲水量とドリズル水量、および放射特性として代表的な雲水有効半径の解析を行った。

図 3-6 は従来のビン法と、統計的手法を用いて計算された計算開始から 60 分後の雲水量とドリズル水量の総和の空間分布を、図 3-7 は同じく 60 分後の雲粒有効半径の空間分布の様子を表す。 $R=0.056$ まで積分回数を減らしても、雲水量は従来ビン法と同様な結果が得られており（図 3-6）、有効半径も従来ビン法と同様な結果が得られている（図 3-7）。

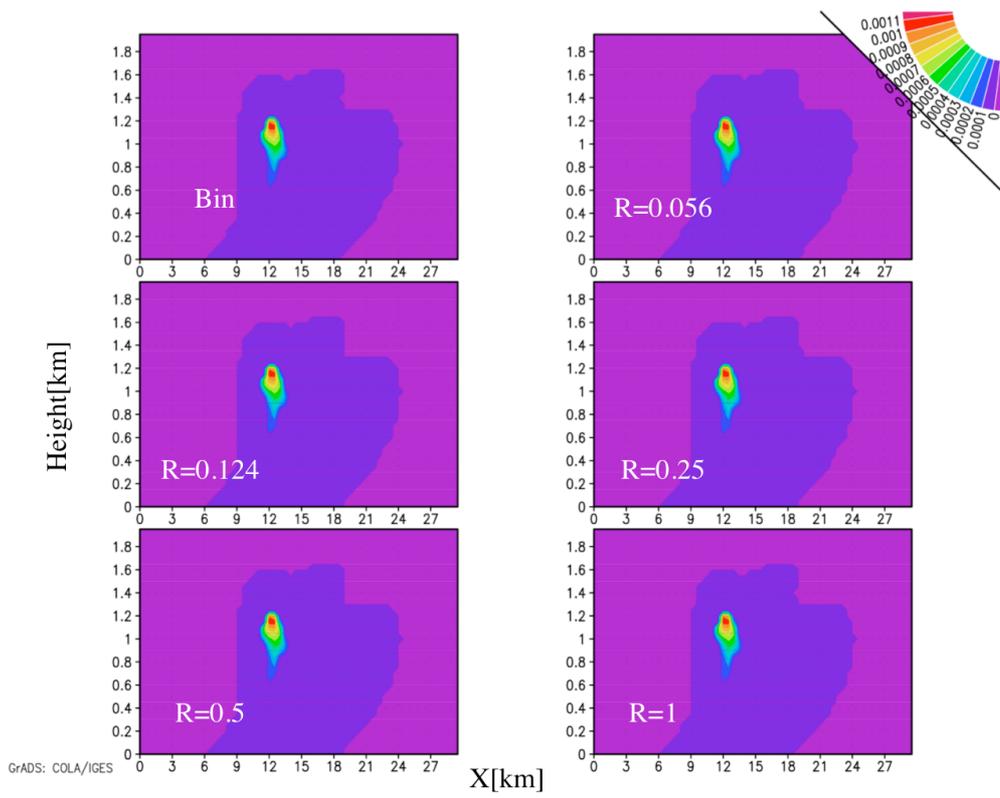


図 3-6 : 計算開始から 60 分後の雲水量とドリズル水量の総和の空間分布。横軸は水平方向の距離[km]、縦軸は高さ[km]である。左上が従来のビン法での計算結果、以下 $R=0.056, 0.124, 0.25, 0.5, 1$ と積分回数を減らした時の結果である

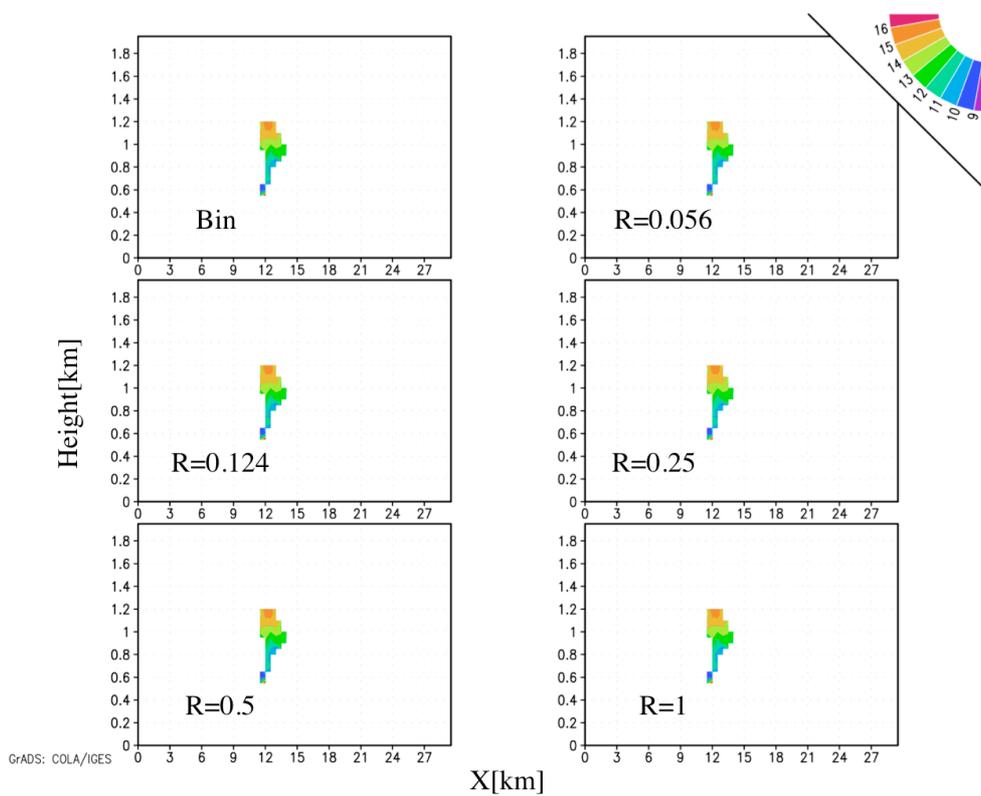


図 3-7 : 図 3-6 と同時刻の雲粒有効半径[μm]の空間分布。軸は図 3-6 と同じである

図 3-8 は計算コスト(CPU Time)と、積分回数との関係を示す。これをみると、積分回数と計算コストは比例関係があることが見て取れ、このことは 0 次元のボックスモデルの結果と整合性がある。

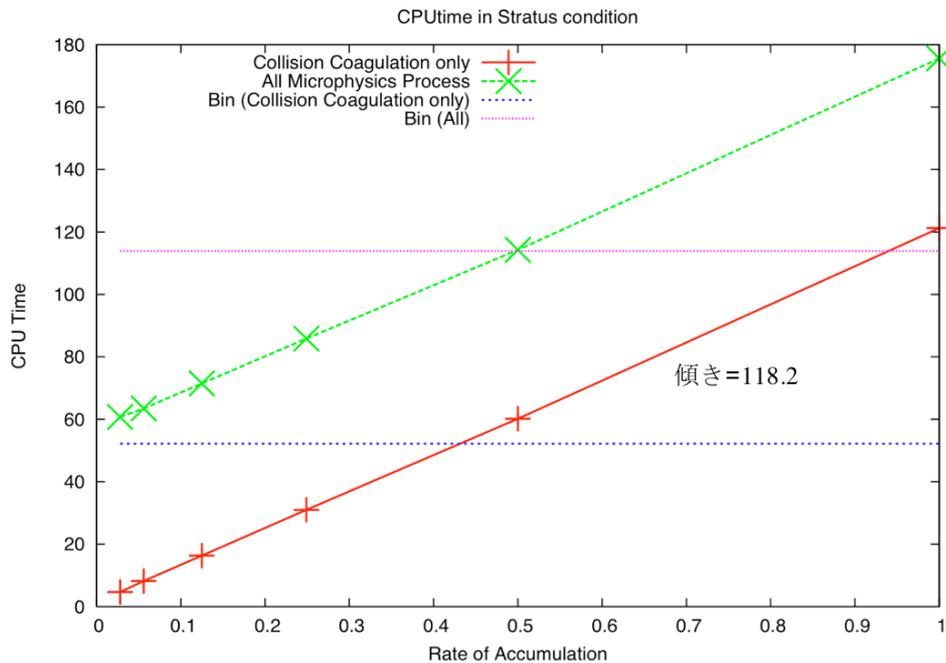


図 3-8 : 層状の雲を仮定した実験での、積分回数と計算コストの関係。横軸は、従来のビン法の積分回数を 1 とした時の積分回数の割合 (R)、縦軸は計算時間を表す。赤線 (衝突併合過程のみ) および緑線 (全ての雲微物理過程) が統計的手法での計算時間 (計算コスト)、青線 (衝突併合過程のみ) およびピンク線 (全ての雲微物理過程) が従来のビン法での計算時間 (計算コスト) を表す

次に誤差評価を行う。図 3-9 は従来のビン法を真値とした時の統計的手法で計算された結果の相対誤差と、積分回数の関係を示す。なお誤差は全計算領域の累積値を用いて算出した。

図 3-9 を見ると、積分回数を増やすと (R を大きくすると) $R=1$ 未満の時は雲水の時間積算値、ドリズルの時間積算値、雲粒有効半径で全て指数関数的に誤差が減衰していく様子が見て取れる。 $R=1$ では誤差の減衰度合いが大きくなっている。

$R=1$ の場合、ビンで離散化した全ての組み合わせが計算されることになり、従来のビン法との差は衝突併合の計算順序のみである。それに対して $R=1$ 未満の場合は計算順序に加えて、1 タイムステップあたりに計算されないビンの組み合わせが生じることによる誤差が加わっている。そのため、 $R=1$ の場合はそれ以外の場合に比べ誤差が小さくなるといえる。

また 0 次元のボックスモデルで妥当と見積もられた $R=0.056$ の時はドリズル水量と雲水量で誤差が 1% 未満、有効半径は誤差が 0.1% 未満の精度である。

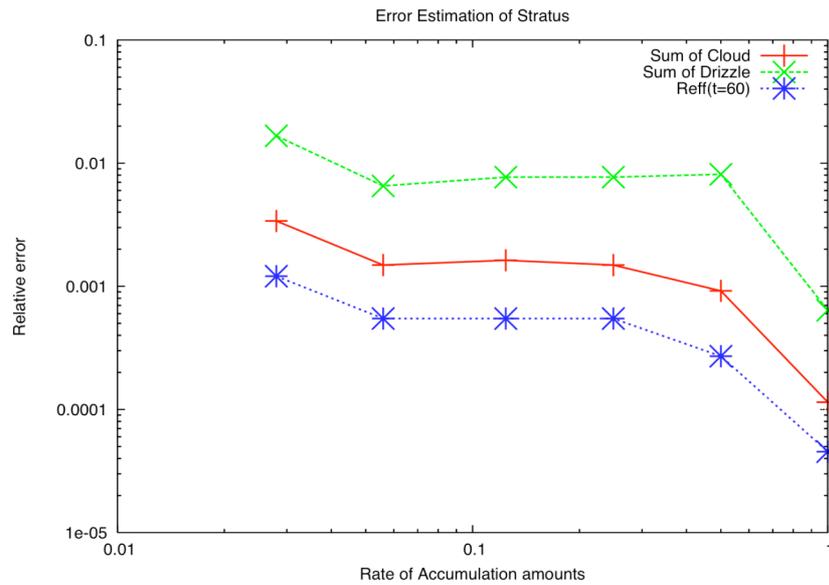


図 3-9 : 従来のビン法を真値とした時の統計的手法の相対誤差と、積分回数との関係。縦軸は相対誤差、横軸は図 3-8 と同じである。赤線は雲水量の時間積算値、緑線はドリズル水量の時間積算値、青線は計算開始から 60 分後の雲水有効半径の相対誤差をそれぞれ表す

3-2-3、対流性の雲を仮定した実験（氷雲を含む）の計算結果

対流性の雲を仮定した場合、対流によって気温が 0°C 以下になることがある。そのため氷雲過程の計算を含めて行った。粒子種選択の組み合わせに関する積分回数は $R_{\text{spc}}=1$ (従来のビン法と同じの積分回数) とした。また層状の雲のときとは異なり対流性の雲は激しい降水を伴い、上空には固相の粒子（氷晶、雪、霰、雹）も存在するため、それらについて解析を行った。

