

Large Eddy Simulation と二次元クエット乱流の数値解析

Large Eddy Simulation and Numerical Analysis of Turbulent Plane Couette Flow

小林 敏雄*・狩野 正徳*

Toshio KOBAYASHI and Masanori KANO

Large Eddy Simulation による乱流場の予測方法, 適用例について概説し, 最近の LES の展開が, 複雑な 3 次元流れ場の解析, 乱れの微細構造の解析および流れのアニメーション化の方向を向いていることを示す。つづいて LES を二次元クエット乱流場に適用し, 平均流速, 乱流量, 乱れの微細構造の計算例を示すとともに, それらに及ぼす乱流モデル (Smagorinsky 定数) の影響を例示する。

1. 乱流の数値シミュレーションと LES

われわれのまわりには自然現象あるいは人為的なものを問わず多種多様な流れが存在し, その多くは「乱流」とよばれる時間的空間的に変動する複雑な流れである。この乱流の挙動を予測することは Reynolds が管内流れにおいて層流と乱流の判別成功して以来, 流体力学における一つの課題となっている。乱流に関する研究は数年前までは実験的手法および統計理論的手法に限られていたが, 昨今の超高速大容量計算機の出現は乱流解析に新しい強力な手法=数値実験的手法を加えつつある。

乱流の数値シミュレーションの中で原理的に最もわかりやすいものは空間分割, 瞬間分割を十分細かくして, Navier-Stokes 方程式を直接的に解く方法であろう。しかしながら, この方法は微細な乱れまでを記述するために膨大な空間分割数を必要とし, 近い将来の電子計算機の発達を考慮に入れても直接計算は実現困難である。このため, なんらかの乱流モデルの導入が必要となる。モデルの導入を前提とするとき乱流の数値シミュレーションが直面する最大の障壁は, 乱流が散逸スケールから平均流スケールに至るまでの多様なスケールの乱れをもつため普遍的な乱流モデルを構築できないことである¹⁾。これを克服する有力な手段として Large Eddy Simulation (以下 LES と略記する) がある。LES では乱流場に存在するさまざまなうずを大まかに計算の格子にかかるスケール (resolvable scale) のうずとそれ以下の小さなスケール (subgrid scale) のうずに分け, 前者には Navier-Stokes 方程式を適用し流れ場を直接計算し, 後者にはなんらかの乱流モデルを導入して直接計算を避けている。この考え方は resolvable scale のうずの構造は

流れごとに異なり普遍的なモデルを作ることが困難であること, 一方, subgrid scale のうずの構造は等方的であるとみなせることが多く, 普遍的なモデルを提案しやしいという経験的事実に基づいている²⁾。

さて, この LES を用いて比較的広い乱流場を計算するためには多くの計算機記憶容量と計算時間を必要とする。したがって現在のところ LES 適用例はそれほど多くはない³⁾。表 1 に主な LES 計算例を示す。表には直接計算 (DS と略記) とよばれる計算例も併記してある。Dear-dorff は平行平板間の十分に発達した乱流に LES を初めて適用し, 時間平均の速度分布や乱れ分布の計算結果が実験値とよく一致することを確かめた⁴⁾。1970 年のことで, 流れ場を流れ方向に 24, 壁と垂直方向に 20, スパン方向に 14 の格子分割で, 計算機として CDC 6600 を用いている。当時としては驚異的な大規模計算であった。つづいて Schumann は resolvable scale のうずと subgrid scale のうずを分離するためのフィルタリングに体積平均の概念を取り入れて計算の精密化を図った⁵⁾。これらの計算では subgrid scale のうず構造に対して比較的単純な Smagorinsky モデル⁶⁾を用い, 壁面近傍での流速が対数則速度分布に合致するよう境界条件を課している。LES の有効性をセンセーショナルに示したのが 1982 年の Moin らの数値実験であろう。世界初のスーパーコンピュータ ILLIAC 4 を駆使し, 平行平板間の乱流を空間分割数 $64 \times 128 \times 63$ という細かいメッシュに分割し, 壁面での流速の境界条件として no slip を課して計算を行い, 乱流量などの時間平均値が実験値と良く一致することはもちろん, 乱流境界層のいわゆる秩序構造の形成まで表現できることを示した⁷⁾。

