特集 1
研究解説

UDC 532.517.4：53.072：681.5.015.42

複雑乱流のモデル化と統計理論

Modeling of Complicated Turbulent Flows and Statistical Theory

吉 澤　　徴*
Akira YOSHIZAWA

燃焼現象における密度変化を伴う圧縮性乱流，核融合現象における変動する電磁場を伴う電磁流体乱流等では，乱流構造は著しく複雑である．これらの現象の数値シミュレーションに必要な乱流モデルは，非圧縮通常（非電磁流体）乱流のモデルに比べてその整備が大変遅れている．その理由を一言で述べると，上記複雑乱流に比べ，非圧縮通常乱流はその乱流構造が簡単であり，乱流モデルの直観的・経験論的構成がある程度可能であるのに対して，複雑乱流ではそのようなモデル化がほとんど通用せず，統計理論からの示唆を待たねばならないためである．本解説では，複雑乱流に対する統計理論をどの程度まで構成できるか，またそれに基づいてどのようなモデル化が可能かを論じる．

1. は じ め に

スーパー・コンピューターを始めとする計算機ハード・ウェアの急速な発展により，乱流現象の研究においても数値シミュレーションが欠くことのできない手法となりつつある．しかしながら，乱流現象はその大部分のエネルギーを担う比較的大きなスケールからエネルギー散逸に寄与する微小スケールまで非常に多様なスケールを有しているため，スーパー・コンピューターを用いてもこれを一挙に扱うことはできない．この事情は現在のスーパー・コンピューターが1000倍程度能力が上がっても全く変わらない．以上の理由により，乱流の数値シミュレーションを行うためには，小スケールの乱れを切り落とす何らかのモデル化が必要となる[1]．

乱流のモデルは，その研究目的に応じて種々のレベルに分けられる．乱流の純粋な基礎研究においては，モデルの普遍性，得られた結果の高精度性が第一義的に要求され，それにまつわる経済的事情は必ずしも問われない．他方，工学的研究では常にコスト・パーホーマンス的見地が必要であり，それに応じた普遍性・精度をもつ乱流モデルが選択される．前者の代表的モデルにLES（Large-Eddy Simulation）モデルがあり[2-4]，後者には$k-\varepsilon$モデルがある[5]．

基礎研究であれ，工学的研究であれ，乱流のシミュレーション・モデルはすべてと言ってよいほど非圧縮通常乱流に限られている．その結果，燃焼現象等で見られる圧縮性乱流，核融合現象で重要な圧縮性電磁流体乱流等では，信頼に値するモデルはまだない．この事情は，2節の基礎方程式の複雑さからも容易に想像されるであろう．

本解説では，圧縮性通常（非電磁）流体に注意を絞り，複雑乱流のモデル化を統計理論の助けを借りて探ってみる．

2. 基 礎 方 程 式

浮力を伴う圧縮性粘性流体の運動は以下の方程式で記述される．

質量保存則

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x^{a}}(\rho u^{a})=0, \tag{1}$$

運動量保存則

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u^{\alpha})+\frac{\partial}{\partial x^{a}}(\rho u^{a} u^{\alpha})=-\frac{\partial p}{\partial x^{\alpha}}+\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left(\lambda \frac{\partial u^{a}}{\partial x^{a}}\right)+\frac{\partial}{\partial x^{a}}\left[\mu\left(\frac{\partial u^{\alpha}}{\partial x^{a}}+\frac{\partial u^{a}}{\partial x^{\alpha}}\right)\right]+g^{\alpha}(\rho-\rho_{S}), \tag{2}$$

エネルギー保存則

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e)+\frac{\partial}{\partial x^{a}}(\rho u^{a} e)=\frac{\partial}{\partial x^{a}}\left(\mu_{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial x^{a}}\right)-p \frac{\partial u^{a}}{\partial x^{a}}+\Phi \tag{3}$$