図 3-1 0 は対流性の雲を仮定した時の地表面の雨の時間変化を、図 3-1 1、3-1 2 は上空の $T=0[^{\circ}\text{C}]$ (本実験では上空 4[km]付近で固定) 付近の雹、霰の時間変化をそれぞれ表す。また図 3-1 3 は雪の時間積算量を表す。

図 3-1 0 見ると、 $R=0.056$ まで積分回数を減らしても計算結果は崩れていない。上空 $0[^{\circ}\text{C}]$ 付近の雹や霰を見ると、 $R=0.056$ まで乱数を減らしても、従来のビン法と同様の計算結果が得られている (図 3-1 1 ~ 図 3-1 2)。ところが雪の時間積算値は $R=0.124$ 以下のときは過小評価になっている (図 3-1 3) (氷晶の時間積算値も過小評価している；図は省略)。

また図 3-1 4 は従来のビン法と、統計的手法を用いた時の乱数の初期値が異なる 5 回の実験 ($R=0.124$) の雪の時間積算値である。これを見ると個々の実験で、

雪の時間積算値が過大評価や過小評価が生じ、また雪の時間積算値が過大評価のときは他の粒子種が過小評価を生じている（図は省略）。すなわち乱数の初期値が異なると粒子種間で結果が異なる（なおこの性質は $R=0.25$ 以上ではほとんど生じない）。

この原因は以下のように考えることができる。統計的手法では式(2-17)であらわされる重み関数(w)を乗じることで、積分回数と1回の計算あたりの質量の変化量に関しては妥当になるように処理している。ところが氷雲過程を入れた場合、**Riming** や **Aggregation** といった異なる粒子種間の衝突により、別の粒子種が生じる場合がある。ある粒子種から他の粒子種への変換が起こる際、統計的手法では衝突の回数が絶対的に少ないため、粒子種間の変換が十分に行われぬ。そのため従来のビン法に比べて全体の質量変化分は妥当でも、粒子種間の変遷が十分に行われぬ。よって、乱数の初期値が異なって計算する順序が異なると、粒子種間で過大評価や過小評価を生じ、結果が異なるものになると推測できる。

図3-15は $R=0.028$ のときの図3-14と同様の結果を示すが、このときは、乱数の初期値が異なることによる計算結果の差が $R=0.124$ のときに比べ著しく大きくなり、ここまで積分回数を減らした場合、精度が悪くなることが示唆される。

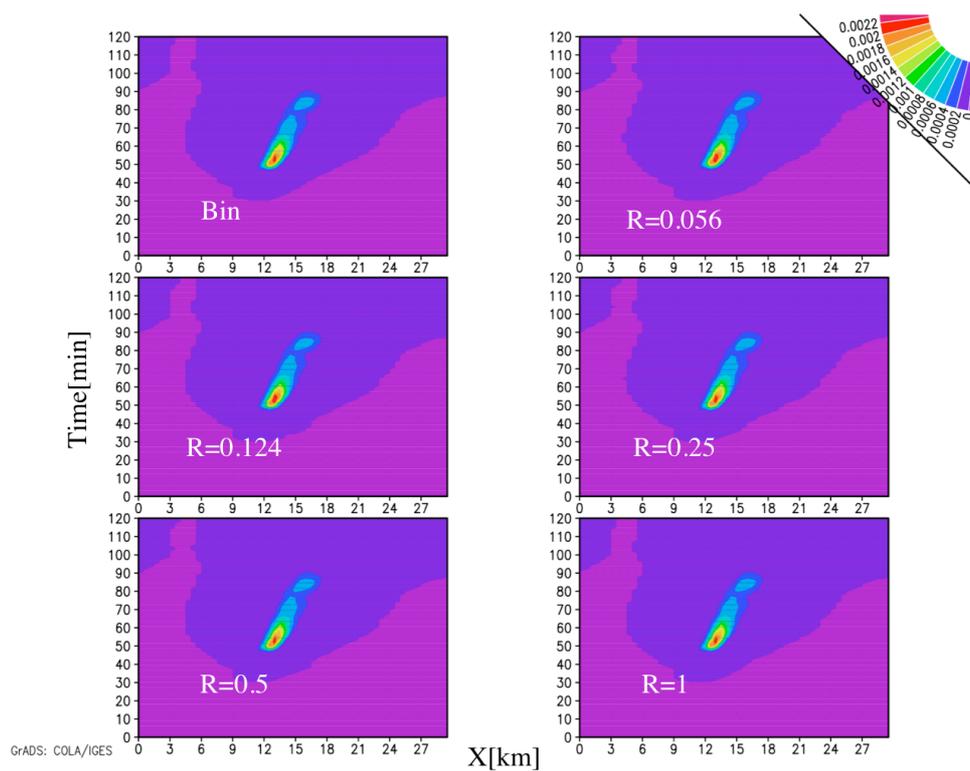


図 3-10 : 対流雲を仮定した実験での、地表面の雨 (単位は kg/m^3) の時間変化。横軸が水平方向の距離 $[\text{km}]$ を、縦軸が時間を表す。 R は図 3-6 と同じである

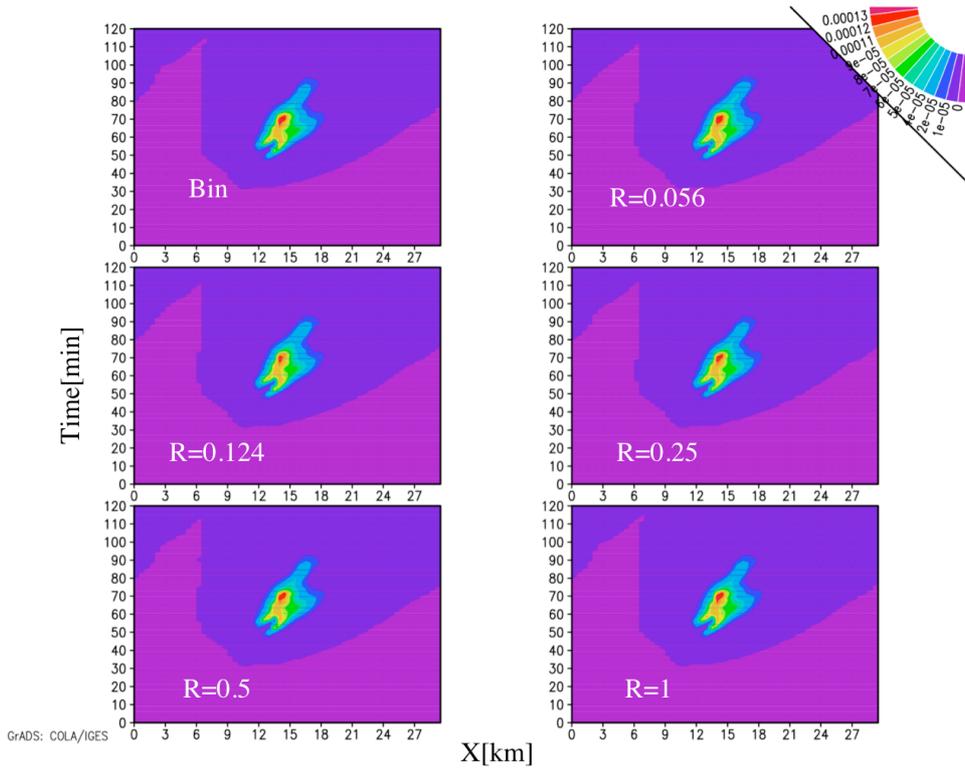


図 3-1 1 : 図 3-1 0 と同じだが、上空 $T=0^{\circ}\text{C}$ 付近での霰水量の時間変化

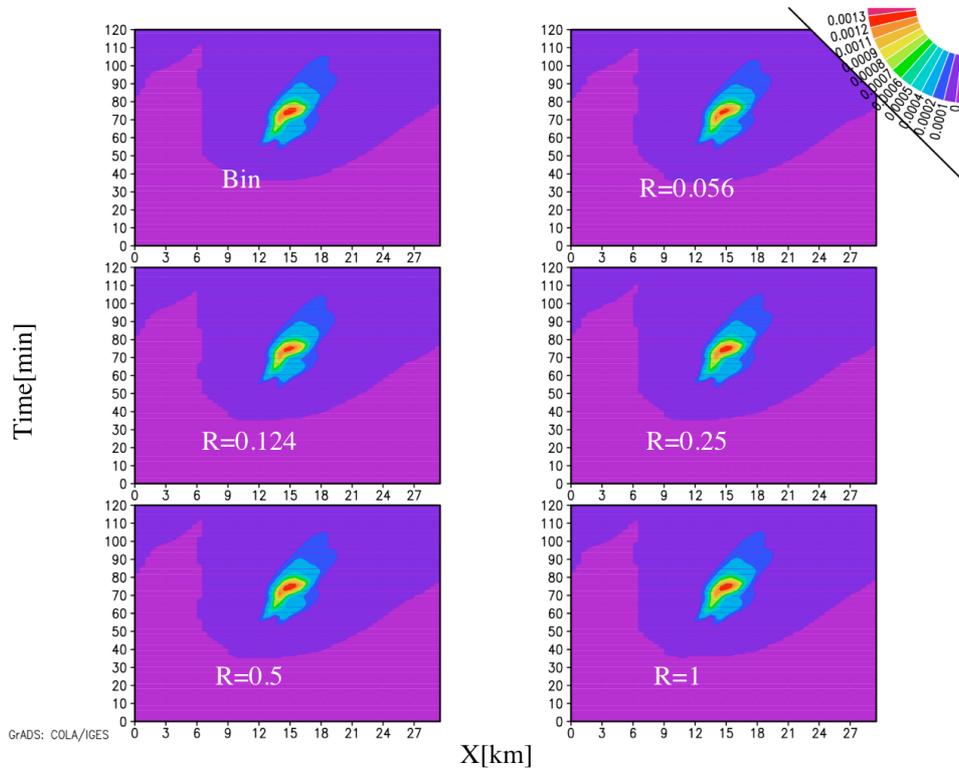


図 3-1 2 : 図 3-1 1 と同じだが、霰水量の時間変化

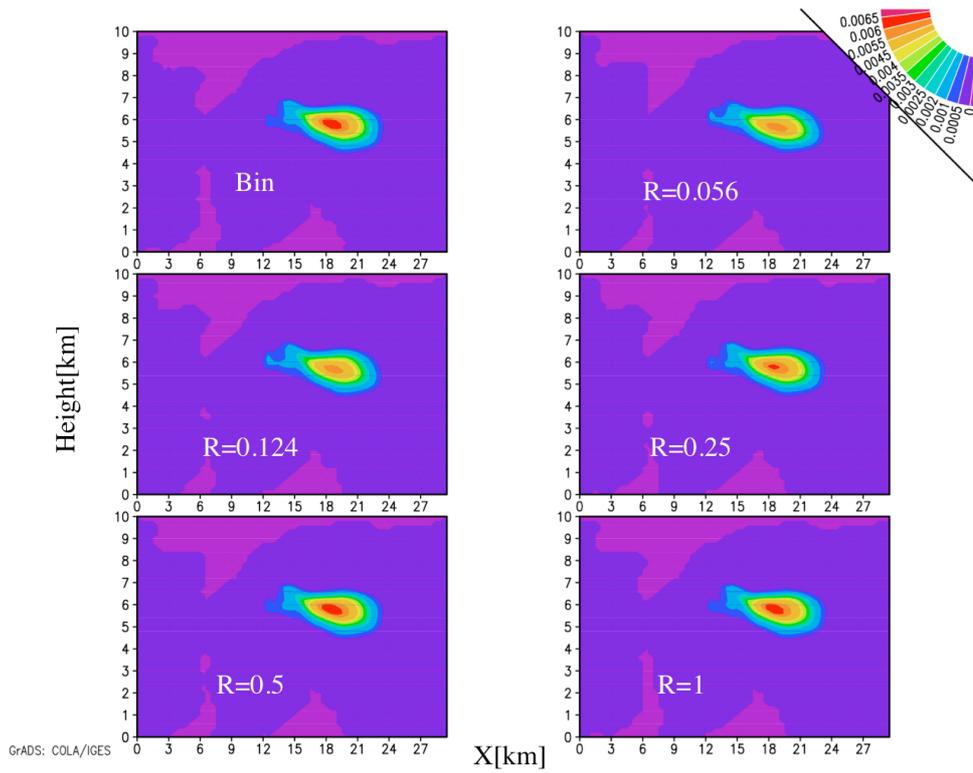


図 3-1 3 : 雪水量 (単位は $[\text{kg}/\text{m}^3]$) の時間積算量。縦軸は高さ $[\text{km}]$ を、横軸は水平方向の距離 $[\text{km}]$ を表す。 R は図 3-6 と同じである

