研　究　速　報
特　集　6
UDC 533.6.011

Large Eddy Simulation における Leonard 項の役割

On the role of Leonard term in Large Eddy Simulation

堀　内　　潔*
Kiyosi HORIUTI

1. Leonard 項

3次元乱流場の直接数値シミュレーションには，$Re^{4/9}$（ここに，Reはレイノルズ数を表す）個のオーダーの格子点が必要なことはよく知られている．この困難を克服するために，Large Eddy Simulation（以下 LES）では，filtering というアイデアが導入されている[1]．これは，元の変数 $f(\underline{x})$ に対し，計算に用いる格子間隔と，同オーダーのスケールの filter をかけた変数$\bar{f}(\underline{x})$を，関数 $G(\underline{x})$ との convolution から，

$$\bar{f}(\underline{x})=\int G(\underline{x}-\underline{x}')f(\underline{x}')dx \tag{1}$$

と定義するもので，実際の数値計算では $\bar{f}$ のみを直接取り扱う．一般に，$\bar{f}$ を Grid Scale(GS) の変数と呼ぶ．更に，Sub Grid Scale(SGS) の変数 f' を，次のように定義する．

$$f'(\underline{x})=f(\underline{x})-\bar{f}(\underline{x}) \tag{2}$$

ここでは，非圧縮の流れ場を考えるので，基礎方程式は，Navier-Stokes，および，連続の方程式である．

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}(u_i u_j)=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{1}{Re}\Delta u_i \tag{3}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0 \tag{4}$$

（3）および（4）式に，（1）の filter をかけると，次式を得る．

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{u_i u_j})=-\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}+\frac{1}{Re}\Delta \bar{u}_i \tag{5}$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i}=0 \tag{6}$$

ここで，（5）式の非線形項の $\overline{u_i u_j}$ は，次のように書き下せる．

$$\overline{u_i u_j}=\overline{\bar{u}_i\bar{u}_j}+\overline{\bar{u}_i u_j'}+\overline{u_i'\bar{u}_j}+\overline{u_i' u_j'} \tag{7}$$

右辺の4項のうち，第2，3項は，その影響は小さいと考えられるので，一般には，無視されている．更に，第4項は，SGS の Reynolds stress と呼ばれ，LES では，次式のような eddy viscosity K を用いて近似される．

$$\overline{u_i' u_j'}-\frac{2}{3}\delta_{ij}K_G=-K\left(\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\bar{u}_j}{\partial x_i}\right) \tag{8}$$

ここに，K_G は，SGS の乱流エネルギー $\overline{u_i' u_i'}/2$ である[2]．

ところで，初項については，$\overline{\bar{u}_i\bar{u}_j}=\bar{u}_i\bar{u}_j$ という関係は，filter の種類によっては，必ずしも成り立たず，そのために，Leonard 項と呼ばれる項が生じる[1]．

たとえば，$G(\underline{x})$ として，Gaussian 形：

$$G(\underline{x})=\sqrt{\frac{\pi}{6}}\cdot\frac{1}{\Delta_a}\exp\left(-\frac{6\underline{x}^2}{\Delta_a^2}\right) \tag{9}$$

を用いる．ここに，Δ_a は特性的な格子間隔である．（9）は，フーリエ空間では，

$$\hat{G}(k)=\exp\left(-\frac{\Delta_a^2 k^2}{24}\right) \tag{10}$$

となる．（1）において，（9）を用い，Tayloy 展開を使って評価すると，（1）式の $\bar{f}(x)$ は，次のようになる．

$$\bar{f}(x)=f(x)+c\Delta_a^2\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_k}f(x)+\cdots \tag{11}$$

ここに，定数 c は，2次モーメントである．したがって，

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{\bar{u}_i\bar{u}_j}-\bar{u}_i\bar{u}_j)=\frac{\partial}{\partial x_j}\left[c\Delta_a^2\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_k}(\bar{u}_i\bar{u}_j)\right]+\cdots \tag{12}$$

