

旋回乱流の数値予測に関する研究

— 第1報 修正 $k-\epsilon$ モデルによる数値計算 —

Investigation on Numerical Prediction of Swirl Turbulent Flow
— 1st Report Numerical Simulation by Modified $k-\epsilon$ Model —

小林 敏雄*・依田 守生*
Toshio KOBAYASHI and Morio YODA

1. ま え が き

旋回流はエンジニアリングの広範な分野に登場し重要な役割を果たしている。たとえば、旋回バーナにおける火炎の安定化¹⁾、サイクロン分離器内における捕集効率の向上^{2),3)}、旋回ディフューザにおける効率向上、あるいは電子材料の結晶引き上げプロセスにおける、つば内融液の流動パターンを決定づける重要な因子として注目されている。このように、種々のプロセスにおいてしばしばキーファクターとなる旋回流の基本的な性質を理解し、制御することはそれらプロセスの改善を行ううえでも重要なことである。旋回流に関する基礎的な研究としては、直円管内旋回流、絞り付き管・拡大管内旋回流、スワールジェット等について、その平均流速分布、乱流量等に関する実験的研究があるが^{4)~6)}、各レイノルズ応力成分、壁付近での挙動についての実験データはきわめて少ない。また、現象の複雑さのために、理論的取り扱いは理想化された場合のみに限られている⁷⁾。

一方、最近の電子計算機の大容量・高速化に伴って乱流をも含めた流体現象を数値的に解析することが盛んに試みられ、多くのモデル乱流計算法が提案されている。現在のところ、2方程式モデルの一つである $k-\epsilon$ モデルが Launder らによる係数値の標準化を経て最も実用的な乱流モデルとみなされている。

ところがこの標準的な $k-\epsilon$ モデルを用いて旋回のある流れ場を解析すると、実験的、理論的事実と相いれない解を示し、その相違は単にモデル中の係数値を変更するのみでは解決できないであろうことが報告されている^{8),9)}。同様の傾向は剥離流れ、ラウンドジェット等においても報告されそれぞれの流れ場にに応じた改良案が提案されている。これらを考え合わせると旋回乱流場に対しても $k-\epsilon$ モデルが適用できるような改良案を提出することは意義のあることであると思われる。

本報では $k-\epsilon$ モデルを基礎に乱れの非等方性を吟味した改良方法を提案し、旋回を含む流れ場としては最も

基本的な直円管内旋回流の解析を試みるものである。

2. 基礎方程式

本報で対象とする流れ場は図1に示すように、直円管内の旋回流であり、この流れ場を非圧縮2次元軸対称流として取り扱う。座標系および速度成分は次のように定義する。すなわち、管軸の方向に x 軸、管径方向に r 軸、周方向に θ 軸をとった円柱座標系とし、それぞれの方向の速度成分を u, v, w で示す。このとき、レイノルズ方程式および連続の式は次のようになる。

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \bar{u}\bar{u} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \bar{v}\bar{u} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \langle u'u' \rangle - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \langle v'u' \rangle + \nu \left\{ \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \right\} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \bar{u}\bar{v} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \bar{v}\bar{v} - \frac{\bar{w}^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial x} \langle u'v' \rangle - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \langle v'v' \rangle + \frac{\langle u'w' \rangle}{r} + \left\{ \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} - \frac{\bar{v}}{r^2} \right\} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \bar{u}\bar{w} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \bar{v}\bar{w} + \frac{\bar{v}\bar{w}}{r} = -\frac{\partial}{\partial x} \langle u'w' \rangle - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \langle v'w' \rangle - \frac{\langle v'w' \rangle}{r} + \nu \left\{ \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \bar{w}}{\partial r} - \frac{\bar{w}}{r^2} \right\} \quad (3)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \bar{v} = 0 \quad (4)$$

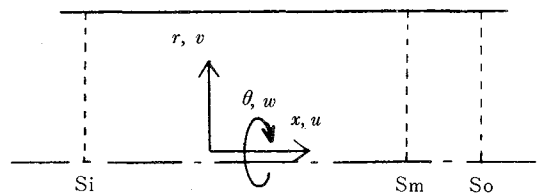


図1 座標系と流速分布

* 東京大学生産技術研究所 第2部

ここで $\bar{\cdot}$ は時間平均値, \bar{p} は圧力, ρ は密度, ν は動粘性係数, $\langle u' u' \rangle$ 等はレイノルズ応力テンソルの成分である。