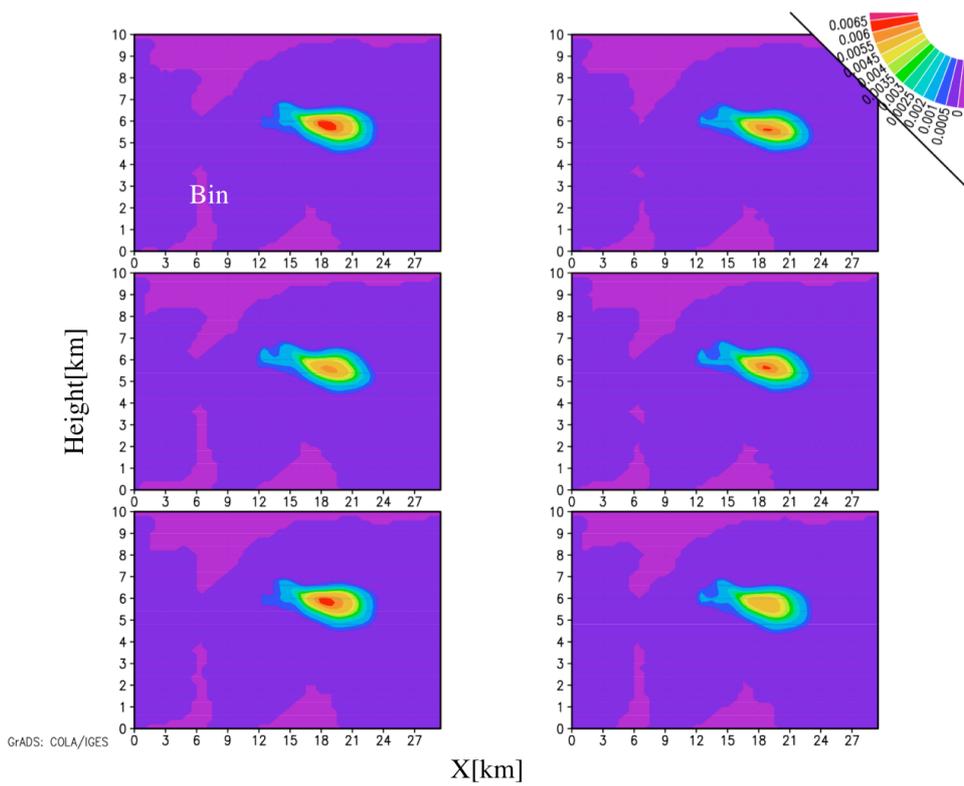


図 3-1 4 : $R=0.124$ の時の雪水量 (単位は kg/m^3) の時間積算量。縦軸は高さ[km]を、横軸は水平方向の距離[km]を表す。左上が従来のビン法の結果であり、それ以外は異なる乱数の初期値をもちいて、同じ条件で計算した結果である

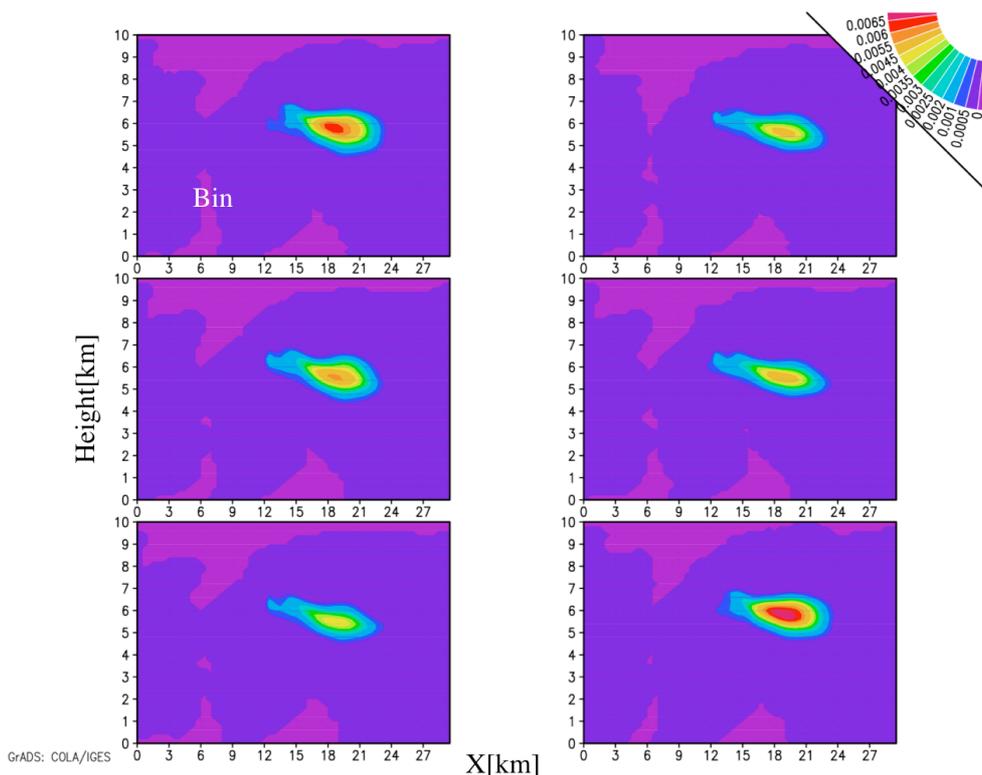


図 3-1 5 : 図 3-1 4 と同じだが、 $R=0.028$ のときの結果である

次に粒子種選択での積分回数を削減した結果を示す。ビンの選択に関する積分回数は $R=0.124$ とし、 R_{spc} が $1\sim 0.204$ の範囲で計算を行った。また初期値の異なる乱数を用いた実験を 5 回行い平均した値で評価する。

図 3-1 6 は、粒子種選択に関する積分回数を削減した雪の時間積算値の結果である。これによると粒子種選択に関する積分回数を減らすと、従来のビン法に比べ過大評価、過小評価を生じている。(氷晶、雨、雹、霰についても同様の結果が得られている；図は省略)。さらに、過大評価になるか過小評価になるかについて R_{spc} に対する系統的な依存性は見られない。また液相の粒子は R_{spc} に関わらずほぼ同じ結果になっている (図は省略)。

この原因は以下のように考えることができる。 $R_{spc}=1$ の時は、全ての粒子種の衝突の組み合わせが計算されるのに対して、 $R_{spc}<1$ の時は衝突が計算されない粒子種の組み合わせが生じる。すると、ある粒子種ばかりが計算され成長するのに対し、別の粒子種が全く計算されず成長しないことが生じ得る。また固相の粒子種は雹と氷晶をのぞいては、本研究で用いたモデルでは衝突併合過程のみで生成されている。そのため、衝突併合過程で粒子種間の変換が行われないと、固相の粒子種間で過大評価、過小評価を生じ誤差が大きくなると推察される。

これらの結果から、粒子種選択に関して積分回数を減らしたとき、液相の粒子の計算結果は変化しないが、固相の粒子に関して粒子種間で結果に誤差が大きくなる可能性がある。

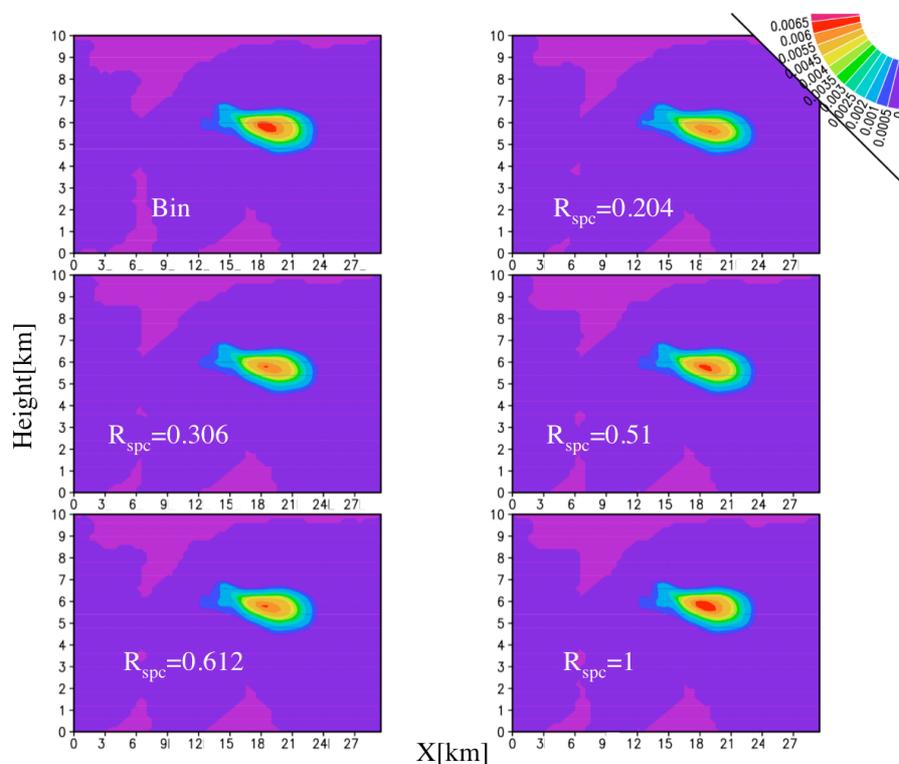


図 3-1 6 : $R=0.124$ の時の雪水量 (単位は $[\text{kg}/\text{m}^3]$) の時間積算量。縦軸は高さ $[\text{km}]$ を、横軸は水平方向の距離 $[\text{km}]$ を表す。 R_{spc} は粒子種選択に関して従来のビン法の積分回数を 1 としたときの統計的手法の積分回数を表す

次に計算コストと誤差の評価を行う。図 3-1 7 は対流雲を仮定した実験での計算コスト(CPU Time)と積分回数の関係である。粒子種を選択、ビンの選択に対しても層状の雲を仮定した実験と同様に、積分回数に対して、線形に計算コストが減少していく。

図 3-1 8 は積分回数と誤差の関係である。誤差は層状性の雲を仮定した実験と同様に積分回数が増加するにつれ指数関数的に減衰していく様子が見て取れる。なお図 3-1 8 では、誤差は全計算領域の累積値を用いて算出した。

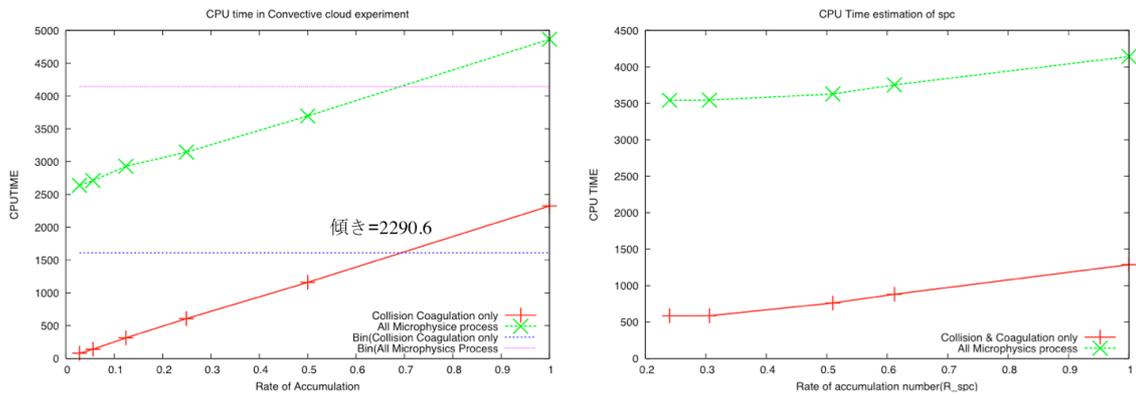


図 3-1 7 : 対流雲を仮定した実験での、積分回数と計算コストの関係。横軸は従来のビン法の積分回数を 1 とした時の統計的手法のビン選択 (左)、粒子種選択 (右) に対する積分回数、縦軸は計算時間を表す。赤線 (衝突併合過程のみ) および緑線 (全ての雲微物理過程) が統計的手法での計算コスト、青線 (衝突併合過程のみ) およびピンク線 (全ての雲微物理過程) が従来のビン法での計算コストを表す