上式で，上つきのくり返し添字については1から3まで和をとる（縮約の規則）．また，$\boldsymbol{u}$は速度ベクトル，ρは流体密度，ρ_Sは規準密度，pは圧力，eは内部エネルギー，θは温度，Φはエネルギー散逸率，$\boldsymbol{g}$は重力加速度ベクトルである．3つの物質パラメーターμ, λ, μ_θはそ

* 東京大学生産技術研究所　第1部

れぞれ第一，二粘性率，熱伝導率である．上のエネルギー散逸率 Φ は

$$\Phi=\frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial u^a}{\partial x^b}+\frac{\partial u^b}{\partial x^a}\right)^2+\lambda\left(\frac{\partial u^a}{\partial x^a}\right)^2 \quad (4)$$

で与えられ，燃焼現象ではしばしば無視できる．本解説では Φ を落とすが，これを含めることは本質的にはむずかしいことではない．

(1)—(3)を閉じた方程式系にするには，いくつかの付加的な関係式が必要となる．まず，パラメーター μ, λ, μ_θ が，温度 θ の関数であると仮定する．すなわち，

$$\mu=\mu(\theta), \lambda=\lambda(\theta), \mu_\theta=\mu_\theta(\theta). \quad (5)$$

次に，定体積比熱 C_V を用いて，

$$e=C_V\theta, \quad (6)$$

と書く．(5)，(6)より

$$C_V=C_V(\theta). \quad (7)$$

最後に，(1)—(3)，(5)—(7)と p, e, ρ の間の熱力学的関係式を結合させて方程式系を閉じるが，同関係式としては理想気体の状態方程式を用いる．

3. 平均方程式と擾乱方程式

まず，物理量を以下のように平均とそれからのずれ(擾乱)に分ける．

$$f=F+f', F=\langle f\rangle. \quad (8)$$

ここで，$\langle\rangle$はアンサンブル平均であり，f と F はそれぞれ $(\rho,\boldsymbol{u},p,e)$，$(\rho_M,\boldsymbol{U},P,E)$ を表す．

(1)—(3)の平均をとると，平均部分に対して

$$\frac{\partial\rho_M}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x^a}(\rho_M U^a-H^a_{\rho u})=0, \quad (9)$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}(\rho_M U^a)+\frac{\partial}{\partial x^a}(\rho_M U^a U^a)=-\frac{\partial p}{\partial x^a}\\&+\frac{\partial}{\partial x^a}\left(\lambda\frac{\partial U^a}{\partial x^a}\right)+\frac{\partial}{\partial t}H^a_{\rho u}\\&+\frac{\partial}{\partial x^a}\left[\rho_M H^{aa}_{uu}+U^a H^a_{\rho u}+U^a H^a_{\rho u}\right.\\&\left.+H^{aa}_{\rho uu}+\mu\left(\frac{\partial U^a}{\partial x^a}+\frac{\partial U^a}{\partial x^a}\right)\right]\\&+g^a(\rho_M-\rho_s),\end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}(\rho_M E)+\frac{\partial}{\partial x^a}(\rho_M U^a E)=\frac{\partial}{\partial t}H_{\rho e}\\&-\left(P\frac{\partial U^a}{\partial x^a}+\langle p'\frac{\partial u'^a}{\partial x^a}\rangle\right)\\&+\frac{\partial}{\partial x^a}\left[\rho_M H^a_{eu}+U^a H_{\rho e}+EH^a_{\rho u}\right.\\&\left.+H^a_{\rho eu}+\mu_\theta\frac{\partial}{\partial x^a}\left(\frac{E}{C_V}\right)\right],\end{aligned} \quad (11)$$