という評価ができる．

ここで，具体的な流れ場として，平行平板間の乱流場を考える．境界条件としては，下流および横断方向には周期境界条件を，壁では粘着の条件を課す．また，下流，横断，および壁に垂直な方向の，座標，速度成分を，おのおの，$x, y, z, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ で表す．このとき，GS の乱流エネルギー $\Gamma=\langle\bar{u}_i''\bar{u}_i''\rangle/2$（ここに，$\langle\ \rangle$ はx, y 方向の平均，もしくは，アンサンブル・アベレジを表し，$\bar{u}_i''=\bar{u}_i-\langle\bar{u}_i\rangle$ とする）のバランスは，次式で与えられる．

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Gamma}{\partial t}=&-\frac{\partial}{\partial z}\langle\bar{w}\Gamma\rangle-\langle\bar{u}''\bar{w}\rangle\frac{\partial\langle\bar{u}\rangle}{\partial z}\\&-\left\langle\left(K+\frac{1}{Re}\right)\frac{\partial\bar{u}_i''}{\partial x_j}\frac{\partial\bar{u}_i''}{\partial x_j}\right\rangle-\left\langle\bar{u}_i''\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_i}\right\rangle\\&+\frac{\partial}{\partial z}\left\langle\left(K+\frac{1}{Re}\right)\frac{\partial\Gamma}{\partial z}\right\rangle-\left\langle\bar{u}_i''\frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{\bar{u}_i\bar{u}_j}-\bar{u}_i\bar{u}_j)\right\rangle\end{aligned} \tag{13}$$

* 東京大学生産技術研究所　第1部

研　究　速　報

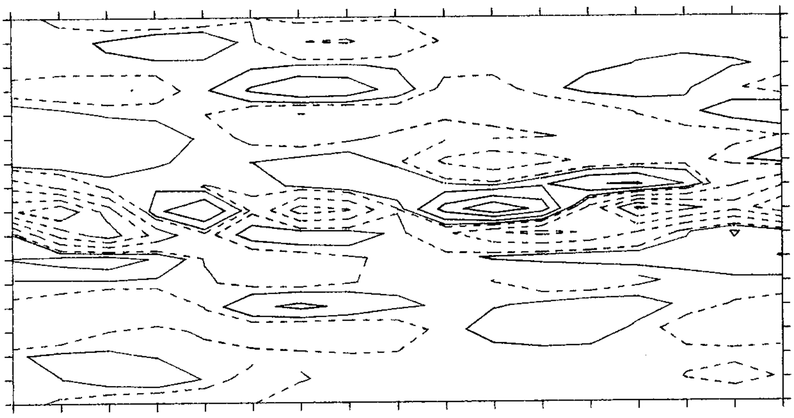


図1　Case 1 の Cascade 項 $i=1$ 成分の $t=22.0$ における $x-y$ 平面内空間分布，$z=0.045$ で，横軸は x 方向，縦軸は y 方向

右辺の各項は，順に，velocity transport, production, dissipation, pressure transport, viscovs diffusion, cascade と呼ばれる．

(12) の評価により，(13) の cascade 項中には，たとえば，$-\langle \bar{u}\bar{u}\bar{u}_{xxx}\rangle$ という項を得るが，周期境界条件の下では，これは，$-\langle \bar{u}_x{}^3\rangle$ と変形される．この量は，ω_i を i 方向の渦度としたとき，$\langle \omega_i{}^2\rangle$ のバランス中では，渦の伸長を表す項として現れ，Skewness と呼ばれている量で，正の値を持つことが知られている．