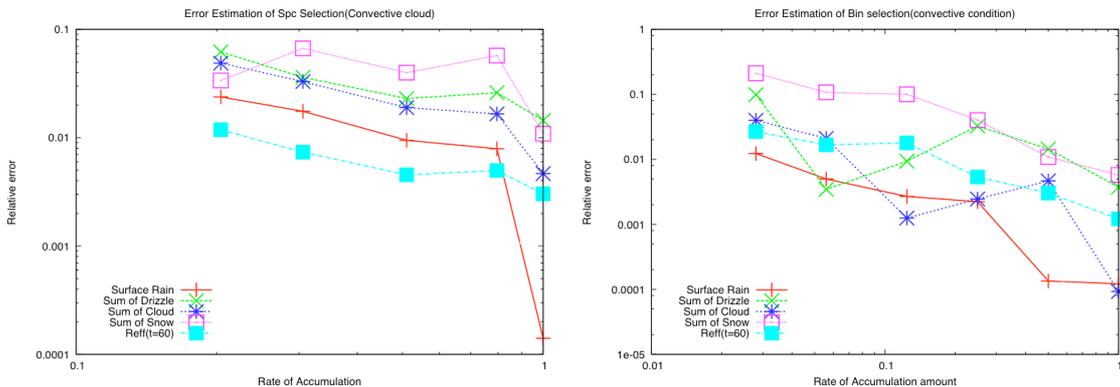


図 3-1 8 : 従来のビン法を真値とした時の統計的手法の相対誤差と、積分回数の関係。縦軸は相対誤差、横軸は従来のビン法の積分回数を 1 とした時の統計的手法の粒子種選択 (左)、ビンの選択 (右) に対する積分回数である。赤線は地表面の雨、緑線はドリズル水量の時間積算値、青線は雲水量の時間積算値、ピンク線は雪の時間積算値、水色線は計算開始から 60 分後の雲粒有効半径の相対誤差をそれぞれ表す

0次元のボックスモデルで妥当と見積もられた $R=0.056$ で全ての粒子種の組み合わせを計算した場合 ($R_{spc}=1$)、誤差は有効半径で 3%程度、地表面の雨で 1%程度である。

また図 3-8 と図 3-1 7 の計算コストを見ると、図 3-8 の計算コストの直線

で近似した時、傾きが 118.2 であるのに対して、図 3-17 の傾きは 2290.6 となり、対流雲を仮定した方が計算コストの削減率が高い。これは対流性の雲の方が層状の雲より衝突併合過程がより活発に起こっていることを考えれば自明である。すなわち、衝突併合過程が活発に起こる雲の計算ほど計算コストの削減が見込まれる。

また雪の時間積算値に関しては 10% 程度の誤差が生じ、雪も含めた固相の粒子に関しては、同じ積分回数でも乱数の初期値に依存して計算結果が異なることがある。

3-3、誤差とビンの数の関係

3-2 節ではビンの数を 60 ビンとして実験したが、3 次元モデルへ拡張すると、計算コストの制約から、60 ビンより少ないビンの数で実験することが予想される。また 3-2-3 章では乱数の初期値に依存して固相の粒子に関して結果が異なることがわかった。ところが現実場の再現実験等を行う時は、アンサンブル実験のような実験以外では乱数の初期値は 1 通りの実験しか行わない。

そのため、ビンの数を変化させた場合の誤差や、乱数の初期値が異なることによる計算結果の違いがどのような特徴を持つかを調べておく必要がある。そこで 30 ビン、90 ビンで 60 ビンと同じ条件で対流雲を仮定した実験を行い、誤差と積分回数の関係、および乱数の初期値が異なることによる計算結果の影響の指標として相対標準偏差の傾向を考察した。

図 3-19 は 30、60、90 ビンでの地表面の雨および雪の時間積算値に関する積分回数と誤差の関係および、乱数の初期値が異なることによる相対標準偏差のプロットである。これを見ると、誤差と積分回数の関係はビンの数に依存せず、指数関数的に減衰していく挙動を示している。これに対して、乱数の初期値の違いによる結果の相対標準偏差はビンが少なくなるほど大きくなり、ビン数が少ない方が乱数の初期値が計算結果に及ぼす影響が大きくなることが示唆される。

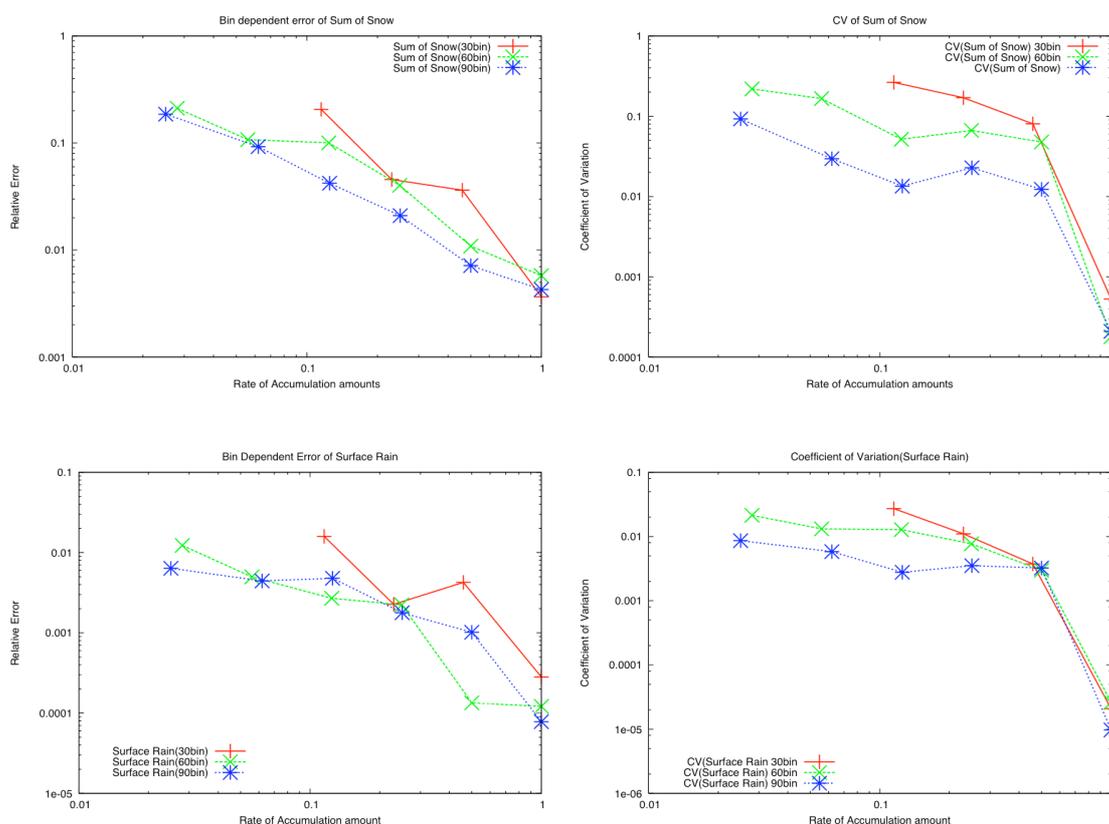


図 3-1 9 : 雪の時間積算値（上段）と地表面の雨（下段）の時間変化に関する誤差と積分回数（左）のプロットと、乱数の初期値が異なることによる相対標準偏差（右）の関係のプロット。それぞれ、赤線が 30 ビン、緑線が 60 ビン、青線が 90 ビンでの結果である。横軸は R を表し、縦軸は相対誤差（左）と相対標準偏差（右）を表す

以上から以下のことが示唆される。統計的手法を適用した 2 次元モデルは従来のビン法を真値とした時、誤差は積分回数が増加するに従って指数関数的に減衰していく。0 次元ボックスモデルの考察では、水雲に関しては、ビンの選択に関して積分回数を従来のビン法の 6% 程度 ($R=0.056$) まで削減することが可能と見積もられる。しかし、この場合も誤差は生じる（雲粒有効半径に対して層状雲の実験では 0.1% ; 図 3-8、対流性の雲で 3% 程度 ; 図 3-1 8）。そのため、統計的手法を適用したモデルを利用する際には対象とする現象によって許され得る誤差を決め、それをもとに積分回数を妥当に決めるべきである。

また乱数の初期値を変化させた時と粒子種選択に関する積分回数を減少させた時は同じ積分回数でも、固相の粒子で計算結果が異なるという性質を持っている。これらの差はビンの数が少ないほど大きくなる傾向がある。これに関し

では3-5節で議論をする。また雲微物理過程において衝突併合過程が活発に起こっている雲の計算ほど計算コストの削減が見込まれる。

3-4、3次元領域モデルへの適用

本研究で開発した統計的手法を3次元モデルに適用した。ここではそのテスト実験の結果を示す。

使用したモデルは *Iguchi et al.(2007)* で開発された3次元領域モデルである。このモデル（以下、親モデル）とこのモデルの衝突併合過程に統計的手法を導入したモデルの2つの結果を比較した。

モデルの解像度、計算領域は2章で記述したとおりである。計算期間は2003年4月7日18UTC~2003年4月8日3UTCであり、この期間中に計算領域付近を低気圧に伴う寒冷前線が通過する。図3-20に計算期間に対応する天気図と、MODISにより観測された衛星画像のスナップショットを示す。

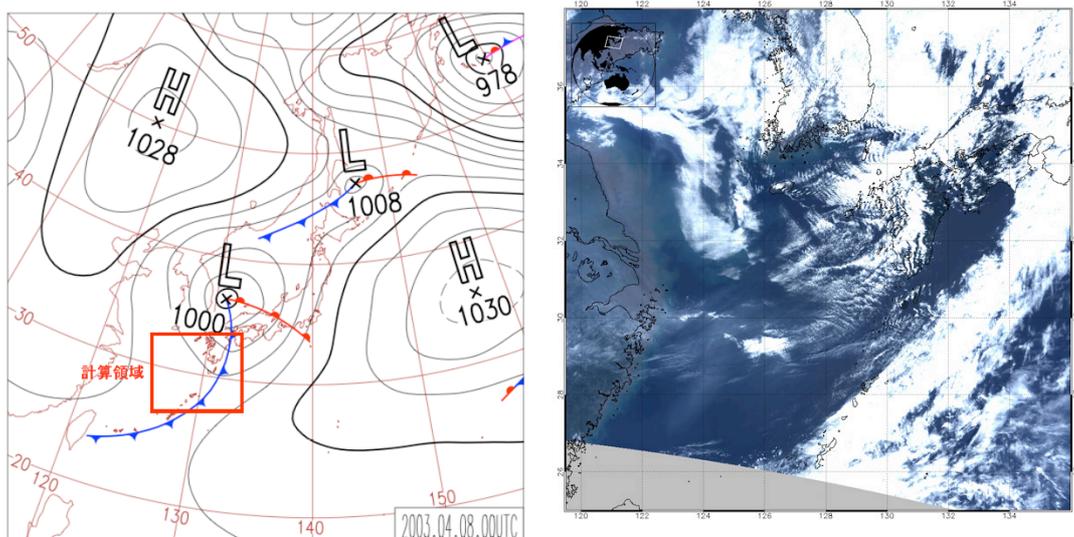


図3-20：実験期間中の天気図（左）とMODIS画像（右）。

天気図は気象庁より提供、MODIS画像は東海大学中島孝教授提供

図3-21に統計的手法を導入したモデルと親モデルで計算された、計算開始から9時間後（2003年4月8日2UTC）の水雲の光学的厚さを示す。なお積分回数は、 $R_{spc}=1$ 、 $R=1\sim 0.027$ の範囲で実験を行い、図3-21は積分回数ビン選択に関して3%程度（ $R_{spc}=1$ 、 $R=0.027$ ）に相当する時の計算結果である。