これらの基礎的な研究を土台として第一に LES は剣

* 東京大学生産技術研究所 第 2 部

離や旋回などを伴う複雑な、しかし工学的には需要の多い三次元流に展開されつつある。狩野らは、平行平板の一方の壁上に長方形断面をもつ乱流促進体が周期的に設置された乱流場を計算し、剝離を伴う流れ場の平均流速、平均乱流量の予測に LES が有効であることを示している⁸⁾。また、村上らは地上の建物まわりの乱流に LES を適用し、風速の時間変動波形の計算値が実測値と良く合うことを示している⁹⁾。今後、多様な三次元流に対する数値実験例の蓄積が期待される。

LES の展開の第 2 の方向は乱れの構造をより詳細に表現することである。たとえば、平行平板間の流れのような単純せん断乱流場では混沌とした中に間欠的な秩序構造が現れることが実験によって確かめられている。壁の極く近傍に流速の早い部分と遅い部分とが流れ方向に長く、スパン方向にある周期性をもって並ぶ様子がみら

れる¹⁰⁾。堀内はこのストリークの間欠的存在を計算機上に表現するとともに定量的にもストリークの間隔の統計量が実測のそれと近い値になることを示している¹¹⁾。

LES の展開の第 3 の方向は流れ場の時系列変化を表すアニメーションの作成である。LES は各瞬間の、各空間位置の速度情報、圧力情報をもっている。したがってこれを用いていわゆる流れの可視化を実現することができる。しかしながら、現在のところ計算データを画像データへ効率よく高速度で変換するためのシステム構成が大がかりとなり、アニメーションの例は少ない¹²⁾¹³⁾。LES によって供給される膨大な計算結果を効果的に表現するビジュアルシミュレーションの発達が課題である。

本稿では LES を二次元クエット乱流に適用し、sub-grid scale における乱流モデルの性質が乱流構造の計算値に及ぼす影響についての基礎資料を提供する。

表 1 最近の主な LES, DS 適用例

番号	手法	対象流路	分割数	Re	初期条件	境界条件	備 考	文献
(1)	LES/DS	二次元平行チャンネル流	16×17×16	10 ³ ~10 ⁴	平均流：層流 乱れ：乱数	壁：No-slip 他：Cyclic	遷移域では DS より高 Re 数では LES	(14)
(2)	LES/DS	二次元平行チャンネル流	16×33×16 16×17×16	10 ³ ~10 ⁴	平均流：層流 乱れ：乱数	壁：No-slip 他：Cyclic		(15)
(3)	LES	二次元平行チャンネル流	64×128×63	1.38×10 ⁴	文献(7)の計算値	壁：No-slip 他：Cyclic	条件平均操作 VITA 法 による壁乱流の計算	(16)
(4)	LES/DS	二次元平行チャンネル流	32×32×21	2.75×10 ⁴ 1.07×10 ⁴	平均流：実測値 乱れ：乱数	壁：No-slip 他：Cyclic	発達乱流 乱流遷移	(11)
(5)	DS	二次元平行チャンネル流	31×31×21	2.0×10 ⁴	ゼ ロ	壁：No-slip 他：Cyclic	発達乱流 乱流遷移	(17)
(6)	LES	二次元平行チャンネル流	32×32×32	1.15×10 ⁴ 2.27×10 ⁴	平均流：実測値 乱れ：乱数	壁：No-slip 他：Cyclic		(18)
(7)	LES	二次元平行チャンネル流	64×128×63	1.38×10 ⁴	文献(7)の計算値	壁：No-slip 他：Cyclic	乱流の渦構造、 ヘヤピン渦の存在	(19)
(8)	LES	二次元平行チャンネル流	32×32×32	100, 1.5×10 ³ 2.935×10 ³	解析解, 2次元 orr-Sommerfeld 解	壁：No-slip 他：Cyclic	チャンネル入口部の発達部分を計算 乱流遷移	(20)
(9)	DS	二次元平行チャンネル流	33×32×32	500~2935	二次元攪乱 三次元攪乱	壁：No-slip 他：Cyclic	乱流遷移	(21)
(10)	DS	Bénard 対流	32×16×32	Ra=1.5×10 ³ ~3.8×10 ³ Pr=0.71 Re=46.0 ~732	流速：ゼロ 温度：直線 温度乱れ：乱数	壁：No-slip 他：Cyclic 温度 壁：熱流束 他：Cyclic	Ra=1.5×10 ³ ：熱伝導のみ Ra=4.0×10 ³ ：層流対流 Ra=7.0×10 ³ ：周期的三次元非定 常対流 Ra=8.73×10 ⁴ ：乱流	(22)
(11)	LES	非対称チャンネル流	40×25×9	1.1×10 ⁴	ゼ ロ	壁：No-slip 他：Cyclic	発達乱流	(8)
(12)	LES	建物まわりの流れ	44×36×21		平均流：1/4乗則 乱れ：乱数	壁：1/4乗則 上空：Free-slip 他：Cyclic	発達乱流	(9)
(13)	DS	円錐まわりの流れ	40×32×22	1.0×10 ³				(23)

