

# 双一次 degenerate シェル要素による板殻構造の非線形解析 (その 1)

Nonlinear Analysis of Plate and Shell Structures by Using Bilinear Degenerate Shell Element ( I )

都 井 裕\*・正 岡 典 夫\*\*・川 井 忠 彦\*

Yutaka TOI, Norio MASAOKA and Tadahiko KAWAI

## 1. 序

次数低減積分法により面内方向に一点積分を施した双一次シェル要素は, Belytschko らによって板殻構造の動的非線形解析への適用が活発に行われており<sup>1)</sup>, 他方, 静的解析においては, 著者の一人がその物理的意味を考察し, 断面力法による平板の塑性崩壊解析例を通じ簡易解析手法としての有効性を報告している<sup>2)</sup>.

ここでは, 文献 2) の研究の延長として total Lagrangian approach<sup>3)</sup> により幾何学的非線形性, 材料非線形性を考慮し, 層分割法 (layered approach) を用いた degenerate シェル要素の定式化を行い, 数種の数値計算を実施し, 静的崩壊解析における有効性について考察する.

## 2. 定 式 化

degeneration process によるシェル要素の定式化の一般の手順については, 文献 4) に詳しく述べられているので, ここでは, 双一次変位関数を用いた場合について簡単にその概要を説明することにする.

まず, 図 1 に双一次 degenerate シェル要素および座標系を示す. ここでは, 4 つの座標系が定義されている. すなわち, 要素幾何形状を定義する全体座標系  $(x, y, z)$ , 要素肉厚方向および変位自由度の方向を定義する節点座標系  $(\bar{V}_{1k}, \bar{V}_{2k}, \bar{V}_{3k})$ , 要素内の応力, ひずみを定義する局所座標系  $(x', y', z')$ , そして, 要素内曲線座標系  $(\xi, \eta, \zeta)$  である.

各節点には, 5 自由度を設ける. 並進変位自由度  $(u_k, v_k, w_k)$  は全体座標系と同一方向に, また, 回転変位自由度  $(\beta_{1k}, \beta_{2k})$  は, 節点座標系上の要素面内方向の 2 直交軸まわりについて定義される.

要素内任意点の座標は, 節点の top と bottom の座標 (図 1 を参照) を用いると,

$$x_i = \sum_{k=1}^4 N_k(1+\xi)/2 \cdot x_{ik}^{top} + \sum_{k=1}^4 N_k(1-\xi)/2 \cdot x_{ik}^{bottom} \quad (i=1\sim3) \quad (1)$$

あるいは,

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^4 N_k \begin{Bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{Bmatrix}_{mid} + \sum_{k=1}^4 N_k h_k / 2 \cdot \xi \begin{Bmatrix} \bar{V}_{3k}^x \\ \bar{V}_{3k}^y \\ \bar{V}_{3k}^z \end{Bmatrix} \quad (2)$$

となる. (2) 式の第 1 項は肉厚中央面を, 第 2 項はその垂線に沿った点の位置を与える. ここで,  $N(\xi, \eta)$  は, 双一次要素の形状関数,  $h_k$  は節点  $k$  での肉厚,  $\bar{V}_{3k}$  は, 節点  $k$  で定義される肉厚方向の単位節点座標系ベクトルである.

要素内任意点における変位  $u, v, w$  は, 形状関数  $N_k$  と, 節点ベクトル  $\bar{V}_{3k}$  に垂直な 2 方向の単位ベクトル  $\bar{V}_{1k}, \bar{V}_{2k}$  を用いて, 次のように表現することができる.

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^4 N_k \begin{Bmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{Bmatrix}_{mid} + \sum_{k=1}^4 N_k h_k / 2 \cdot \xi \begin{bmatrix} \bar{V}_{1k}^x & -\bar{V}_{2k}^x \\ \bar{V}_{1k}^y & -\bar{V}_{2k}^y \\ \bar{V}_{1k}^z & -\bar{V}_{2k}^z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_{1k} \\ \beta_{2k} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