これを見ると、計算結果の概略はおおよそ親モデルと一致しているが、一部に親モデルと異なる結果が得られている。また親モデルとの誤差は、寒冷前線

付近の光学的厚さが大きい付近で大きくなっている（図は省略）。

光学的に厚い対流雲は光学的に薄い雲に比べ衝突併合による雲粒の成長が盛んに行われている。そのため親モデルと計算手法の異なる衝突併合過程の計算モジュールが呼ばれる回数が多くなり、その結果として親モデルとの差が大きくなっている可能性がある。

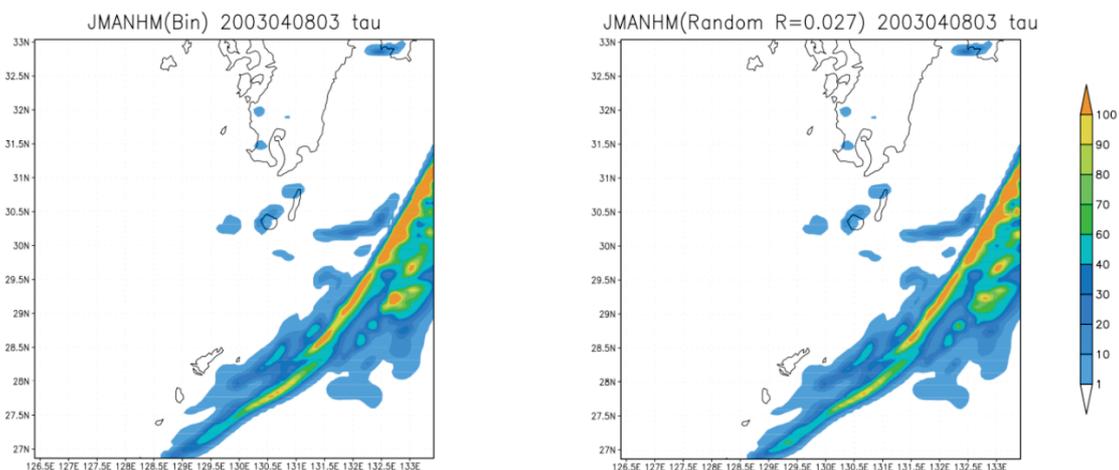


図 3-2-1 : 計算開始から 9 時間後 (2003 年 4 月 8 日 2UTC) の水雲の光学的厚さの計算結果。右図が親モデルで、左図が統計的手法を導入したモデルで計算した結果である。

横軸は経度を、縦軸は緯度を表している

また図 3-2-2 は 3 次元モデルでの積分回数と誤差の関係をプロットした図であり、誤差は図 3-1-8 で示した 2 次元モデルでの誤差と同様に積分回数が増加するのに伴って指数関数的に減衰している。

また計算コストの指標となる CPU Time と積分回数の関係を図 3-2-3 に示す。計算コストは 2 次元のモデルと同様に積分回数に比例して減少し、計算コストが削減できていることが見て取れる。

本研究で扱った事例では主に寒冷前線付近で雲が発生しているが、本事例よりも雲が発生する事例では、衝突併合過程の計算モジュールが呼ばれる回数が多くなるため、より計算コストの削減が期待できる。しかしながら前述のように衝突併合過程の計算モジュールが呼ばれる回数が増えると親モデルとの誤差が大きくなる。そのため 2 次元の時と同様に、対象とする現象によって誤差をどこまで許すかを決めた上で、積分回数を妥当に決めるべきである。

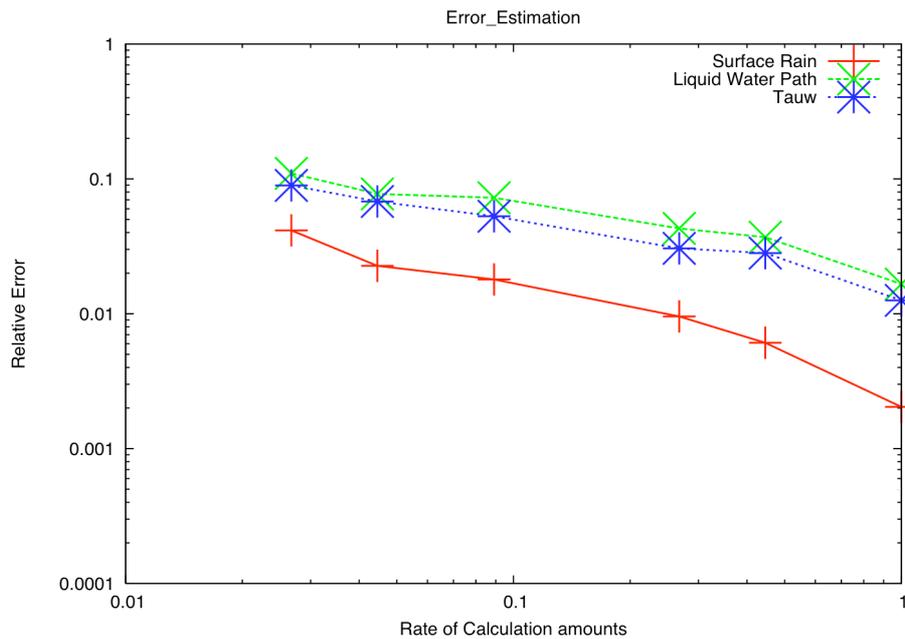


図 3-2 2 : 3 次元の親モデルを真値とした時の統計的手法を導入したモデルの相対誤差と、積分回数との関係。縦軸は相対誤差、横軸は図 3-1 8 (右) と同じである。赤線は地表面の雨、緑線は Liquid Water Pass、青線は水雲の光学的厚さを表す

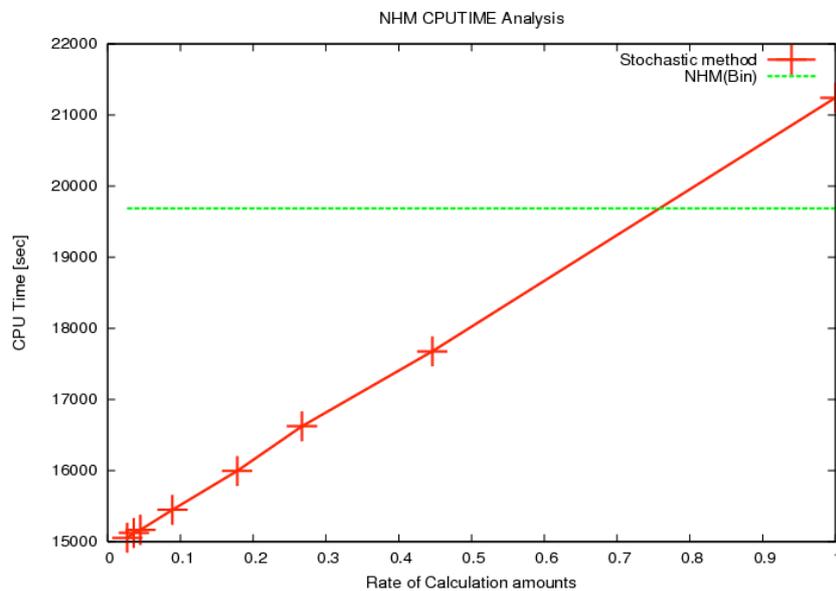


図 3-2 3 : 3 次元モデル実験での、積分回数と雲微物理も含めた全過程での計算コストの関係。横軸、横軸は共に図 3-8 と同じである。赤線が統計的手法での計算コスト。緑線が親モデルでの計算コストを表す

3-5、考察1（スキームに関して）

統計的手法を用いた場合、従来のビン法に比べて計算コストを削減することが可能であるという見積もりを立てることができた。しかしながら、統計的手法は計算に乱数を用いるため、乱数の初期値に依存して結果が異なり、特に固相の粒子を予報する際に、モデルで考慮されている粒子種間で結果が大きく異なるという性質が明らかになった。そのため統計的手法を用いたときの、乱数の初期値に依存する誤差について議論が必要である。

ここでは、その計算結果の誤差について主に考察し、後半は衝突併合過程以外の雲微物理過程からもビン法の計算コストについて議論する。

3-5-1、統計的手法と衝突回数

統計的手法は衝突併合の計算において、積分回数を少なくすることで計算コストを削減する手法であった。積分回数を少なくすることは換言すれば、 dt 間に衝突回数を少なくすることと同義である。図 3-3 では積分回数を少なくしすぎた場合、ドリズルモードに成長の遅れが見て取れたが、これは前述した原因に加えて、積分回数が少なくなったことによってモデル中での衝突回数が減少したことにも起因する。

図 3-2 4 は統計的手法を用いて dt を $1, 0.5[s]$ の 2 通りで 0 次元ボックスモデル（60 ビン、 $R=0.006, 0.012$ ）を用いて計算した時の粒径分布関数の時間変化をである。これをみると、 $dt=1[s](R=0.006)$ の時、 $t=2400[s]$ で半径が $100[\mu m]$ 付近に顕著に見てとれた成長の遅れが dt を短くすると ($dt=0.5[s], R=0.006$)、解消されている。 dt が短くなると、同じ積算時間でも、衝突併合過程を計算する回数が増加するため、全体として積分回数が増加する。そのためモデル中で衝突回数も増加し、成長の遅れが解消していると考えることができる。その証拠に R を大きくして積分回数を増加させて、モデル中での衝突回数を増加させると ($R=0.012$)、 $dt=1[s]$ でも成長の遅れは生じていない。よって積分回数は、モデル中の衝突回数が十分に多くなるように設定すれば、成長の遅れは生じないと示唆される。

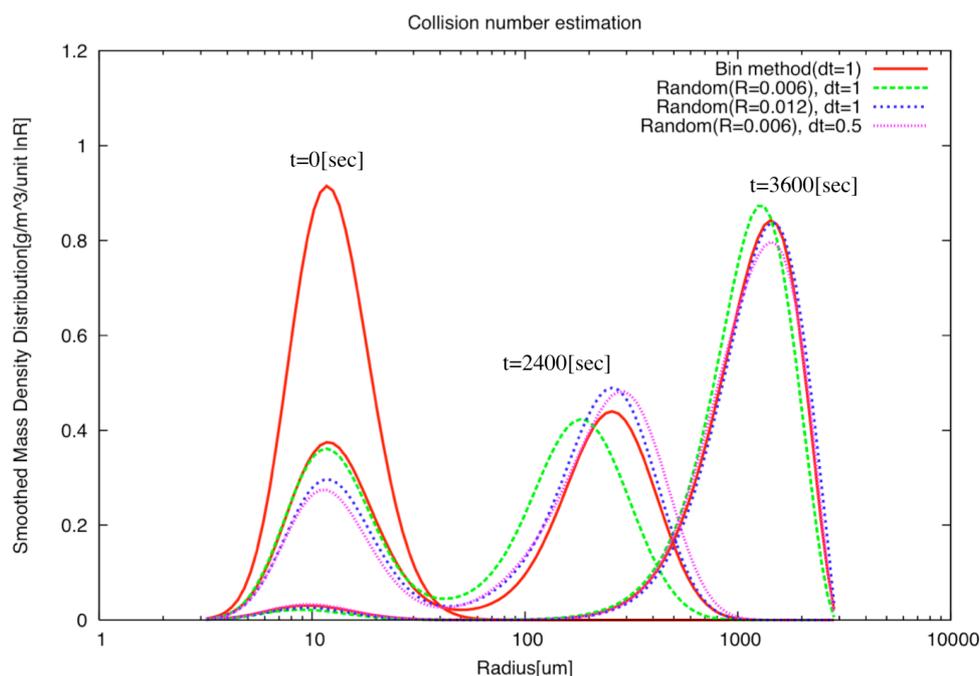


図 3-2 4 : 60 ビンの 0 次元ボックスモデルを用いて計算された粒径分布関数の時間発展の様子。縦軸は質量密度、横軸は半径を表す。赤線は従来のビン法の結果であり、緑線($dt=1, R=0.006$)、青線($dt=1, R=0.012$)、ピンク線($dt=0.5, R=0.006$)はそれぞれ統計的手法で計算した結果である。また図 3-2 のように統計的手法を用いた結果で粒径分布関数がガタガタした形になるため、スムージングをかけてある