2. LES の基礎式

LES において物理量 f は

$$f = \bar{f} + f' \tag{1}$$

のように分解される。ここに \bar{f} は大規模流れ場 (resolvable scale) における成分、 f' は小規模流れ場 (subgrid scale) における成分である。大規模流れ場に対するフィルタ関数としてはガウス形フィルタ関数

$$G_i(x_i, x'_i) = \left(\frac{6}{\pi \Delta_i^2}\right)^{1/2} \exp\left\{-6 \frac{(x_i - x'_i)^2}{\Delta_i^2}\right\} \tag{2}$$

($i=1,2,3$)

を用いる。ここに、 Δ_i は x_i 方向の格子幅である。このフィルタ関数を流れ場全領域に作用させることにより大規模流れ場が次のように定義される。

$$\begin{aligned} \bar{f}(x_1, x_2, x_3) \\ = \int_{D_i} \prod_{i=1}^3 G_i(x_i, x'_i) f(x'_1, x'_2, x'_3) dx'_1 dx'_2 dx'_3 \end{aligned} \tag{3}$$

計算対象の流れ場は図 1 に示すように上壁平面とそれに平行な下壁平面とからなり、上壁がその面内で一定速度 (U) で移動するものとする。座標系としては上壁の移動方向に x_1 軸、上下壁と垂直に x_2 軸、スパン方向に x_3 軸を選ぶ。流れは非圧縮性の流れとし、速度 u_i を U 、座標 x_i をチャンネル幅 L 、時間 t を L/U 、圧力 p を ρU^2 (ρ : 密度) で無次元化する。運動方程式および連続の式に式 (3) で表されるフィルタ操作を施すと

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} (L_{ij} + C_{ij} + R_{ij}) + \frac{1}{4Re} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} \tag{4}$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \tag{5}$$

となる。ここに圧力 \bar{p} は乱流圧力を含んでおり、また Re はレイノルズ数 $= UL/(4\nu)$ (ν : 動粘性係数) である。

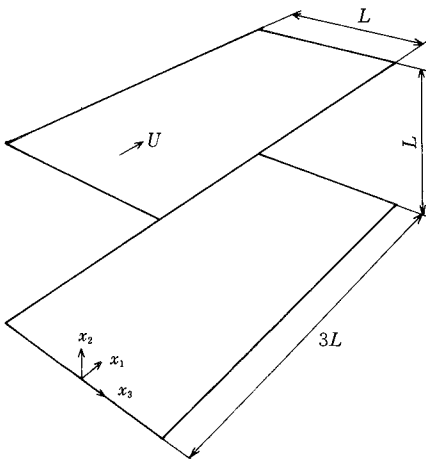


図 1 計算対象の流れ場

式 (4) 中の L_{ij}, C_{ij}, R_{ij} はそれぞれ、レナード項、クロス項、レイノルズ項とよばれ、次のようにモデル化されることが多い。すなわち、

$$L_{ij} = \frac{\Delta_k^2 \partial^2 (\bar{u}_i \bar{u}_j)}{24 \partial x_k \partial x_k} \tag{6}$$

$$C_{ij} = - \frac{\Delta_k^2 \bar{u}_i}{24} \frac{\partial^2 \bar{u}_j}{\partial x_k \partial x_k} - \frac{\Delta_k^2 \bar{u}_j}{24} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k \partial x_k} \tag{7}$$

$$\left. \begin{aligned} R_{ij} &= -2K \zeta_{ij} \\ K &= (C\Delta)^2 [2\zeta_{ij} \zeta_{ij}]^{1/2} \\ \zeta_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \end{aligned} \right\} \tag{8}$$