2．離散化との関係

本節では，数値計算における離散化の結果生じる誤差項と Leonard 項との関係を調べる．

(5)式の非線形項を，保存形の中心差分で近似すると次のような誤差評価が得られる(簡単のため，2次元で考え，各変数の上ツキのバーは省略する)．

$$\frac{\partial}{\partial x}(uu)\simeq\frac{1}{2\Delta x}(u_{i+1,\,j}u_{i+1,\,j}-u_{i-1,\,j}u_{i-1,\,j})$$

$$\simeq 2uu_x+(\Delta x)^2\left\{\frac{2}{3!}\underline{uu_{xxx}}+\underline{u_xu_{xx}}\right\}+\cdots$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(uv)\simeq\frac{1}{2\Delta y}(u_{i,j+1}v_{i,j+1}-u_{i,j-1}v_{i,j-1})$$

$$\simeq uv_y+vu_y+(\Delta y)^2\left\{\frac{1}{3!}\underline{uv_{yyy}}+\frac{1}{3!}vu_{yyy}\right.$$

$$\left.+u_yv_{yy}+v_yu_{yy}\right\}+\cdots \qquad (14)$$

(14) 式の右辺を見ると．1節の (12) 式に相当する項が含まれていることがわかる．更に，右辺の主要な項（下線を付した項）を，連続の方程式と周期境界条件のもと変形すると，$\Delta x=\Delta y$ のとき，エネルギー・バランスの式中では，$\frac{2}{3}\langle(u_x)^2\rangle$ という項が得られ，1節で述べた Skewness と関係づけられることがわかる．一般に，

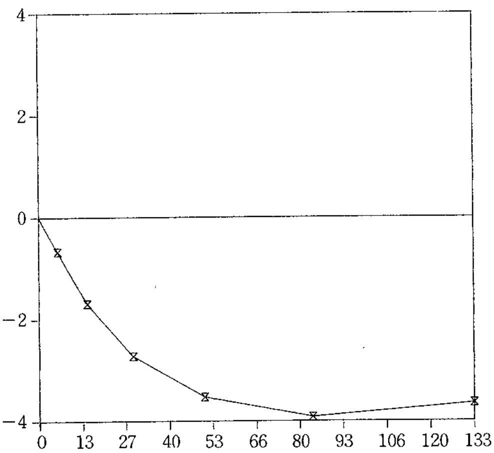
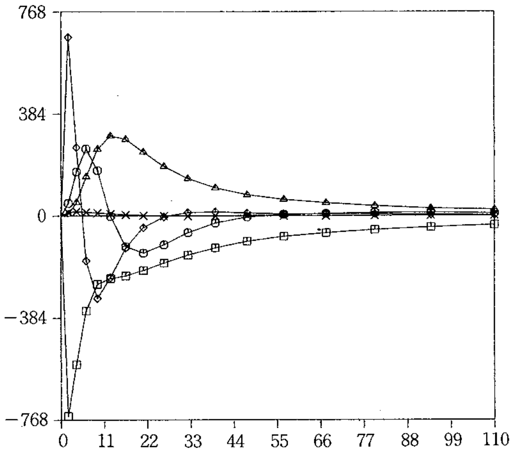


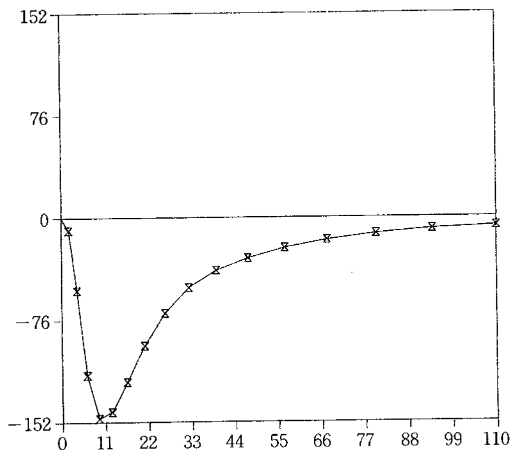
図2　Case 1 のアンサンブル・アベレジをとった Cascade 項の z 方向分布　横軸は z 軸，目盛は，壁座標