従来のビン法では衝突回数に限らず全てのビン・粒子種の組み合わせを計算したが、現実には衝突回数が非常に少ない場合は統計的手法を用いた少ない回数の積分でも十分に衝突回数が計算され、成長の遅れは生じない。そこで、現実の雲では衝突回数がどれほどのオーダーであるのかを見積もった。

おおよその見積もりであるので、図 3-2 5 の簡単なモデルを用いる。この時ある時刻 Δt 間にサイズの半径 R の大きな粒子 1 個が半径 r の小さい粒子衝突する回数($M_{collision}$)は、式(3-5)のようにかける。

$$M_{collision} = \pi(r+R)^2 |U(R) - U(r)| E(R,r) \Delta t N, \quad E = \frac{x^2}{(R+r)^2} \dots (3-5)$$

ただし r, R は粒子半径、 N は小さい粒子数濃度、 $U(R)$ は落下速度、 E は衝突係数をそれぞれ表す。

雲、雨、霧、氷の典型的な粒径は *Rogers and Yau (1989)* より表 3-1 に与えられる値を用いる。またこれまでのモデルで使用した dt と同じく $\Delta t=1[s]$ とした。

衝突回数を見積もるモデル

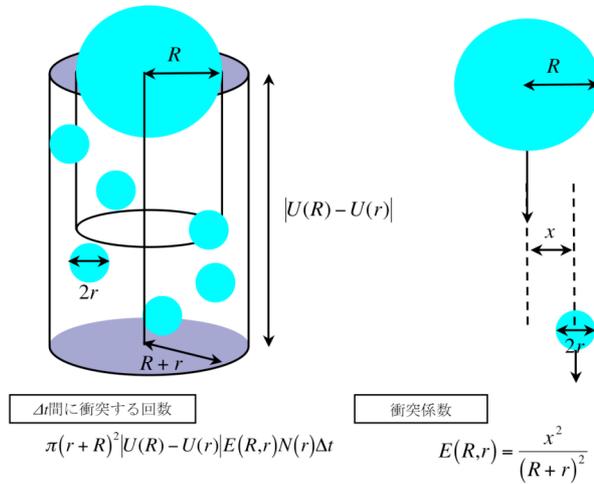


図 3-2 5 : 衝突回数を見積もるモデル

表 3-1 : 見積もりに用いた雲粒、霧粒、雨粒、氷晶等の粒子半径[μm]、数濃度[個/cc]、落下速度[m/s] (Rogers and Yau, 1989)

	粒子半径[μm]	数濃度[cc]	落下速度[m/s]
雲	10	10^3	10^{-2}
霧(Drizzle)	100	1	1
雨	1000	10^{-3}	~ 10
氷	100~1000	$10^{-4}\sim 10^{-1}$	~ 3

(値はRogers and Yau, 1989より引用)

雲粒が雨粒 1 個と衝突することを考えると

$$\pi(R+r)^2 \approx 10^{-6}, \quad V(=|U(R)-U(r)|) \approx 10, \quad N = 10^3[\text{cc}^{-1}] = 10^9[\text{m}^{-3}], \quad \Delta t = 1$$

であるので、 $M_{\text{collision}} \approx 10^3 = 1000$ [回]となる。これは雨粒 1 個が雲粒と衝突する回数であったので、雨粒を全て含めた衝突回数は 10^6 [回/ m^3]となる。

同様に雲粒が霧粒と衝突する場合、霧粒が雨粒と衝突する場合、氷が霧粒と

衝突する場合、氷が雲粒と衝突する場合のそれぞれの衝突回数のオーダーは以下のようになる。

$$\text{雲粒が霧粒と衝突する場合：} M_{\text{collision}} \approx 10^7 [\text{回}/\text{m}^3]$$

$$\text{霧粒が雨粒と衝突する場合：} M_{\text{collision}} \approx 10^3 [\text{回}/\text{m}^3]$$

$$\text{氷晶が雲粒と衝突する場合：} M_{\text{collision}} \approx 10^1 \sim 10^8 [\text{回}/\text{m}^3]$$

モデルの各グリッドのサイズが数百[m]×数百[m]であることを考えると、1グリッドあたりでの dt 間の衝突回数は、最も少ない氷晶と雲粒が衝突する場合でも 10^6 [回]程度であり、前述の衝突回数が少ないという事実は理論的な見積もりからあり得ないことが示唆される。そのため、衝突併合過程の計算は、従来の方法のように全てのビンの組み合わせの計算をすべきである。その意味から、統計的手法は近似計算として扱うことになり、その妥当性を誤差の評価をした上で探る必要がある。よって次節では統計的手法の妥当性を評価する。

3-5-2、観測との比較

統計的手法は衝突併合過程に関してはランダムな誤差を含んだ計算が行われている。そのため粒径分布の計算結果もなめらかな形にはならない（図3-1～図3-2）。1990年代に航空機観測によって雲粒の粒径分布を測定する試みが成されているが、それによると航空機観測データは比較的一様な雲でさえ、粒径分布関数は滑らかな形ではない。これは自然現象が常に一様ではないことを考慮すれば自然であるが、このような粒径分布の非一様性の効果をモデルで表現する場合ランダム誤差を予報変数に与えて計算する必要がある（例えば3-5-3節で行う実験のように初期値に摂動を与える）。

統計的手法では、衝突併合過程に関してはランダムな誤差を作り出すため衝突併合過程の結果生じる粒径分布の非一様性を表現することができ、航空機観測で得られる粒径の非一様性が衝突併合過程から生じるか否かを調べることができる。また統計的手法で表現された非一様性が航空機データなどの観測で得られる粒径分布の非一様性よりも小さければ、統計的手法の誤差は自然現象にみられる非一様性の範囲内に収まることになるため、統計的手法の誤差は問題にならない。そこで衝突併合過程で生じる計算結果の非一様性と航空機観測によって得られる物理量の一様な値からのズレの大きさを比較した。

用いた航空機データは1998年2月2日、奄美大島付近の(129E,29N)を中心とした約($\pm 1\text{E}$, $\pm 1\text{N}$)の領域での観測である。観測される雲微物理量は、粒径分布(1[μm]~45[μm])、雲水量、有効半径、平均粒径等である。本事例で観測された

のは比較的一様な層積雲（高度は2[km]以下）である。

本来雲は完全に一様な粒径をとらないが、観測された雲をほぼ一様と仮定して、観測期間中の雲粒有効半径の平均と標準偏差を算出する。

一方モデルでは、観測と同日の、航空機の経路付近の観測点でのエマグラムと *Suzuki et al.(2006)*を参照した図3-26（層状の雲が生成することを仮定）の力学場を初期条件として、統計的手法を用いて計算し、生じた雲がほぼ一様な粒径を持つとして雲内の雲粒有効半径の平均と標準偏差を算出する。

両者を比較して、衝突併合過程で生じるランダム誤差の大きさが一様な雲に存在するランダムな誤差のうち、どの程度に相当するかを考察する。また比較のために、従来のビン法でも同様の実験を行った。

なお計算領域は水平30[km]($dx=0.5[km]$)、鉛直5[km]($dz=0.05[km]$)、積算時間は1時間($dt=1$ で3600step)とした。また積分回数は0次元ボックスモデルで計算結果が崩れないと見積もられた $R=0.056$ （積分回数が従来の6%程度）とし、高度2[km]の下層雲を仮定した実験であるため、水雲のみの実験とした。

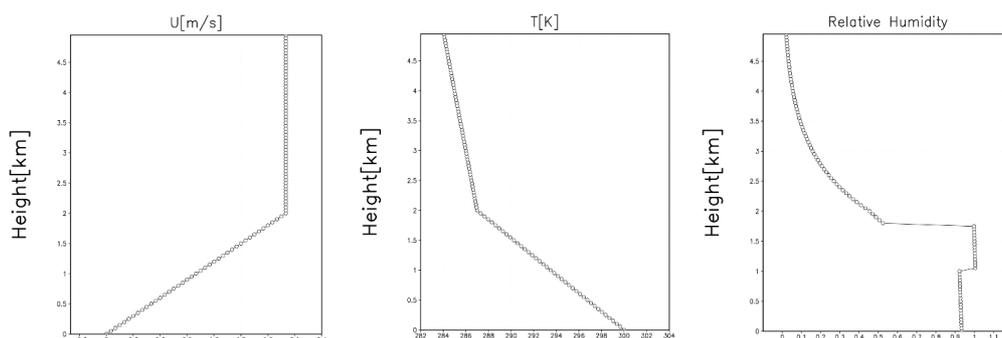


図3-26：航空機観測データと比較するために行った実験の初期の力学場

モデルの計算結果は各時刻、各グリッドで有効半径が算出されるが、比較対象にしたのは、雲が発生した直後($t=25[min]$)、雲粒が成長しドリズルが生成し始めた時刻($t=30[min]$)、およびドリズルが増加しわずかに雨粒が生成されている時刻($t=40[min]$)の3通りである。

表3-2はモデルで計算された雲粒が存在する全てのグリッドで平均を取った有効半径と標準偏差、および航空機観測から得られた1つの雲の平均有効半径と標準偏差である。これをみると、モデルの結果から算出された標準偏差は航空機観測から得られた有効半径の標準偏差よりもオーダーにして1桁大きく、これは統計的手法を用いない場合（従来のビン法）でも同様である。よって航空機観測から得られた時空間のランダム誤差よりも数値モデルにおける時空間

のランダム誤差が遥かに大きく、航空機観測データで得られているランダム誤差が衝突併合過程によって発生するか否かに関して考察することはできない。

しかしながら、従来のビン法での標準偏差と統計的手法の標準偏差を比較するとその差は非常に小さく、差分は航空機観測から得られた標準偏差よりもオーダーにして2桁小さい。そのため、衝突併合過程で生じるランダム誤差は小さく、観測で得られる自然現象に存在しているランダム誤差よりも大きな誤差が生成されることは無いことが示唆される。

表 3-2 : 航空機観測とモデルから算出された雲内の雲粒平均有効半径 [μm] と標準偏差

	有効半径(r_{eff})	標準偏差(σ)
t=25,Random	11.776	0.30504
t=25,Bin	11.778	0.30505
t=35,Random	11.719	0.43937
t=35,Bin	11.724	0.43915
t=40,Random	9.2868	0.66114
t=40,Bin	9.3037	0.66107
Aircraft	10.7089	0.01364

この結果は統計的手法が妥当であることを示唆できる1つの材料である。

3-5-3、統計的な誤差と初期値による誤差

モデルの初期値として用いる力学場などは観測を基に決定される。しかしながら初期値には観測誤差や推定誤差といった誤差が必ず存在する。

将来的に統計的手法を領域モデルなど、雲微物理以外のモジュールと共に使用するとき、統計的手法によって生じる計算結果の誤差を小さくしても、初期値の誤差によって計算結果が大きく変化し、その誤差が統計的手法による誤差よりも遥かに大きければ統計的手法の誤差は問題にならない。

これまで本研究の2次元モデルの実験では主に $dt=1[s]$ として計算を行った。初期値としてあたえる力学場の物理量はある時刻の瞬間値であるが、その値を計算開始から dt 間の値として代表している。ところが dt の間にも乱流の影響により初期値は変化し得、それが原因で計算結果に誤差が生まれることにもなる。

この力学場の初期値に依存する誤差と統計的手法の乱数の初期値に依存する誤差の比較を行った。方法は以下の通りである。

Suzuki(2004)で開発されたモデルを用いて（統計的手法は導入しない）、図3-5下段で与えられる初期条件で、気温の初期値に何通りかの摂動を与えた計算を行う。それにより得られた結果の平均をとり、個々の計算結果の平均からの相対標準偏差を算出する。このようにして得られた相対標準偏差は気温の初期場の摂動によって計算結果がどれほど異なるかの指標である。