ここに Δ は subgrid scale の代表長さであり

$$\Delta^2 = (\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2) / 3$$

で定義する。式 (6), (7) の L_{ij} および C_{ij} は無視されることも多いが、本稿では考慮する。式 (8) の R_{ij} が subgrid scale での流れを表す項であり、 C は Smagorinsky 定数である⁶⁾。

3. 計算方法と境界条件

基礎方程式 (4), (5) および乱流モデル式 (8) を差分方程式群に変換し連立させて解く。差分計算は空間的には中心差分スキームを、時間的には Adams-Bashforth スキームを用い、SMAC 法を採用する。計算手順の概略を図 2 に示す。

計算領域は主流方向に $3L$ 、壁方向に L 、スパン方向に L をとり、この直方体領域を $30 \times 30 \times 25$ の格子に分割する。この計算領域は二次元チャンネル流において実測された 2 点速度相関が十分小さくなる距離を目安に選定したものであり、また、壁面に隣接する格子のメッシュレイノルズ数 $Re_m = \bar{u}h/\nu$ (\bar{u} : 局所平均流速、 h : 差分格

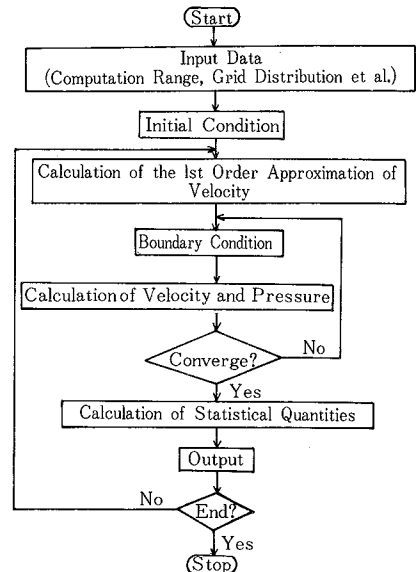


図 2 計算手順の概略

子幅)は結果的に約 70 であった。格子分割が十分に細かくとれないような場合、 x_1 方向および x_3 方向に擬似スペクトル法を採用することも一方法であるが、ここでは三次元形状の流路における流れの数値予測を目標としているため擬似スペクトル法を採用していない。

初期条件としては計算時間の節約を図るため、また、十分に発達した乱流状態を計算しようとしているため、平均流速に関して実測値²⁴⁾ $\overline{u_i}$ を、乱れに関して u_1 に U の 3.2%、 u_2, u_3 に 1.6% の一様乱数を加えている。

境界条件としては壁面で no slip 条件を、流入流出面およびスパン方向に cyclic 条件を与えている。

計算条件を表 2 に示す。Smagorinsky 定数 c を 0.1, 0.05, 0 と変化させ、また格子分割を等間隔分割と、壁近傍の分割を等比級数的に細かくした不等間隔分割を採用している。図 2 における収束計算の収束条件は $\partial u_i / \partial x_i$ の差分式の各格子点での値の最大値が 0.001 以下としている。

計算は東京大学大型計算機センターの HITAC S-810 によった。1 タイムステップ当たりの CPU 時間はケース I および II で約 1.4 秒、ケース III および IV で約 1.0 秒である。計算対象のレイノルズ数は $Re = 3.75 \times 10^3$ である。

4. 二次元クエット乱流の数値解

計算は初期状態から十分定常に達するまで進められた。定常状態としては $x_1 - x_3$ 面内の空間平均操作によって得られた平均流速、平均乱れがタイムステップによらず一定となる時点を選んでいる。表 1 の計算ではすべてのケースについて無次元時間 $t \sim 5.0$ で定常状態に達しており、本計算ではそれぞれのケースについて 3000, 4000, 4000, 10000 のタイムステップで打ち切っている。計算によって得られた流速は乱流状態にあるため、統計平均量を求める必要がある。ここでは空間平均操作によって平均量を求めることにする。すなわち、 $x_1 - x_3$ 面内の

空間平均量を $\langle \dots \rangle$ で、 x_1 方向の平均量を $\langle \dots \rangle_{x_1}$ で表すことにする。

4.1 平均流速分布

図 3 に計算ケース I ~ III での主流方向平均速度 $\langle u_1 \rangle$ の x_2 方向分布を示す。計算結果は Robertson²⁴⁾ および Burton²⁵⁾ の実測値と比較されている。図は (1) 計算結果が実測結果と良く一致していること、(2) 定数 C の影響がほとんど現れないことを示している。