擾乱部分に対して

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\rho'}{\partial t}+U^a\frac{\partial\rho'}{\partial x^a}+\frac{\partial}{\partial x^a}(\rho' u'^a+H^a_{\rho u})\\&+\rho_M\frac{\partial u'^a}{\partial x^a}+u'^a\frac{\partial\rho_M}{\partial x^a}+\rho'\frac{\partial U^a}{\partial x^a}=0,\end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u'^a}{\partial t}+U^a\frac{\partial u'^a}{\partial x^a}+\frac{\partial}{\partial x^a}(u'^a u'^a+H^{aa}_{uu})\\&+\frac{U^a}{\rho_M}\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}+U^a\frac{\partial}{\partial x^a}\right)\rho'+\frac{\partial}{\partial x^a}(\rho' u'^a+H^a_{\rho u})\right]\\&+\frac{1}{\rho_M}\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}+U^a\frac{\partial}{\partial x^a}\right)(\rho' u'^a+H^a_{\rho u})\right.\\&\left.+\frac{\partial}{\partial x^a}(\rho' u'^a u'^a+H^{aa}_{\rho uu})\right]+U^a\frac{\partial u'^a}{\partial x^a}\\&+\frac{u'^a}{\rho_M}\left[\frac{\partial\rho_M}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x^a}(\rho_M U^a)\right]\\&+\frac{\rho'}{\rho_M}\left[\frac{\partial U^a}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x^a}(U^a U^a)\right]+\frac{u'^a}{\rho_M}\frac{\partial}{\partial x^a}(\rho_M U^a)\\&+\frac{1}{\rho_M}(\rho' u'^a+H^a_{\rho u})\frac{\partial U^a}{\partial x^a}\\&+\frac{1}{\rho_M}(\rho' u'^a+H^a_{\rho u})\frac{\partial U^a}{\partial x^a}\\&+\frac{1}{\rho_M}(u'^a u'^a+H^{aa}_{uu})\frac{\partial\rho_M}{\partial x^a}=-\frac{1}{\rho_M}\frac{\partial p'}{\partial x^a}\\&+\frac{1}{\rho_M}\frac{\partial}{\partial x^a}\left(\lambda\frac{\partial u'^a}{\partial x^a}\right)\\&+\frac{1}{\rho_M}\frac{\partial}{\partial x^a}\left[\mu\left(\frac{\partial u'^a}{\partial x^a}+\frac{\partial u'^a}{\partial x^a}\right)\right]+g^a\frac{\rho'}{\rho_M},\end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial e'}{\partial t}+U^a\frac{\partial e'}{\partial x^a}+\frac{\partial}{\partial x^a}(u'^a e'+H^a_{eu})\\&+\frac{E}{\rho_M}\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}+U^a\frac{\partial}{\partial x^a}\right)\rho'+\frac{\partial}{\partial x^a}(\rho' u'^a+H^a_{\rho u})\right]\\&+\frac{1}{\rho_M}\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}+U^a\frac{\partial}{\partial x^a}\right)(\rho' e'+H^a_{\rho e})\right.\\&\left.+\frac{\partial}{\partial x^a}(\rho' e' u'^a+H^a_{\rho eu})\right]+E\frac{\partial u'^a}{\partial x^a}\\&+\frac{e'}{\rho_M}\left[\frac{\partial\rho_M}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x^a}(\rho_M U^a)\right]\\&+\frac{\rho'}{\rho_M}\left[\frac{\partial E}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x^a}(U^a E)\right]+\frac{u'^a}{\rho_M}\frac{\partial}{\partial x^a}(\rho_M E)\\&+\frac{1}{\rho_M}(u'^a e'+H^a_{eu})\frac{\partial\rho_M}{\partial x^a}\\&+\frac{1}{\rho_M}(\rho' e'+H_{\rho e})\frac{\partial U^a}{\partial x^a}+\frac{1}{\rho_M}(\rho' u'^a+H^a_{\rho u})\frac{\partial E}{\partial x^a}\\&=\frac{1}{\rho_M}\frac{\partial}{\partial x^a}\left[\mu_\theta\frac{\partial}{\partial x^a}\left(\frac{e'}{C_V}\right)\right]\\&-\frac{1}{\rho_M}\left(p'\frac{\partial u'^a}{\partial x^a}-\langle p'\frac{\partial u'^a}{\partial x^a}\rangle\right).\end{aligned} \quad (14)$$