Skewness は正の値を持つため，この誤差項は負の値をもち，dissipation として効いている．

ところで，B. P. Leonard[3] は，passive scalar の移流方程式に基づいた議論から，中心差分のもつ3階微分の dispersion のため，計算の安定化が図れないと結論し，Quick scheme の一次元版を提唱したが，非線形性を考慮すれば，上記のように，エネルギーの dissipation として働くことがわかり，この意味では，B. P. Leonard の指摘は当たっていない．さらに，Quick scheme のようなスキームを用いた場合，その smoothing に相当する操作により，GS でエネルギーを dissipate しすぎるため，微細構造までとらえられる正確なシミュレーションは期待できない．また，打ち切り誤差を利用しているため，dissipation の正確な量的把握が難かしく，精度の高いシミュレ



(a)



(b)

図3(a)　Case 2のGSエネルギー・バランス．横軸はz軸，各記号は，(13)式中の△PRODUCTION，○VELOCITY TRANSPORT，×PRESSURE TRANSPORT，◇VISCOUS DIFFUSION，□DISSIPATION，⧖CASCADEに対応する

図3(b)　Case 2のCascade項のz方向分布

ーションには不向きといわざるをえない．

3.　数値計算の結果

1, 2節では，Taylor展開に基づく評価を行ったが，本節では，実際の数値計算で，フィルターを厳密に課した上で，Leonard項を評価してみる．

考える流れ場は，2節で述べた平行平板間の3次元乱流場である．計算スキームの詳細は，Horiuti[4]を参照されたい．ただし，ここでは，x, y方向に，フーリエ変換をしていることを利用し，フーリエ空間で，非線形項に(10)式をかけることにより，この2方向には，filteringを厳密に評価している．ただし，z方向では，2節で述べた中心差分を用いることにより，Leonard項を近似している．

計算は，格子点数を，$NX=NY=16, NZ=21$としたCase 1と，$NX=NY=64, NZ=61$としたCase 2の2つの場合を行った．

図1は，Case 1の$t=22.0$におけるcascade項のx方向($i=1$)成分の，$z=0.045$におけるx-y平面での瞬間的な空間分布を示す等高線である．値が正の部分は実線，負の部分は破線でプロットしてあるが，ほとんどの部分で負となっており，dissipationとして働いていることがわかる．総和をとったCascade項((13)式の右辺第6項)のz方向の分布の壁付近の拡大図は，図2に示されているが，アンサンブル・アベレジをとっても，やはり負となっている．

図3(a)は，Case 2のGSエネルギー・バランス((13)式)を図3(b)は，そのCascade項のみのz方向の分布を示す．GSのエネルギー・バランスの特徴として，壁の近くで，diffusionとdissipationが大きな値を持っていることがわかるが，cascade項も負の値を示しており，dissipationとして効いている．また，その値も他の量にくらべ，無視できない大きさをとっている．

4.　お わ り に

LESにおけるfilteringによって生じるLeonard項について調べ，エネルギーのcascadeとしての役割を確かめた．したがって，LESにおいては，

(i)　可能で容易な場合には，$\dfrac{\partial}{\partial x_j}\overline{\bar{u}_i\bar{u}_j}$の項を厳密に計算する

(ii)　不可能もしくは，計算上困難な場合には，保存形の中心差分により近似するか，もしくは，4次以上の精度のスキームを用い，Taylor展開により求めた(12)式の項をexplicitに付加する

のが望ましいと思われる．

なお，1節の(12)式，2節の(14)式については，ここでは，大ざっぱな議論により，Skewnessとの関係を述べ，数値計算によって確かめたが，A. Leonard[1]では，一様等方性乱流の下では，厳密にSkewnessと関係づけられることが証明されている．

本研究には，東大大型計算機センターのS-810-20を用いたが，その計算費用の一部には，本所選定研究費があてられたことを付記する．　(1985年10月24日受理)

参 考 文 献

1) A. Leonard (1974)：Adv Geophys., 18A, p. 237
2) 堀内潔 (1984)：生産研究，36巻12号，p. 7
3) B. P. Leonard (1978)：Appl. Math. Modelling, Vol. 2, P. 59
4) K. Horiuti (1985)：J. Phys. Soc. Japan, Vol. 54, P. 2855