図 4 に下壁側の平均流速を摩擦速度 u_τ によって無次元化した分布を示す。横軸は壁座標 $x_2^+ = u_\tau x_2 / \nu$ である。計算結果はケース III および IV についてのみ示されている。図よりケース III の計算結果は上記 Robertson のクエット流れの実測値 ($Re = 7.05 \times 10^3$) や二次元チャンネル流れにおける Eckelmann の実測値²⁶⁾ ($Re = 5.6 \times 10^3$)、Patel の実測値²⁷⁾ ($Re = 1.84 \times 10^3$) と良く一致しており、二次元クエット乱流においても壁近傍で対数速度則が成立することが推測される。ケース IV では壁面近傍の解像度を 2 倍にしているにもかかわらず、実測値と異なる結果を与える。これはここで用いている計算法がスタッガ格子系を使用しており、不等間隔格子での打ち切り誤差が等間隔格子のそれを大きく上まわるためと予想される。

4.2 乱れの分布と数値定数

乱れを $x_1 - x_3$ 面の空間平均流速からのずれで定義する。すなわち、

$$u_i'' = u_i - \langle u_i \rangle \tag{9}$$

表 2 計算条件

	The Number of Grids	δt	Grid Points	Method
Case I	30×30×25	0.002	Uniform	LES ($c=0.1$)
Case II	30×30×25	0.002	Uniform	LES ($c=0.05$)
Case III	30×30×25	0.002	Uniform	Direct Simulation
Case IV	30×30×25	0.001	Non-Uniform	Direct simulation

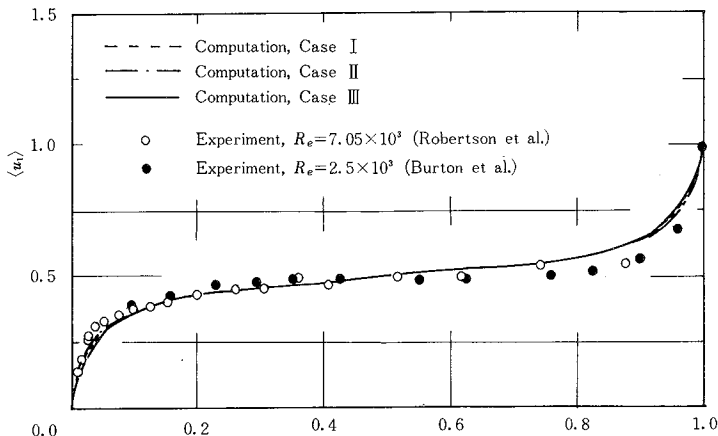


図 3 主流方向流速の平均値とその実測値

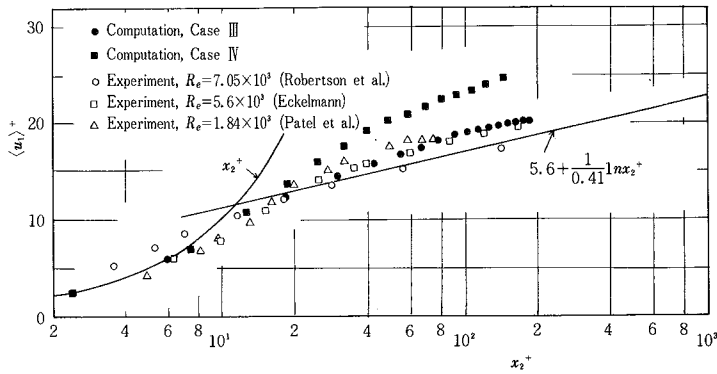
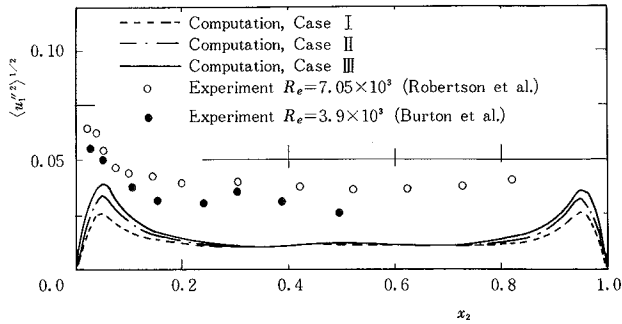
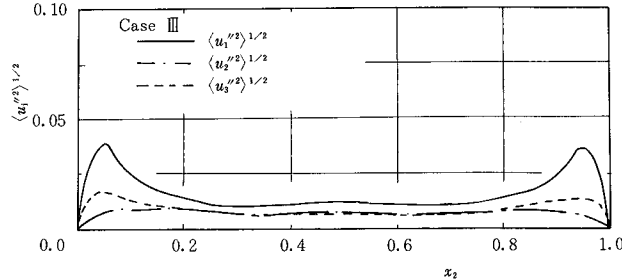