上の2つの方程式系には，7個の未知相関関数が現れる．

$$H^a_{\rho u}=-\langle\rho' u'^a\rangle, \quad (15\text{ a})$$
$$H^{a\beta}_{uu}=-\langle u'^a u'^\beta\rangle, \quad (15\text{ b})$$
$$H_{\rho e}=-\langle\rho' e'\rangle, \quad (15\text{ c})$$
$$H^a_{eu}=-\langle e' u'^a\rangle, \quad (15\text{ d})$$
$$H^{a\beta}_{\rho uu}=-\langle\rho' u'^a u'^\beta\rangle, \quad (15\text{ e})$$
$$H^a_{\rho eu}=-\langle\rho' e' u'^a\rangle, \quad (15\text{ f})$$
$$\langle p'\frac{\partial u'^a}{\partial x^a}\rangle. \quad (15\text{ g})$$

(9)—(15)を導く際，μ, λ, C_V に対する e の擾乱の影

響は無視した．すなわち，たとえば

$$\mu(E+e')\simeq\mu(E). \tag{16}$$

また，(15)において $H^{\alpha\beta}_{uu}, H^{\alpha}_{eu}$ は非圧縮乱流におけるレイノルズ応力，熱輸送に対応する．

4．非圧縮乱流におけるモデル化との関連

非圧縮乱流では，(9)－(11)で $\rho'=0$ とおいてわかるように，$H^{\alpha\alpha}_{uu}, H^{\alpha}_{eu}$ に対応する項のみが現れる．代表的工学モデルの1つである $k-\varepsilon$ モデルでは，$H^{\alpha\beta}_{uu}, H^{\alpha}_{eu}$ を渦粘性，渦拡散表現し，渦粘性率，渦拡散率を乱流エネルギー k と乱流エネルギー散逸率 ε で表す．最後に，(13)に対応する式から，k と ε に対する支配方程式をモデル化する．

しかしながら，本解説で扱っている圧縮性乱流では，上述の $k-\varepsilon$ 的モデル化はほとんど不可能なことが(12)－(14)の複雑さからわかるであろう．ましてや，未知相関関数(15)の多さを考慮したとき，いわゆる応力方程式的モデル化は全く見込みがない．

上のような事情を考えたとき，唯一の可能性があるモデル化はいわゆるLESモデルである．LESモデルは，工学的乱流モデルの言葉を借りると，0一方程式あるいはせいぜい1一方程式モデルであり[6,7]，モデル自身は $k-\varepsilon$ モデル，種々の応力モデルよりはるかに簡単な構造をしている．この事情は，非圧縮電磁流体乱流では統計理論的結果を用いて[8]，LESモデルを比較的容易に導けることからも理解できる[9]．

5．統計理論的結果

著者は特異摂動法における多重スケール展開と，一様乱流におけるKraichnanのDI近似[10-12]を結合させて，剪断乱流（平均流をもつ一般的乱流）に対する統計理論（MDI理論と略称）を構成した[13-16]．

MDI理論の主要ステップは

（1）　平均量と擾乱量の間に多重スケールを導入し，後者をスケール・パラメーター展開する，

（2）　相関関数の計算にはDI近似を用いる，

からなる．

以上の手続きを用いると，前述の7個の相関関数は，

$$H^{\alpha}_{\rho u}=\chi_{\rho}\frac{\partial\rho_M}{\partial x^{\alpha}}, \tag{17}$$

$$H^{\alpha\beta}_{uu}=-\frac{2}{3}k\delta^{\alpha\beta}+\nu_e\left(\frac{\partial U^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}+\frac{\partial U^{\beta}}{\partial x^{\alpha}}\right)+\left(\frac{1}{\rho_M}\gamma_{uu1}+\frac{\lambda+\mu}{\rho_M^2}\gamma_{uu2}\right)\times\left(g^{\alpha}\frac{\partial\rho_M}{\partial x^{\beta}}+g^{\beta}\frac{\partial\rho_M}{\partial x^{\alpha}}-\frac{2}{3}\delta^{\alpha\beta}g^{\alpha}\frac{\partial\rho_M}{\partial x^{\alpha}}\right), \tag{18}$$