初期場の変動を与える物理量に温度場を選択したことは、乱流等による観測が比較的存在していること、および、モデルの初期値として変動させることができる物理量の中で結果に対する感度が最も大きい（感度実験の結果の図は省略）という2つの理由による。

次に統計的手法を導入したモデルに図3-5下段で与えられる初期場を用いて、初期の力学場は固定し、積分回数が同じで、乱数の初期値を変化させて何通りかの実験を行って平均を取り、個々の計算結果の相対標準偏差を算出する。このようにして得られた相対標準偏差は統計的手法自体の誤差（乱数の初期値がことなること）に起因して計算結果がどれほど異なるかの指標となる。以上の2つの標準偏差を比較することにより、統計的手法において乱数の初期値が異なることによる計算結果の違いが相対的にどのくらいの大きさであるかを見積もる。

なお、気温の摂動は乱流観測データ（Kinoshita, 2003）を参照して、式(3-6)のように正規分布で20通り与えた。この摂動は観測データ中で最も乱流による気温の変動が小さく、穏やかな事例を基に作成した。

$$\delta T = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \dots (3-6)$$
$$\mu = 300[K], \quad \sigma = 0.48$$

図3-27は実験により算出された雲粒有効半径と雪の時間積算値の標準偏差である。これを見ると、統計的手法で積分回数をいかに削減しても、気温の初期値に起因する標準偏差のほうが、乱数の初期値に起因する標準偏差より大きい。またこの傾向は表示した物理量以外の雲水量、氷水量など出力されるすべてのパラメータで見られた。

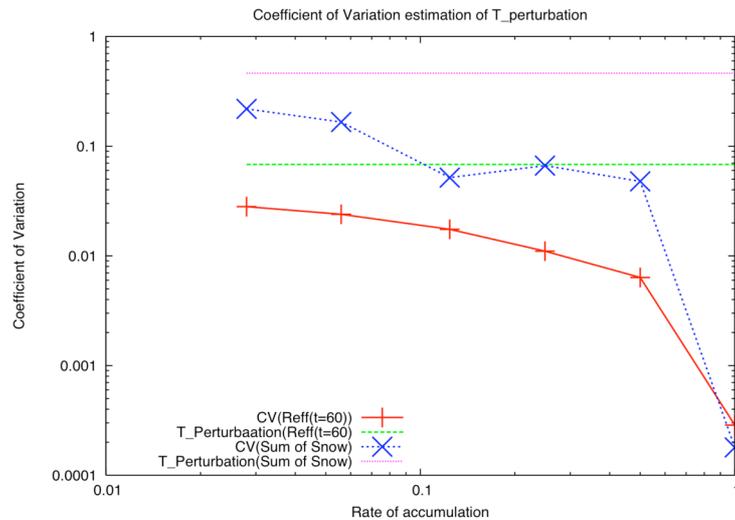


図 3-27 : 雪の時間積算値と計算開始から 60 分後の雲粒有効半径の相対標準偏差のプロット。縦軸は相対標準偏差、横軸は図 3-5 の R と同値である。赤線は雲粒有効半径の乱数の初期値に起因する相対標準偏差。緑線は気温の初期場によって生じる雲粒有効半径の摂動の標準偏差である。青線は雪の時間積算値の乱数の初期値に起因する相対標準偏差、ピンク線は気温の初期場によって生じる雪の時間積算値の相対標準偏差

よって、乱数の初期値に起因する計算結果への影響よりも気温の初期値に起因する計算結果への影響が大きく、力学場が乱流などによって大きく変動している条件下では乱数の初期値による誤差は相対的に小さいといえる。また図 3-19 では雪の時間積算値に 10% を超える誤差が生じていたが、図 3-27 をみると、初期の力学場によって 40% 程度平均値から誤差を生じる可能性があり、いかに乱数の初期値による誤差を小さく保っても初期の力学場によって計算結果が大きく変わることを示している。

この事実は 3-5-2 章と同様に、乱数の初期値によって計算結果が異なるという特徴をもつ統計的手法が十分に使用できることを示唆する。また気温以外の初期場が計算結果に及ぼす影響に関しても見積もるべきである。しかし前述のように観測データを入手するのが困難であり、式(3-6)のような摂動を妥当に与えることができない。そのため気温の初期値に関する議論のみにとどめた。

以上から、統計的手法は乱数の初期値によって結果が異なるという特徴をもっており、0 次元ボックスモデルで妥当とされた積分回数が従来の 6% 程度の場合 ($R=0.056$) でも計算結果に誤差が生じる。そのため実際に現実場の再現を行

うことを目的とした実験では、対象とする現象に対して誤差が許される範囲内になるよう積分回数 R を妥当に設定する必要があるということが示唆された。

本章では2つの事例として、初期の力学場が雲の成長過程に及ぼす影響と航空機で観測される事例を基に比較した。それらによると、乱数の初期値が計算結果に及ぼす影響は本章で扱った2つの事例に関しては十分に小さく、統計的手法は現実場に適用するに足る手法であるということが示唆される。

3-5-4、凝結成長過程のスキーム開発

本研究ではこれまでに、衝突併合過程に着目して計算コストの削減を試みた。しかしながら、衝突併合過程のみではなく、凝結成長過程の計算コストも高く(表2-1)、凝結成長過程計算の高速化を試みるべきである。ここでは凝結成長過程の計算コスト削減に関して本研究で行った内容を記述する。

3-5-4-1、従来の凝結成長過程の計算方法と本研究で用いた方法

凝結成長過程による雲粒子の成長速度は式(3-7)で与えられる。この成長速度に粒径分布関数を乗じたものが粒径空間上での粒子数密度のフラックスを与え、式(3-8)のようになる。この数密度フラックスの収束・発散によって着目しているサイズの数密度が増減する。そのため、凝結成長過程による粒径分布の変化は式(3-9)のように与えられる。

$$\frac{dm}{dt} = C^{(\mu)}(m)G^{(\mu)}(T)S^{(\mu)} \dots (3-7)$$

$$F^{(\mu)}(m) = f^{(\mu)}(m) \frac{dm}{dt} = f^{(\mu)}(m)C^{(\mu)}(m)G^{(\mu)}(T)S^{(\mu)} \dots (3-8)$$

$$\frac{\partial f^{(\mu)}(m)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial m} F^{(\mu)}(m) = -\frac{\partial}{\partial m} (f^{(\mu)}(m)C^{(\mu)}(m))G^{(\mu)}(T)S^{(\mu)} \dots (3-9)$$

モデルではこの式(3-9)を離散化されたビンに対して解くことにより、分布関数の変化を計算する。質量の対数座標でビンに離散化されているため、(3-9)を対数スケール($\eta = \ln(m)$)に変数変換すると、式(3-10)のようになる。

$$\frac{\partial f^{(\mu)}(\eta)}{\partial \eta} = -\frac{\partial}{\partial \eta} (f^{(\mu)}(\eta)U^{(\mu)}(\eta)), \quad U^{(\mu)}(\eta) = \frac{C^{(\mu)}(m)}{\exp(\eta)} G^{(\mu)}(T)S^{(\mu)} \dots (3-10)$$

この(3-10)第1式は粒径分布に対する移流方程式であり、第2式は移流速度に対応する。この移流方程式を数値的に解く際に、従来のモデルでは *Bott(1989)* のスキームを用いていた。これは前方差分的に移流方程式を解くスキームであるため、数値的に解く際に CFL 条件によって dt の上限に制約が生じる。そのためタイムステップ dt がその上限を超えた場合は、時間ステップを必要なだけ分

割して計算を行うという処理が行われている。この制約により、凝結成長過程の計算コストが膨大なものになってしまう。

そこで、本研究では、式(3-10)を解く際に、陰解法を用いることにより、CFL条件の制約を排除し、凝結成長過程の計算を高速化することを試みた。

具体的には、式(3-10)を離散化する際に、式(3-11)のように時間方向に後方差的に離散化し、1つ先にタイムステップの粒径分布関数 f^{n+1} を式(3-12)のように逆行列を解くことによって求める。なお、上付き文字の $n, n+1$ は空間方向の、 $i, i+1$ は時間方向のグリッド番号を表す。

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} = \frac{f_{i+1}^{n+1} - f_i^{n+1}}{\Delta x} \dots (3-11)$$

$$\begin{pmatrix} \overline{f_1^n} \\ \overline{f_2^n} \\ \vdots \\ \overline{f_{i-1}^n} \\ \overline{f_i^n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\lambda & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1+\lambda & -\lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & 1+\lambda & -\lambda \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1+\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{f_1^{n+1}} \\ \overline{f_2^{n+1}} \\ \vdots \\ \overline{f_{i-1}^{n+1}} \\ \overline{f_i^{n+1}} \end{pmatrix} \quad \left(\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)$$

$$\begin{pmatrix} \overline{f_1^{n+1}} \\ \overline{f_2^{n+1}} \\ \vdots \\ \overline{f_{i-1}^{n+1}} \\ \overline{f_i^{n+1}} \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} \overline{f_1^n} \\ \overline{f_2^n} \\ \vdots \\ \overline{f_{i-1}^n} \\ \overline{f_i^n} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1+\lambda & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1+\lambda & -\lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & 1+\lambda & -\lambda \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1+\lambda \end{pmatrix} \dots (3-12)$$

また、空間方向の離散化を行う際に、式(3-12)は1次上流差分を用いているが、この差分形式は精度が非常に悪い。そのため、本研究では5次精度の上流差分を用いた。空間方向の差分に対する精度の議論は付録2(B-2)に詳しく述べる。

表3-3は陰解法を用いて計算した場合のCPU Timeと従来のビン法で計算した場合のCPU Timeである。なお計算に使ったモデル、初期条件は凝結成長過程に陰解法を用いた以外は3-2-3章で使ったものと同じものを用い、ビンの数は30ビンでCPU Timeを計測した。

これを見ると、陰解法を用いた方が凝結成長過程の計算コストを35%程度まで削減できている。誤差等のスキームの評価については次節で扱う。

表 3-3 : 従来のビン法と陰解法を用いた場合の雲微物理過程の計算時間。単位は[sec]
陰解法を用いた場合の () 内の単位は[%]である

成長過程	従来のビン法	陰解法を用いた方法 (従来のビン法に対する割合:%)
核生成	2.98	3.07(103)
凍結・融解	3.45	3.49(101)
凝結成長	808.39	275.71(34.1)
衝突併合	325.13	433.63(133)
合計	1139.95	815.90(71.6)

3-5-4-2、陰解法の計算精度と問題

ここでは、導入した陰解法を用いた手法の評価を行う。ここでも統計的手法の評価と同じく従来のビン法を真値として比較を行った。

実験は力学場の初期条件に図 3-5 下段の深い対流が立つ条件を用い、30 ビンで 2 時間の積算を行った ($dt=1[s]$ で 7200 step, $dt=2[s]$ で 3600 step の 2 通り)。なお、計算領域、解像度に関しては 3-2-3 節のものと同じとした。

図 3-28、図 3-29 に $dt=1[s]$ で従来のビン法で計算した時と陰解法を用いて計算した時の、地表面の雨と上空 273[K]付近の層の雹、ドリズルの時間積算値と、雪の時間積算値を示す。これらを見ると雪の値に過小評価がある以外はおおよそ、従来のビン法に近い結果が得られている。