図 4 壁座標で表した平均流速分布



(a) 主流方向乱れ分布の実測値との比較



(b) 乱れの3成分(計算値)

図 5 乱れの分布

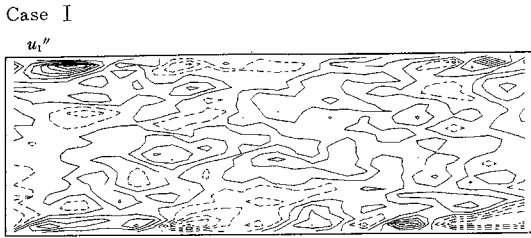
もちろん、 u_i'' には subgrid scale における速度変動分が含まれる。図 5 (a)にケース I~IIIによる主流方向乱れ u_1'' の RMS 値および実測値を、図 5 (b)にケース III ($c=0$)による 3 方向乱れの RMS 値を示す。図より(1)乱れの計算結果は実測値よりも小さいこと、(2) c が小さくなるほど、 u_1'' の RMS 値の計算結果は大きくなること、(3)流れ場の中央付近で乱れはほぼ一定値をとること、および(4)乱れの 3 方向成分の差は壁付近で強調され、流路中央部では比較的等方的であることがわかる。

4.3 乱れの微細構造

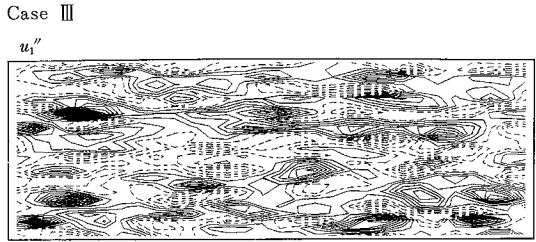
乱れの平均量が数値定数 c の影響を受けることが前節で示されたが、 c の相違が乱れの微細構造にどのよう

な変化を与えるかを調べてみる。乱れの微細構造の一例として壁と垂直の断面 (x_1-x_2 面) の u_1'' の等高線を考える。図 6 に等高線の間隔を 0.01 としたときの $x_3=0.08$ における u_1'' の等高線図を示す。図 6 (a)はケース I ($c=0.1$) の計算結果であり、(b)はケース III ($c=0$) の計算結果である。ケース III のほうが等高線が密になっており、乱れの RMS 値が大きくなることが推測される。

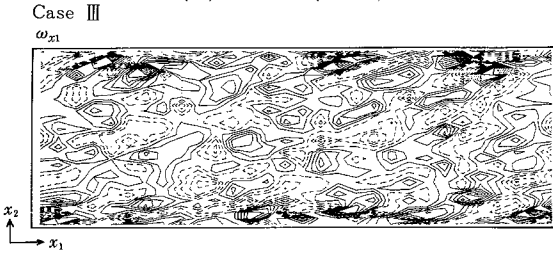
図 7 に乱れの構造の壁方向変化の例を示す。定性的には壁近くで等高線が密であり速度変動が激しいこと、壁から離れるにしたがって等高線が疎となり乱れが少なくなること、スパン方向に高速流部分と低速流部分とが交互に並んだいわゆるストリーク構造をもつことが示され



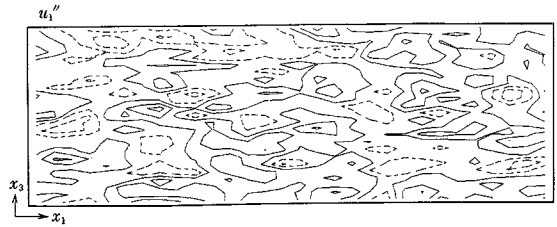
(a) ケース I (c=0.1)