3. 乱流モデルと数値解析法

3.1 $k-\epsilon$ モデル

Boussinesq に端を発する渦粘性仮定によると, レイノルズ応力は次のように書き表すことができる。

$$\langle u'_i u'_j \rangle = \frac{2}{3} \delta_{ij} k - \nu_E \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (5)$$

ここに, δ_{ij} はクロネッカーの δ , k は乱流エネルギー, ν_E は有効動粘性係数であり渦動粘性係数 ν_T と分子動粘性係数 ν の和の形で書かれる。 ν_T は k およびその散逸率 ϵ から式 (6) を用いて求め, k および ϵ 自身はそれぞれ輸送方程式 (7), (8) を解いて求める。

$$\nu_T = C_\mu k^2 / \epsilon \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \bar{u} k + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \bar{v} k \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\nu_E}{\sigma_K} \frac{\partial k}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\nu_E}{\sigma_K} \frac{\partial k}{\partial r} + G_K - \epsilon \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \bar{u} \epsilon + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \bar{v} \epsilon \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\nu_E}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\nu_E}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial r} \\ &+ (c_1 G_K - c_2 \epsilon) \epsilon / k \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} G_K = \nu_E & \left[2 \left\{ \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial r} \right)^2 + \frac{\bar{v}^2}{r^2} \right\} + \right. \\ & \left. \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right)^2 + \left(r \frac{\partial \bar{w}}{\partial r} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (9)$$

基礎方程式系 (1)~(4) にモデル方程式系 (5)~(9) を加え合わせると方程式系が閉じ, 流れ場を計算することができる。モデル方程式系における $c_1, c_2, C_\mu, \sigma_K, \sigma_\epsilon$ は経験定数であり, 本報では標準的な値すなわち

$$\begin{aligned} c_1 &= 1.44, c_2 = 1.92, C_\mu = 0.09, \sigma_K = 1.0, \\ \sigma_\epsilon &= 1.3 \text{ を用いる。} \end{aligned}$$

3.2 改良モデル

Lilley および Chigier は半実験的な手法を用いて旋回噴流を取り扱い, 旋回流にとって重要な渦動粘性係数 $\nu_{r\theta}$ が次のような式で整理されることを示した¹⁰⁾。

$$\nu_{r\theta} = l_{r\theta} \left[\left(r \frac{\partial \bar{w}}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\bar{w}}{r} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (10)$$

$$l_{r\theta} = \alpha_{r\theta} r \quad (11)$$

r は中心軸からの距離である。式 (10) は混合長理論による表式であるが, 近年 Karasu により管内旋回流に対しても適用された。Karasu は基礎方程式 (3) におけるレイノルズ応力 $\langle u' w' \rangle$ および $\langle v' w' \rangle$ を渦粘性の仮定を用いてモデル化したときに現れる $\nu_{x\theta}$ および $\nu_{r\theta}$ について式 (10) を採用し, 他の渦動粘性係数については標準

的な $k-\epsilon$ モデルから予測される値を用いた。本報では $\nu_{r\theta}$ のみ式 (10) を用いてモデル化する。他の五個の渦動粘性係数は以下のように仮定する。すなわち式 (6) による渦動粘性係数の表現は

$$\nu_T = C_\mu k^{1/2} \cdot k^{3/2} \epsilon^{-1} \quad (12)$$

と書ける。式 (12) において, $k^{1/2}$ は速度, $k^{3/2} \cdot \epsilon^{-1}$ は長さの次元を持ち, それぞれ乱流速度, 混合距離と呼ばれる。標準的 $k-\epsilon$ モデルでは, 混合距離 l は方向によって変わらないとしている (乱れの等方性) が, ここではその方向依存性 (乱れの異方性) を考慮し, $** (** = xx, xr, x\theta, rr, \theta \theta)$ 方向について, 次のように表すことにする。