$$H_{\rho e}=0, \tag{19}$$

$$H^{\alpha}_{eu}=\chi_e\frac{\partial E}{\partial x^{\alpha}}+\gamma_{eu}\frac{R}{C_V}\frac{E}{\rho_M}\frac{\partial\rho_M}{\partial x^{\alpha}}, \tag{20}$$

$$H^{\alpha\beta}_{\rho uu}=-\gamma_{\rho uu2}\delta^{\alpha\beta}g^{\alpha}\frac{\partial\rho_M}{\partial x^{\alpha}}-\gamma_{\rho uu1}\left(g^{\alpha}\frac{\partial\rho_M}{\partial x^{\beta}}+g^{\beta}\frac{\partial\rho_M}{\partial x^{\alpha}}\right), \tag{21}$$

$$H^{\alpha}_{\rho eu}=-\frac{R}{C_V}\gamma_{\rho eu}\frac{\partial\rho_M}{\partial x^{\alpha}}, \tag{22}$$

$$\left\langle p'\frac{\partial u'^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}}\right\rangle=0. \tag{23}$$

上式で，乱流エネルギー $k(\equiv\langle u'^{\alpha}u'^{\alpha}\rangle/2)$，渦粘性率 ν_e，内部エネルギー渦拡散率 χ_e，他の諸係数 γ_{uu1} 等は擾乱場の統計量で表現できる．これらについての詳細は，文献17)に与えられている．

6．圧縮性乱流モデル化への展望

5節で得られた結果(17)－(23)の構造を概観してみよう．(17)－(23)に関して共通して言えることは，これらがいわゆる勾配拡散型表現であることであり，非圧縮性乱流におけるレイノルズ応力の渦粘性表現に対応している．渦粘性表現自体の欠点は良く理解されており，たとえば2枚の平行平板間の溝乱流においては，同表現は乱流強度の異方性を表すことができない．しかし，この欠点はMDI理論よりレイノルズ応力の高次近似を求めて，容易に克服できる[14]．実際，西島・吉澤[18]はこの理論的結果を組み込んだ非等方 $k-\varepsilon$ モデルを用いて，溝乱流の乱流強度の異方性を求め，実験と一致することを示した．

浮力効果は(2)の右辺最終項で与えられるが，この効果は(17)－(23)においては $\boldsymbol{g}$ を含む項として現れている．密度変化が小さいときは，(2)の浮力項はいわゆるブジネスク近似

$$\boldsymbol{g}(\rho-\rho_S)\simeq-\beta\boldsymbol{g}(\theta-\theta_S), \tag{24}$$

で与えられる．ここで，θ_S は規準温度であり，β は体積膨張率である．(24)の近似のもとでは，流体は非圧縮性流体として扱うことができ，MDIの定式化が容易に行える[19]．しかし，通常の燃焼現象では(24)のブジネスク近似は必ずしも成立せず，5節で得られた結果が興味ある示唆を与えるであろう．

上のような事実を背景として，(17)－(23)を乱流のモデル化という視点から吟味してみよう．それらの中で，(17)，(20)，(22)は $\partial\rho_M/\partial x^{\alpha}$ を含むが，$\boldsymbol{g}$ にはよらない．また，(20)，(22)は気体定数 R を含み，理想気体の仮定と密接に関連している．他方，(17)は非圧縮性乱流における熱輸送に対する渦熱拡散表現と全く同一の構造をしており，熱力学的関係式にはよらない．

他の表式(18)，(21)は $\partial\rho_M/\partial x^{\alpha}$ と $\boldsymbol{g}$ の両方を含み，密度変化に起因する浮力効果を示している．これらの式によって表される浮力効果は，ρ_M それ自身には全くよらない．この事情は(10)の最終項で与えられる本来の浮力

効果とは著しい対照をなしている．この対照は次の事実を意味する．すなわち，本来の浮力効果は"局所的効果"を表すのに対して(18)，(21)における浮力効果は"より広域的影響"を示している．後者の効果は，アンサンブル平均操作と密接に関係している．というのは，アンサンブル平均は近似的に空間平均と同等であり，その結果，必然的に乱流場の非局所的構造を取り込むことになるのである．