(a) 壁近傍 ($x_2^+=5.94$)



(b) ケース III (c=0)



(b) 流路中央部 ($x_2^+=101$)

図 6 主流方向乱れの等高線 (x_1-x_2 断面, 実線は $u_1'' > 0$, 破線は $u_1'' < 0$)

図 7 主流方向乱れの等高線 (ケース III)

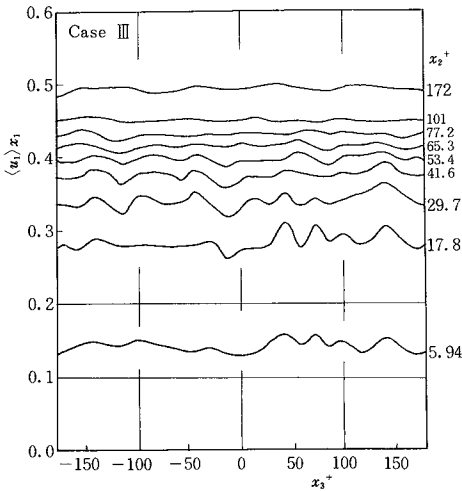


図 8 主流方向流速のスパン方向分布

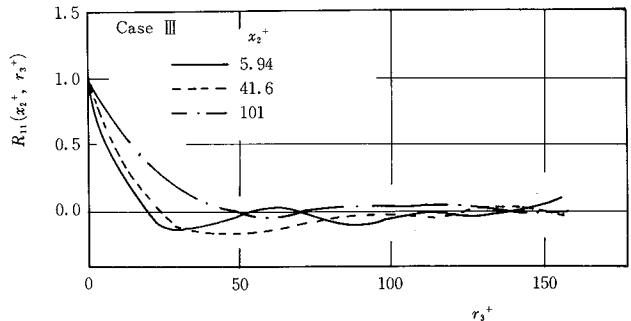


図 9 主流方向乱れの 2 点相関関数

関関数は

$$R_{11}(x_2, x_3) = \frac{\langle u_1''(x_1, x_2, x_3) \cdot u_1''(x_1, x_2, x_3 + r_3) \rangle}{\langle u_1''^2(x_1, x_2, x_3) \rangle} \quad (10)$$

によって定義される。図 9 に x_2^+ の 3 断面における $R_{11}(x_2^+, r_3^+)$ を示す。図において $R_{11}(x_2^+=5.94, r_3^+)$ の最小値は $r_3^+ \sim 28.5$ に位置している。これは高速流部分と低速流部分とのスパン方向距離の空間平均値を意味している。したがってストリークのスパン方向間隔 λ^+ はこの場合 57 程度ということになる。図 10 に 2 点相関関数から求めた λ^+ を示す。比較のために平板乱流境界層における可視化実測値²⁸⁾からの λ^+ を併記する。図は λ^+ に及ぼす c の影響が小さいこと、計算値と実測値とは傾向が良く一致することを示している。

図 11 に壁面近傍 ($x_2^+=5.94$) で主流方向速度 u_1 が概略最大となる点 ($x_3^+ \sim 29$) を含む x_1-x_2 平面における渦度の x_1 方向成分を示す。渦度の x_1 方向成分は

ている。ストリーク構造は主にスパン方向に変化する現象であるので、主流方向に平均操作を施してもその形跡は残存するものと考えられる。図 8 に x_2^+ の 9 断面における u_1 の x_1 方向平均値 $\langle u_1 \rangle_{x_1}$ を示す。図は x_2^+ の小さい範囲 ($x_2^+=5.94 \sim 41.6$) でストリーク構造がみられること、壁面からの距離が異なるとストリークの位相や構造が変化することを示している。この図から $\langle u_1 \rangle_{x_1}$ の山と谷を数えればストリークの間隔 λ^+ が求められることになるが、ここではより定量的評価を行うために x_1-x_3 平面内での 2 点相関関数を導入する。 u_1'' の 2 点相