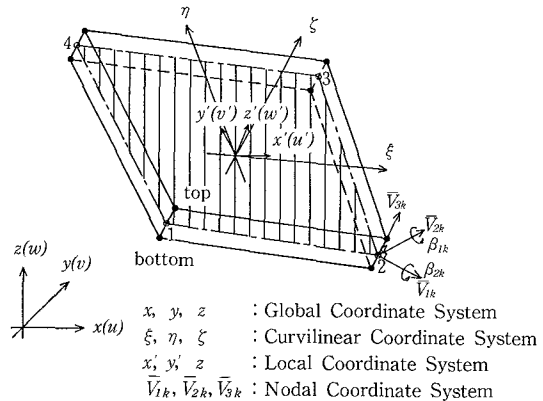


図 1 双一次 degenerate シェル要素

\* 東京大学生産技術研究所 第 2 部

\*\* ㈱巴組技研

研究速報  
 上式の第1項は、肉厚中央面での節点の並進変位を与え、第2項は、節点の回転による変位寄与分を表す。ここで、節点  $k$  の変位ベクトル  $U_k$  および要素の全体変位ベクトル  $U$  は、下式のように示される。

$$U_k^T = [u_k, v_k, w_k, \beta_{1k}, \beta_{2k}] \quad (4)$$

$$U^T = [U_1^T, U_2^T, U_3^T, U_4^T] \quad (5)$$

ひずみ-変位関係は、要素中央点 ( $\xi = \eta = 0$ ) に設けた局所座標系 ( $x', y', z'$ ) 上で次式のように仮定する。

$$\epsilon' = \begin{pmatrix} \epsilon'_x \\ \epsilon'_y \\ \gamma'_{xy} \\ \gamma'_{xz} \\ \gamma'_{yz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \partial u' / \partial x' \\ \partial v' / \partial y' \\ \partial u' / \partial y' + \partial v' / \partial x' \\ \partial u' / \partial z' + \partial w' / \partial x' \\ \partial v' / \partial z' + \partial w' / \partial y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2(\partial w' / \partial x')^2 \\ 1/2(\partial w' / \partial y')^2 \\ \partial w' / \partial x' \cdot \partial w' / \partial y' \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

ここに  $u', v', w'$  は、局所座標系での変位成分である。また、上式の第1項は変位に関する線形成分、第2項は非線形成分(2次項)を表している。局所座標系は、 $\xi = \text{Const.}$  の面に垂直なベクトル  $x'_3$  とその面に接する2方向の座標系ベクトル  $x'_1, x'_2$  から成る。(3)式を代入した後、(6)式を増分形に変形し、さらに変位成分を全体座標表示に変換すれば、次式を得る。

$$\Delta \epsilon' = \Delta \epsilon'_0 + \Delta \epsilon'_L = (B_0 + B_L) \Delta U \quad (7)$$

ここに、

$$\Delta U^T = [ \Delta U_1^T, \Delta U_2^T, \Delta U_3^T, \Delta U_4^T ] \quad (8)$$

$B_0$  は線形のひずみマトリックス、 $B_L$  は非線形ひずみマトリックスである。

局所座標系でのひずみ増分  $\Delta \epsilon'$  に対応した応力増分  $\Delta \sigma'$  は次式により計算される。

$$\Delta \sigma' = D \Delta \epsilon' \quad (9)$$

$$\text{ここに、} \Delta \sigma'^T = [ \Delta \sigma'_{xx}, \Delta \sigma'_{yy}, \Delta \tau'_{xy}, \Delta \tau'_{xz}, \Delta \tau'_{yz} ] \quad (10)$$

弾性状態の応力マトリックス  $D^e$  は次式により与えられる。

$$D^e = E / (1 - \nu^2) \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & (1-\nu)/2 & 0 & 0 \\ & & & \kappa(1-\nu)/2 & 0 \\ \text{sym.} & & & & \kappa(1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

ここに、 $E$  および  $\nu$  はそれぞれヤング率とポアソン比である。また、 $\kappa$  は有効せん断係数であり、5/6を用いる。塑性状態を考慮した場合には、Misesの降伏条件( $\bar{\sigma}$  は相当応力、 $\sigma_Y$  は単軸降伏応力)：

$$f = \bar{\sigma} = [ \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) ]^{1/2} = \sigma_Y \quad (12)$$

を塑性ポテンシャル  $f$  として塑性流れ則を適用することにより、次式の弾塑性応力マトリックス  $D_{ep}$  が得られる。

$$D_{ep} = D^e - \frac{D^e \{ \partial f / \partial \sigma \}_L \partial f / \partial \sigma \}_L D^e}{H' + \partial f / \partial \sigma \}_L D^e \{ \partial f / \partial \sigma \}_L} \quad (13)$$

ここに、 $H'$  はひずみ硬化係数である。

本要素を、次数低減積分法により面内一点積分要素として用いると、剛体変位以外の零エネルギーモードであるアワーグラスモードを含む。このようなモードに対処するため、Flanagan と Belytschko によって提案された手法を採用する<sup>5)</sup>。