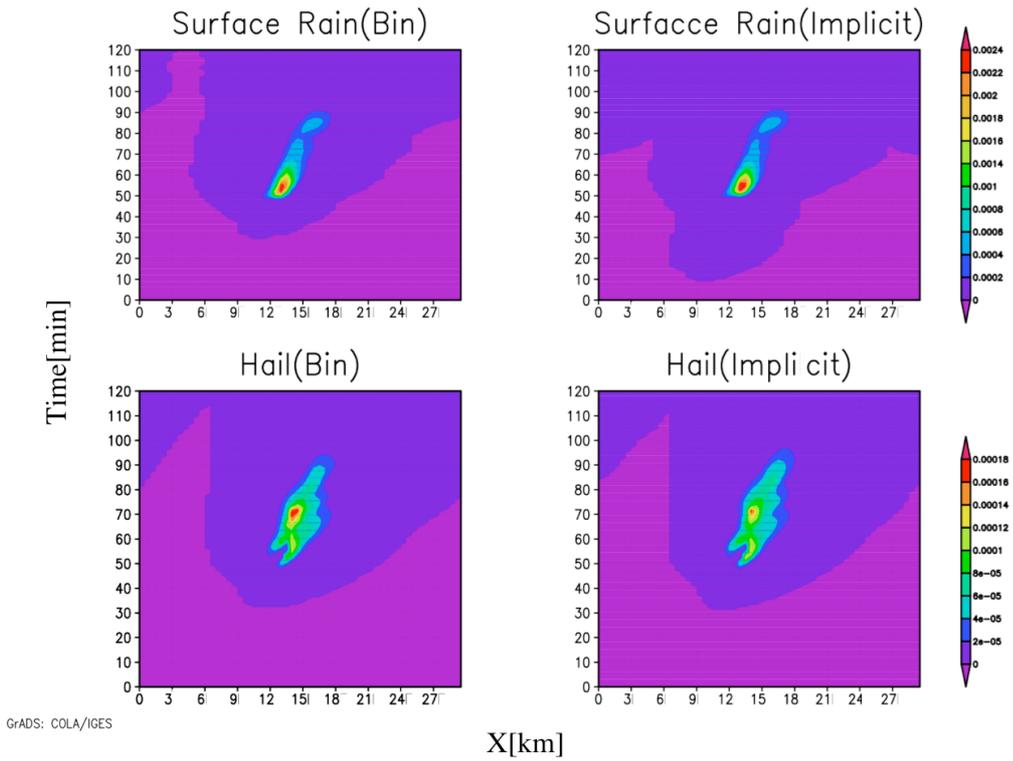


図 3-28 : $dt=1[s]$ で従来のビン法で計算した地表面の雨の時間変化(上段)と上空 0°C 付近の雹の時間変化(下段)。左が従来のビン法で計算された結果、右が陰解法を用いて計算された結果。縦軸が時間、横軸が水平距離[km]。単位は $[\text{kg}/\text{m}^3]$ である

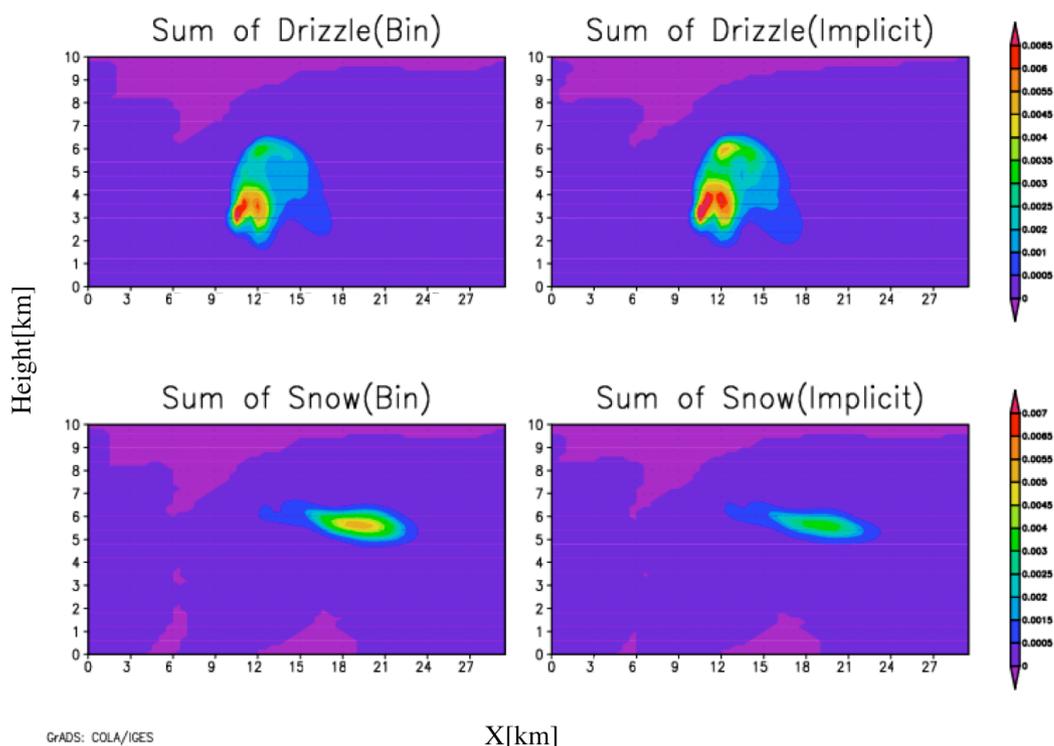


図3-29: $dt=1[s]$ で従来のビン法で計算したドリズルの積算値(上段)と雪の時間積算値(下段)。左が従来のビン法で計算された結果、右が陰解法を用いて計算された結果。縦軸が高さ[km]、横軸が水平距離[km]。単位は $[kg/m^3]$ である

図3-30は $dt=2[s]$ で計算した雪と氷晶の時間積算値である。 $dt=2[s]$ になると従来のビン法に対して雪や氷晶を著しく過大評価をしている。これは、 dt が大きくなったことにより、移流速度(成長速度と等価) U が1つのタイムステップの間で大きく変化してしまったことが原因となっている。 U は式(3-10)で表されるように、過飽和度、気温などの関数である。

水蒸気の凝結によって潜熱が大気中に放出されるため、大気中の気温は上昇し、それに伴って過飽和度は小さくなる。するとタイムステップの間にも移流速度(成長速度)が遅くなるが、 dt が長いと、タイムステップの前の移流速度を使用してしまうために、凝結による成長が卓越し、過大評価を生じる。従来の方法を用いた場合はこの問題はCFL条件をクリアーするために dt を細かく区切ったことにより問題とはならなかったが、陰解法を使って解く場合はこの部分が問題となる。

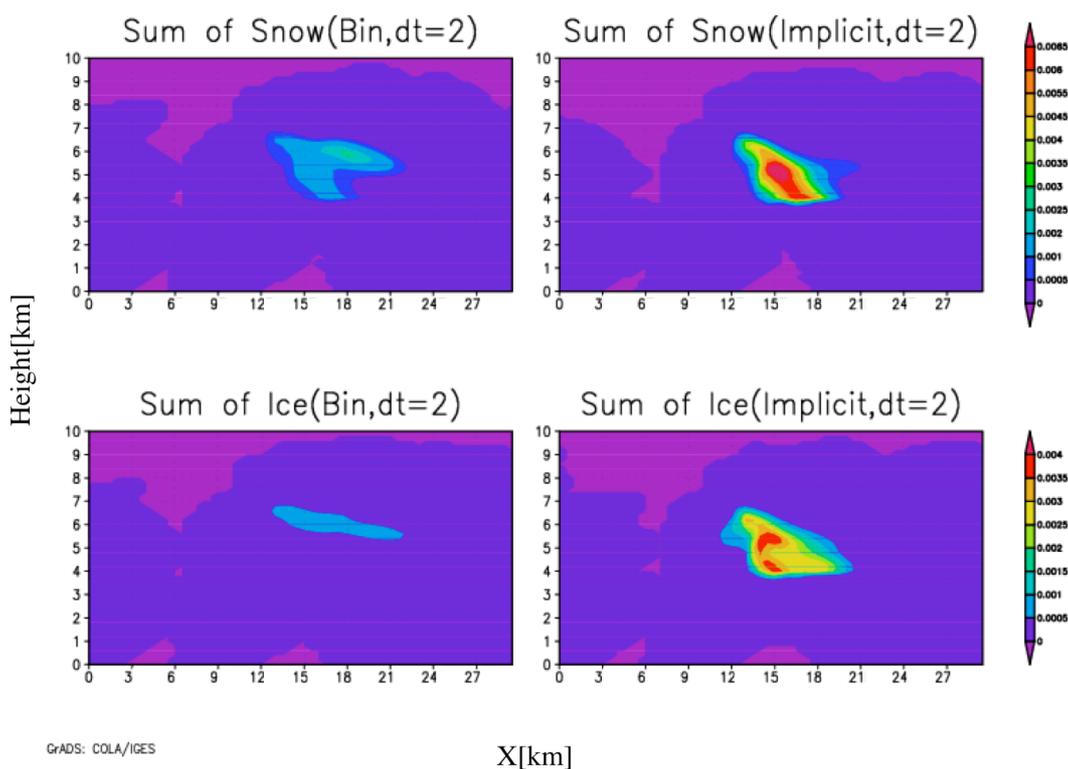


図 3-30 : $dt=2[s]$ で従来のビン法で計算したドリズルの積算値(上段)と雪の時間積算値(下段)。左が従来のビン法で計算された結果、右が陰解法を用いたで計算された結果。縦軸が高さ[km]、横軸が水平距離[km]。単位は $[kg/m^3]$ である

以上のように、凝結成長過程に陰解法を適用することにより、計算コストを削減することが見込まれるが、 dt が大きくなった時に精度が悪くなるという問題がある。また移流スキームの問題として、考慮しなければならない問題に保存性と非負性がある。本研究で用いた方法では非負処理として、負値が発生した場合は強制的に0にするという方法がとられているが、これは保存性の観点から最適な方法とは言えない。それらも含め、今後考察とスキームの改良が必要である。

3-6、スキーム開発のまとめ

本研究では将来的にビン法モデルを用いた全球雲解像実験を行うことを考慮に入れて、統計的手法を適用した。統計的手法の導入により、衝突併合過程の計算コストの削減に成功し、0次元ボックスモデルでの見積もりでは計算コストは従来の10%程度まで削減することが可能である。

誤差に関しては、統計的手法を使うことによって生じる誤差は積分回数の増

加に伴い指数関数的に減衰するが、統計的手法は乱数の初期値が異なると同じ積分回数でも、特に固相の粒子の計算結果が異なるという特徴を持っている。

本研究で行った2事例の見積もりによれば、モデルの力学場の初期条件に起因する計算結果への影響が乱数の初期値に起因する計算結果への影響よりも遥かに大きいことが示唆され、統計的手法は雲解像モデルとしては利用可能である。しかしながら、現実に適用する際には、対象とする現象に応じて、誤差が許され得る範囲を確定し、それを基に積分回数を妥当に決めることが望ましい。

また衝突併合過程の他に、凝結成長過程が計算コストを高くする原因となっており、衝突併合過程の計算コストを削減しただけでは、ビンモデルを効率よく動かすには至らない。

この問題を解決すべく、凝結成長過程に陰解法を導入して計算コストの高速化を図り、実際に計算コストの削減が見込まれる結果となった。しかし、タイムステップ dt を長くした場合の精度や保存性、非負性などの面で問題があり、現時点では凝結成長過程の計算コストを削減するには至らなかった。

しかしながら、この問題を解決すればビン法モデルを使った計算の効率が飛躍的に向上することが示唆され、これまでよりも空間的に広い現象を扱うことが可能になる。そのため、この凝結成長過程の高速化は今後取り組むべき課題である。

4、事例解析

3章までに開発した統計的手法導入したモデルを用いて、事例解析を行った。ここでは東-東南アジア、オーストラリアおよび西部太平洋のミクロネシア域における深い対流雲についての事例解析について記述する。

4-1、序論

東アジア-東南アジアおよびオーストラリアにおいては、乾季と雨季が存在する地域があり、これにモンスーンが深く関わっている。これらの地域では、雨期に $100[\text{mm/h}]$ といった非常に激しい降水が観測されることが珍しくなく、大きな被害が出ることもある。例えばオーストラリアの北西部から Tiwi 島にかけては乾季と雨季の移行期に **Hector** と呼ばれる激しい対流が発生し、激しい降水が観測される。一方、西部太平洋のミクロネシア付近は **ITCZ (Inter-Tropical Convective Zone)** とよばれる収束帯に位置し、1年を通して対流が活発であり、激しい降水が観測される。モンスーン期における力学的、熱力学的な大気構造に関して過去に研究が多くされている(*Krishnamurti, 1985* など)。