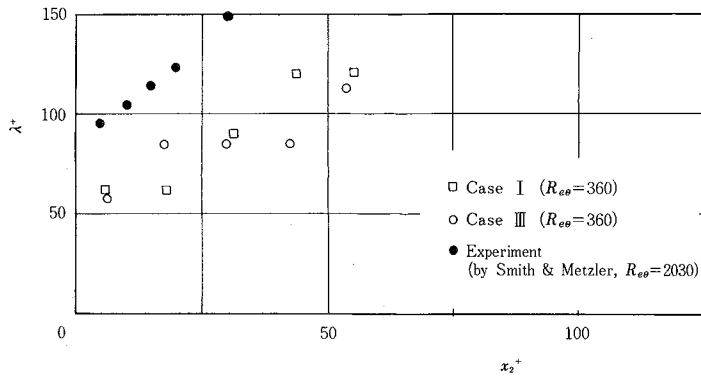


図 10 ストリークのスパン方向距離

Case III



図 11 等渦度分布 ($x_3=29$ の断面)

$$\omega_{x1} = \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \quad (11)$$

によって定義される。図において ω_{x1} は壁面近傍において主流方向に対して傾斜していることが観測される。このことは Kline らの説明した馬蹄渦の存在を暗示しており、計算結果の効果的な表現方法の開発により壁近傍の乱れの微細な構造や渦の挙動が明らかにされるものと思われる。

5. ま と め

LES の研究の動向を概説し、二次元クエット乱流に LES 計算法を適用した結果の一例を紹介した。特に、Smagorinsky 定数の影響、平均流速、乱れ、および乱れの微細構造に及ぼす影響についての基礎的資料を与えた。乱流計算に対して LES は極めて有力な手段と思われるが、乱流モデルの性質、分割数不足を補うための工夫、計算結果の適切な表現方法について知識の蓄積が必要である。特に、流入条件として cyclic 条件を使わずに任意の流れを与える方法の確立、微細な乱流構造の実測値との比較におけるパラメータの選定などが重要な課題である。

(1985 年 11 月 19 日受理)

参 考 文 献

1) 谷編, 流体力学の進歩・乱流, (昭 55), 131, 丸善

2) 吉沢, 生産研究, 36-4(昭 59-4), 175
 3) 小林, 機械学会誌, 88-799(昭 60-6), 644
 4) Deardorff, J. W., J. Fluid Mech., 41-2(1970), 453
 5) Schumann, U., J. Comput. Phys., 18(1975), 376
 6) Smagorinsky, J., Monthly Weather Rev., 93-3(1963), 99
 7) Moin, P. and Kim, J., J. Fluid Mech., 118(1982), 341
 8) 狩野・小林・石原, 機械学会論文集, 50-449 B(1984), 257
 9) 村上ほか, 建築学会大会梗概集(昭 59-10), 257
 10) Kline, S. J. et al., J. Fluid Mech., 30-4, (1967), 741
 11) 堀内, 生産研究, 36-12(昭 59-12), 507
 12) Kobayashi, T., Saga, T. and Matsumoto, H., Proc. FLUCOME 85(1985), 763
 13) 村上ほか, PIXEL, 36(1985)
 14) Voke, P. R. and Collins, M. W., J. Eng. Mathematics, 18(1984), 129
 15) Hunter, J. et al., UIT ATTI DER3' CONGRESSO NAZIONALE SUL TRASPORTO DEL CALORE, (1985), A. 41
 16) Kim, J., Phys. Fluids, 26-8(1983), 2088
 17) 河村, 第 16 回乱流シンポジウム講演集(昭 59), 56
 18) 三宅・梶島, 機械学会論文集, 51-469 B(昭 60), 2846
 19) Moin, P. and Kim, J., J. Fluid Mech., 155(1985), 441
 20) Biringen, S., NASA CR 3518, (1982), 1
 21) Orszag, S. A. and Kells, L. C., J. Fluid Mech., 96-1(1980), 159
 22) Grötzbach, G., J. Fluid Mech., 119(1982), 27
 23) Himeno, R. et al., AIAA paper 85-1617(1985)
 24) Robertson, J. M. and Johnson, H. F., J. Eng. Mech. Div., Proc. ASCE, 96-EM 6(1970), 1171
 25) Burton, R. A. and Carper, H. J., J. Lubrication Technology, Trans. ASME, 89-3(1967), 381
 26) Eckelmann, H., Mitt. Max-Planck Inst. für Strömungsforschung, Göttingen, No. 48(1970), 1
 27) Patel, V. C. and Head, M. R., J. Fluid Mech., 38-1(1969), 181
 28) Smith, C. R. and Metzler, S. P., J. Fluid Mech., 120(1983), 27