上に述べられた浮力効果は，既存の乱流モデルには全くと言ってよいほど取り込まれていない．浮力効果をもつ乱流が通常のモデルではしばしば十分表現できないという事情はこの欠点によるのではないかと著者は推察している．

最後に，平均場方程式(9)―(11)，擾乱方程式(12)―(14)で与えられるこのような複雑な乱流現象に対して，非圧縮乱流における $k-\varepsilon$ モデル，応力モデルといったモデル化はまず不可能といえるであろう(特に，$k-\varepsilon$ モデルにおける ε 方程式の理論的根拠が現状では十分解明されていないことを考えると[14])．以上の事実から，圧縮性乱流に対してモデル化が可能であるとしたら，それはLESモデルであろう．現存のLESモデルは，スマゴリンスキー・モデル（0－方程式型)[2,3]，サブグリット・スケール乱流エネルギー・モデル(1－方程式型)[4,7]であるが，後者は(12)―(14)の複雑さからみてかなりむずかしく，前者のスマゴリンスキー型モデルが有望である．

本研究の一部は，本所選定研究費によることを付記する．

(1985年9月2日受理)

参 考 文 献

1) 吉澤徴：乱流のLarge-Eddy Simulation, 生産研究 **36** (1984) 175
2) P. Moin and J. Kim : Numerical investigation of turbulent channel flow, *J. Fluid Mech.* **118** (1982) 341
3) R. S. Rogallo and P. Moin : Numerical simulation of turbulent flows, *Ann. Rev. Fluid Mech.* **16** (1984) 99
4) K. Horiuti : Large eddy simulation of turbulent channel flow by one-equation modeling, *J. Phys. Soc. Jpn.* **54** (1985) 2855
5) P. Bradshaw, T. Cebeci, and J. H. Whitelaw, *Engineering Calculation Methods for Turbulent Flow* (Academic, London, 1981) Chaps. 3 and 4
6) A. Yoshizawa : A statistically-derived subgrid model for the large-eddy simulation of turbulence, *Phys. Fluids* **25** (1982) 1532
7) A. Yoshizawa and K. Horiuti : A statistically-derived subgrid-scale kinetic energy model for the large-eddy simultion of turbulent flows, *J. Phys. Soc. Jpn.* **54** (1985) 2834
8) A. Yoshizawa : Statistical theory for magnetohydrodynamic turbulent shear flows, *Phys. Fluids* **28** (1985) 3313
9) A. Yoshizawa : A LES model MHD turbulent flows, *Preprint*
10) R. H. Kraichnan, The structure of isotropic turbulence at very high Reynolds numbers, *J. Fluid Mech.* **5** (1959) 497
11) R. H. Kraichnan : Direct-Interaction approximation for shear and thermally-driven turbulence, *Phys. Fluids* **7** (1964) 1048
12) R. H. Kraichnan : Eulerian and Lagrangian renormalization in turbulence theory, *J. Fluid Mech.* **83** (1977) 349
13) A. Yoshizawa : Statistical theory for the diffusion of a passive scalar in turbulent shear flows, *J. Phys. Soc. Jpn.* **53** (1984) 1264
14) A. Yoshizawa : Statistical analysis of the deviation of the Reynolds stress from its eddy-viscosity representation, *Phys. Fluids* **27** (1984) 1377
15) A. Yoshizawa : A statistically derived system of equations for turbulent shear flows, *Phys. Fluids* **28** (1985) 59
16) A. Yoshizawa : Statistical analysis of the anisotropy of scalar diffusion in turbulent thear flows, *Phys. Fluids* **28** (1985) 3226
17) A. Yoshizawa : Statistical theory for compressible turbulent shear flows, *Preprint*
18) 西島勝一，吉澤　徴：一般化された $k-\varepsilon$ モデルによる構乱流の数値解析，ながれ(日本流体力学会誌) **4** (1985) 131
19) A. Yoshizawa : A statistical theory for thermally-driven turbulent shear flows, with the derivation of a subgrid model, *J. Phys. Soc. Jpn.* **52** (1983) 1194