Flanagan らは、剛体モードに対し直交性を有するような微小の仮想弾性剛性を定義しており、これを通常の剛性マトリックスに付加することにより数値的安定化を図っている。この仮想剛性は、要素肉厚中央面上の各節点在同一平面上にあると仮定し、専用の局所座標系ベクトル  $\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$  上で定義される。ここで  $\hat{e}_z$  は要素法線方向単位ベクトルである(図2参照)。

まず、次のようなベクトル  $\gamma$  の第  $i$  成分を定義しておく。

$$\gamma_i = H_i - [ (\{H_i\}^T \cdot \{\hat{x}\}) B_{1i} + (\{H_i\}^T \cdot \{\hat{y}\}) B_{2i} ]$$

$$\text{ここに、} \quad (i = 1 \sim 4) \quad (14)$$

$$\{H_i\}^T = [ 1, -1, 1, -1 ] \quad (15)$$

$$\{\hat{x}\}^T = [ \hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{x}_4 ] \quad (16)$$

$$\{\hat{y}\}^T = [ \hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3, \hat{y}_4 ] \quad (17)$$

$$[B_{ai}] = 1/2A \begin{bmatrix} \hat{y}_2 - \hat{y}_4, \hat{y}_3 - \hat{y}_1, \hat{y}_4 - \hat{y}_2, \hat{y}_1 - \hat{y}_3 \\ \hat{x}_4 - \hat{x}_2, \hat{x}_1 - \hat{x}_3, \hat{x}_2 - \hat{x}_4, \hat{x}_3 - \hat{x}_1 \end{bmatrix}$$

であり、 $A$  は要素面積である。上式のベクトル  $\gamma_i$  を用いて、次のように仮想ひずみを定義する。

$$\hat{q}_1 = \gamma_1 \hat{u}_i, \quad \hat{q}_2 = \gamma_2 \hat{v}_i, \quad \hat{q}_3 = \gamma_3 \hat{w}_i, \\ \hat{q}_4 = \gamma_4 \hat{\beta}_{1i}, \quad \hat{q}_5 = \gamma_5 \hat{\beta}_{2i} \quad (18)$$

局所座標系による変位ベクトル  $\hat{U}$  を全体座標系を参照した変位ベクトル  $U$  に変換してマトリックス表示すると、

$$\hat{q} = B_H U \quad (19)$$

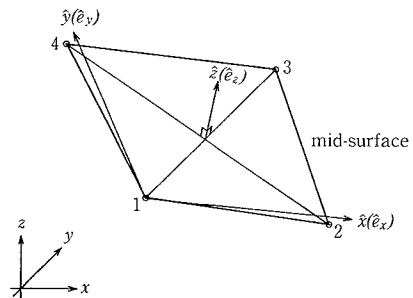


図2 アワーグラスコントロール局所座標系

となる。仮定の応力-ひずみ関係は、次式のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \hat{Q}_1 &= c_1 \hat{q}_1, \quad \hat{Q}_2 = c_1 \hat{q}_2, \quad \hat{Q}_3 = c_2 \hat{q}_3, \\ \hat{Q}_4 &= c_3 \hat{q}_4, \quad \hat{Q}_5 = c_3 \hat{q}_5 \end{aligned} \quad (20)$$

これをマトリックス表示すると、

$$\hat{Q} = C \hat{q} \quad (21)$$

ここに、

$$\begin{aligned} c_1 &= r_m EA t / 8 \quad (B_{1i}^T B_{1i} + B_{2i}^T B_{2i}) \\ c_2 &= r_w \kappa G t^3 / 12 \quad (B_{1i}^T B_{1i} + B_{2i}^T B_{2i}) \\ c_3 &= r_\beta EA t^3 / 192 \quad (B_{1i}^T B_{1i} + B_{2i}^T B_{2i}) \end{aligned} \quad (22)$$

であり、 $E$ はヤング率、 $G$ はせん断弾性係数、 $t$ は要素平均肉厚、 $\kappa$ は有効せん断係数を意味する。 $r_m$ 、 $r_w$ 、 $r_\beta$ は仮想剛性の大きさに関するパラメータであり、Flanaganらは0.01~0.05程度の値を推奨している。

いま、増分前の各状態量に上添字(0)を付して表すと、増分形仮想仕事式は、次式で与えることができる。

$$\iint \delta(\Delta \epsilon')^T \Delta \sigma' dz dA + \iint \delta(\Delta \epsilon'_n)^T \sigma'^{(0)} dz dA + \delta(\Delta \hat{q})^T \Delta \hat{Q} = \delta(\Delta U)^T \Delta f + \delta(\Delta U)^T f_r \quad (23)$$