$$l_{**} = \alpha_{**} k^{3/2} \cdot \epsilon^{-1} \quad (13)$$

式 (12) 中の混合距離のかわりに式 (13) の l_{**} を用いると

$$\nu_{T**} = \alpha_{**} C_\mu k^2 \epsilon^{-1} \quad (14)$$

を得る。 α_{**} 値は経験定数として与えることになる。

3.3 数値計算法と境界条件

基礎方程式 (1)~(4), k および ϵ に関する方程式 (7), (8), (9) を差分方程式群に変換して解く。標準的 $k-\epsilon$ モデルでは (5), (6), 改良モデルでは (10), (11), (14) を用い方程式系を閉じる。差分計算には SMAC 法を用いる。差分スキームとしては空間的には中心差分, 時間的には Adams-Bashforth 法を用いる。計算は時間発展型で行われたが, 本報では定常収束解を得るのが目的であり, 解の時間依存性については特に議論を行わない。なお, 壁境界条件としては, Log-Law として知られている壁法則を用いて境界層をモデル化する。

4. 計算結果と考察

本報では計算対象の旋回流として比較的単純な直円管内旋回流を選び, 前章で述べた 2 種の乱流モデルを用いて数値計算を試みている。なお, 数値計算の検証のための基礎データとして村上らの直円管内旋回流の研究⁵⁾ を参考にしている。この実験的研究は作動流体として水を用い, 上流部にスワラーによって与えた旋回成分が下流にいくにしたがって減衰してくようすを時間平均的流速分布によって議論したものである。

4.1 解析領域と入口条件

前述の村上らの研究を参考に, 旋回流が十分発達したとされる領域のみを解析対象とする。すなわち, ある断面 Si における実測値を入口条件とし, そこから下流方向に管径の 9 倍の領域について計算を行う。入口条件は $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ については実測値を, k および ϵ については

研究速報
次のように仮定する。

$$k \text{ の条件: } (\lambda/8)c_{\mu}^{1/2}(\bar{u}^2 + \bar{w}^2) \quad (15)$$

$$\epsilon \text{ の条件: } c_{\mu}k^{3/2}/c_{\mu}^{1/4}\chi\delta \quad (16)$$

式(15)における λ は管摩擦係数で、次式を用いている。

$$\lambda = [2\log_{10}(Re\lambda^{1/2}) - 0.8]^{-2} \quad (17)$$

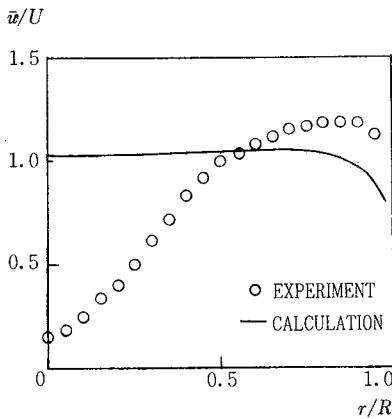
また、式(16)における χ はカルマン定数(0.41)である。

出口条件としては自由流出を用いる。

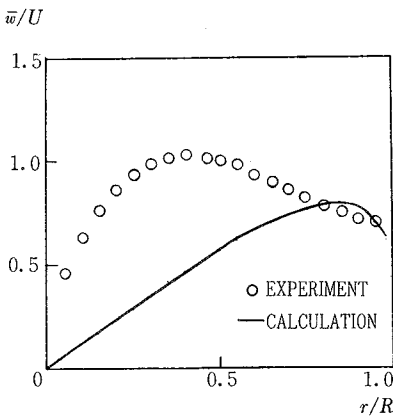
なお、実験値との比較は入口より7D下流の断面 S_M で行う。また、計算領域の格子数は径方向に20、軸方向に36の等間隔格子である。