ここに、 $\int dA$ は面内一点積分を施すことを意味している。また、 $\int dz$ は、層分割法による場合の肉厚方向の積分を意味している。 $\Delta \epsilon'_n$ は、(7)式で省略されたひずみ増分中の変位増分に関する2次項である。

上式の左辺第1項、第2項、第3項は、それぞれ応力増分、初期応力およびアワークラス仮想応力増分、また、右辺第1項、第2項は、増分外力および前段階の不均衡力の成す仮想仕事を表している。(23)式にこれまでの諸関係式を代入すると、次の増分形剛性方程式を得る。

$$(K_o + K_L + K_C + K_H) \Delta U = (\Delta f + f_r) \quad (24)$$

ここに、

$$K_o = \iint B_o^T D B_o dz dA \quad (25)$$

$$K_L = \iint (B_o^T D B_L + B_L^T D B_o + B_L^T D B_L) dz dA \quad (26)$$

$$K_C = \iint G^T \sigma'^{(0)} G dz dA, \quad (27)$$

$$\sigma'^{(0)} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \partial(\Delta w') / \partial x' \\ \partial(\Delta w') / \partial y' \end{bmatrix} = G \Delta U \quad (28)$$

$$K_H = B_H^T C B_H \quad (29)$$

$$f_r = f^{(0)} - (B_o^T + B_L^T) \sigma'^{(0)} - B_H^T \hat{Q}^{(0)} \quad (30)$$

以上、通常増分形式による定式化を示したが、実際の計算では、剛性方程式の解法に際して荷重増分を大きくした場合にも不均衡力が微小となるように、適当な収束計算を併用することにより演算時間の短縮化を図っている。

### 3. 円筒シェル屋根の非線形解析

前章での定式化に基づいて、円筒シェル屋根の数値解析を行い、本要素の静的非線形解析への有効性について

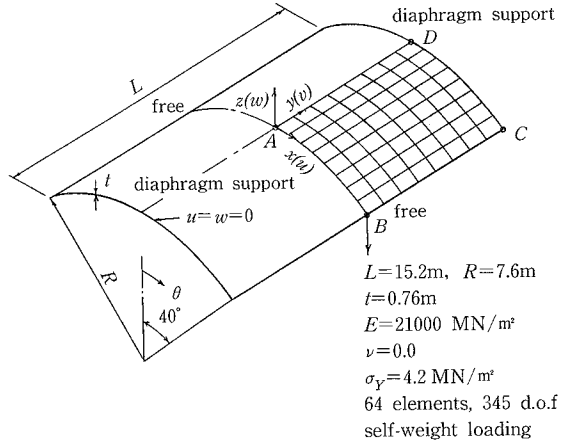


図3 円筒シェル屋根構造モデル

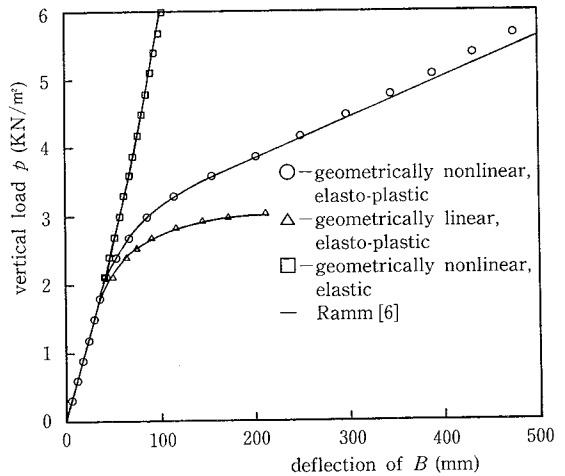


図4 荷重・変位関係

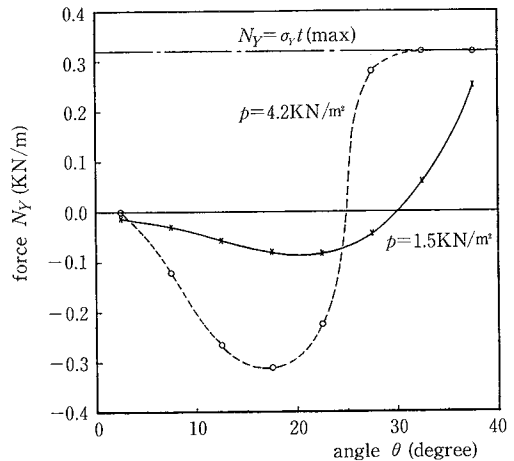


図5 軸力分布 (A-B断面)