4.2 標準 $k-\epsilon$ モデルによる計算結果

図2に標準 $k-\epsilon$ モデルによる計算結果と実測値との比較を示す。実験値では軸方向流速 \bar{u} の分布は、遠心力



(a) 軸方向流速



(b) 周方向流速

図2 $k-\epsilon$ モデルによる計算結果

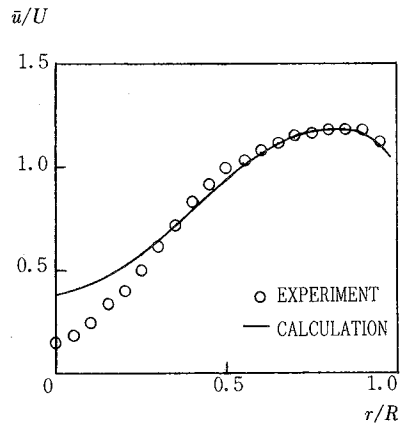
の影響で右上がりの直線に近いという際立った特徴を持っている。しかしながら $k-\epsilon$ モデルによる計算結果は中央がややくぼんでいるものの、ほとんど平坦である。周方向流速 \bar{w} の分布も実験では中心軸付近では剛体的回転を示す強制渦型、ピーク値から壁近くまでは中心軸からの距離 r のべき乗に比例して減衰する自由渦型を示す。それに対し、計算値は壁付近を除いたほとんどすべての領域で強制渦型の分布を示す。同様な結果が高城⁸⁾、Karasu⁹⁾によっても報告されており、計算値は実験値を再現していない。

4.3 改良モデルによる計算結果

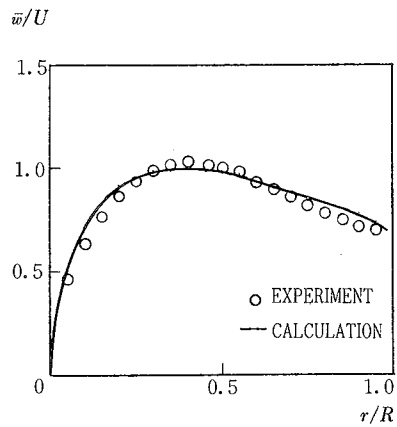
図3に改良モデルによる計算結果を示す。用いたパラメータの値を表1に示す。図よりこのモデルは実験結果を良く表しているように思われる。

5. まとめ

渦粘性の仮定を用いて $k-\epsilon$ モデルの範囲内で旋回流



(a) 軸方向流速



(b) 周方向流速

図3 改良モデルによる計算結果(ケース2)

表 1 改良モデルにおけるパラメータ値

	α_{xx}	α_{xr}	$\alpha_{x\theta}$	α_{rr}	$\alpha_{r\theta}$	$\alpha_{\theta\theta}$
Case 1	1.0	1.0	1.0	1.0	0.05	1.0
Case 2	1.0	0.01	1.0	0.1	0.025	1.0

の解析を行った。標準的な $k-\epsilon$ モデルでは旋回流の特徴的な流速分布を再現できないことを示した。その点を改善するために、従来の $k-\epsilon$ モデルから等方性の仮定を取り去り、渦粘性に異方性を入れることにより、モデルの改良を行った。このモデルは大きな改善をもたらし、直円管内旋回流については満足できる結果を得た。すなわち、渦粘性に異方性を与えるという試みが旋回流の平均流速分布の予測に有効であることが示された。しかしながらその汎用性およびレイノルズ応力レベルでの比較検討は今後に待たなければならない。なお、本研究については本所 NST (乱流の数値シミュレーション) 研究グループより有益な議論を得た。記して謝意を表す。なお、本報の一部は本所選定研究費によっていること、計算は

東京大学計算機センター HITAC-280 H システムによって行われたことを付記する。

(1985 年 10 月 26 日受理)

参 考 文 献

- 1) Lewis, B. and von Elbe, G., Combustion Flames and Explosion of Gases, Academic Press, 1951
- 2) Khalil, E. E., ASME publication, 79-HT-31
- 3) Boysan, F., Ayers, W. H. and Swithenbank, J., Trans. IChem E. 60 (1982), 222
- 4) Murakami, M. and Kito, O., Bull. JSME 19-123 (1976), 118
- 5) Yoon, H. K. and Lilley, D. G., Paper AIAA 83-0315, Reno Nevada, Jan. 10-13, 1983
- 6) Jackson, J. W. and Lilley, D. G., Paper AIAA 83-1202, Seattle, Washington, June 27-29, 1983
- 7) 小川明, 渦学, 山海堂 (1981), 89
- 8) Karasu, T., Ph. D. Thesis, Imperial College, Univ. of London, Mech. Engg. Dept., HTS/80/9, 1980
- 9) 松本, 高城, 機講論, No. 824-6 (1982), 72
- 10) Lilley, D. G. and Chigier, N. A., Int. J. Heat Mass Transf., 14 (1971), 573