研究速報

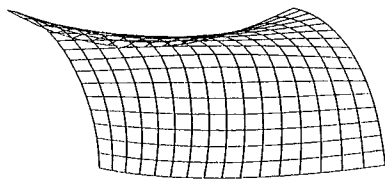


図6 変形モード

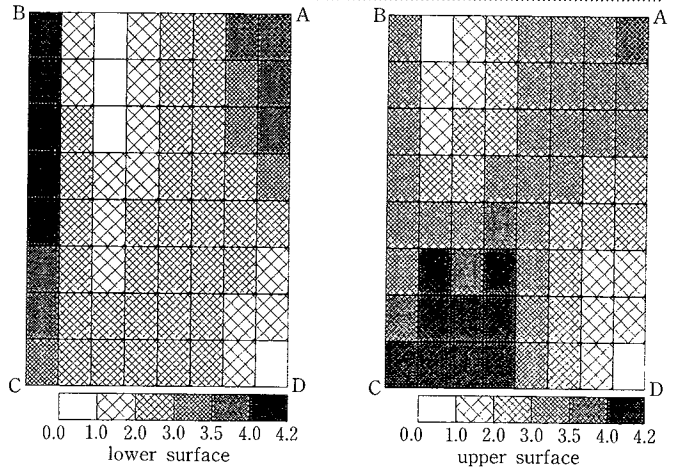


図7 相当応力分布 ( $P=1.8 \text{ KN/m}^2$ )

考察を行う。

材料非線形性および幾何学的非線形性を考慮した円筒シェル屋根の解析を行い、Rammらの双三次要素を用いた解析結果と比較する<sup>6)</sup>。図3に自重を受ける円筒シェル屋根の構造モデルを示す。解析は、対称性を考慮した1/4解析で行う。また、要素肉厚方向への積分はガウス10点積分とする。要素分割は、曲面を近似するために円周方向を8分割としている。総自由度数は、Rammらの解析の451に対して、本解析では345である。アワーグラス制御のためのパラメータ値はすべて0.03とし、材料は完全弾塑性体と仮定する。図4は、自由端中央B点でのたわみと荷重の関係を示している。幾何学的非線形性および材料非線形性の3種類の組み合わせに対して、Rammの解析結果と良好な一致を見ることが出来る。図5～7は弾塑性有限変形解析結果であり、図5は中央A-B断面での軸力分布、図6に変形モード、図7にシェル屋根の上側表面、下側表面の相当応力分布を示している。総合的にRammらの高次要素による解析結果に十分対応した解が得られている。

4. 結 言

次数低減積分法を用いた双一次 degenerate シェル要素による、幾何学的非線形性および材料非線形性を考慮した増分解析の定式化について述べ、数値例として円筒シェル屋根の非線形解析を行った。結果は、高次要素による解析解と比較しても遜色のないものであり、同要素

が静的崩壊解析に対する効率的な解析手法として、十分な有効利用が期待できることを表している。また、従来型の選択型次数低減積分法による degenerate シェル解析コードにも、きわめて容易に組み込める特徴がある。今後は、具体的な数値例を通してさらに実用性について検討を進めていきたい。

(1986年3月5日受理)

参 考 文 献

- 1) T. Belytschko, J.I. Lin and C.S. Tsay : Explicit Algorithms for Nonlinear Dynamics of Shells, *Comput. Meth. Appl. Mech. and Engng.*, 42 (1984), 225
- 2) 都井 裕 : 定モーメント四辺形要素による平板の塑性解析, *日本造船学会論文集*, 第155号 (1984), 273
- 3) K. Washizu : *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, Pergamon Press, 3rd Ed., (1982)
- 4) E. Hinton and D.R.J. Owen : *Finite Element Software for Plates and Shells*, Pineridge Press, (1984)
- 5) D.P. Flanagan and T. Belytschko : A Uniform Strain Hexahedron and Quadrilateral with Orthogonal Hourglass Control, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 18 (1981), 679
- 6) E. Ramm and J.M. Sattelle : *Elasto-Plastic Large Deformation Shell Analysis Using Degenerated Elements*, *Nonlinear Finite Element Analysis of Plates and Shells* (ed. by T.J.R. Hughes et al.), ASME, Vol. AMD-48 (1981), 265