研　究　速　報
特 集 9　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　UDC 532.542：519.6

非等方 k-ε モデルを用いた矩形管内乱流の数値解析

Numerical Simulation of a Turbulent Rectangular-Duct Flow by the Anisotropic k-ε Model

西 島 勝 一*・吉 澤 　 徵*
Shoichi NISHIZIMA and Akira YOSHIZAWA

1. は じ め に

乱流は非常に多くのスケールを含むため，自然および工学的現象に現れるせん断乱流の計算機による直接シミュレーションは不可能に近い[1]．このため，種々の乱流モデルが考案されているが，代表的なものとして LES，k-ε モデル，応力モデルを挙げることができる．工学的問題ではこれらの内，結果が妥当なことと計算時間が比較的少ないこと等によって，k-ε モデルが非常によく用いられている．

本論文では，従来の k-ε モデルを改良し，

1) 壁面上での平均流速，乱流エネルギー等に正しい境界条件を課せられるようにした．
2) 統計理論的に得られた渦粘性表現の補正式[2]を用いて，乱流強度の非等方性を表せるようにした．

この非等方 k-ε モデル[3)~5)]を用いて正方形管内乱流を数値解析し，実験結果と比較してよい結果が得られることを示す．

2. k-ε モ デ ル

速度，圧力の平均部分とそれからのずれを示す擾乱部分をそれぞれ $(\bar{v},\bar{p})$ と (v',p') で表すと，3次元非圧縮・粘性流体に対する平均部分の基本方程式は，

$$\frac{D\bar{v}_\alpha}{Dt}\equiv\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{v}_a\frac{\partial}{\partial x_a}\right)\bar{v}_\alpha=-\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial}{\partial x_a}\left(R_{\alpha a}+\nu\frac{\partial\bar{v}_\alpha}{\partial x_a}\right), \qquad (1)$$

$$\frac{\partial\bar{v}_a}{\partial x_a}=0, \qquad (2)$$

で与えられる．ν は動粘性率であり，$R_{\alpha\beta}$ はいわゆるレイノルズ応力で，

$$R_{\alpha\beta}=-\langle v'_\alpha v'_\beta\rangle, \qquad (3)$$

で与えられる（<> はアンサンブル平均を表し，くり返し下つき添え字については1から3まで和をとることにする）．

(1)は，$R_{\alpha\beta}$ と $\bar{v}$ との間になんらかの関係づけを与えなければ解くことができない．そのため，k-ε モデルでは擾乱場の基本的統計量として乱流エネルギー k とエネルギー散逸率 ε を選び，

$$R_{\alpha\beta}=-2k\delta_{\alpha\beta}/3+\nu_e e_{\alpha\beta}, \qquad (4)$$

渦粘性率は，

$$\nu_e=C_\nu k^2/\varepsilon, \qquad (5)$$

また，k，ε の支配方程式として，

$$\frac{Dk}{Dt}\equiv\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{v}_a\frac{\partial}{\partial x_a}\right)k=R_{ab}\frac{\partial\bar{v}_b}{\partial x_a}-\varepsilon+\frac{\partial}{\partial x_a}\left(C_k\frac{k^2}{\varepsilon}\frac{\partial k}{\partial x_a}+\nu\frac{\partial k}{\partial x_a}\right), \qquad (6)$$

$$\frac{D\varepsilon}{Dt}\equiv\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{v}_a\frac{\partial}{\partial x_a}\right)\varepsilon=C_{\varepsilon1}k\left(\frac{\partial\bar{v}_b}{\partial x_a}+\frac{\partial\bar{v}_a}{\partial x_b}\right)^2-C_{\varepsilon2}\frac{\varepsilon^2}{k}+\frac{\partial}{\partial x_a}\left(C_{\varepsilon3}\frac{k^2}{\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_a}+\nu\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_a}\right), \qquad (7)$$

のようにモデル化されている．上式中の $\delta_{\alpha\beta}$ はクロネッカーのデルタ記号，また，

$$e_{\alpha\beta}=\partial\bar{v}_\alpha/\partial x_\beta+\partial\bar{v}_\beta/\partial x_\alpha. \qquad (8)$$

3. 非等方 k-ε モデル

従来の $R_{\alpha\beta}$ の表式(4)は，溝乱流では乱流強度の非等方性を表現できない．

吉澤は，統計理論により渦粘性表現をより高次まで求めることに成功したが[2]，本研究では，その結果を従来のモデルに付加することを試みた．すなわち，レイノルズ応力を，

$$R_{\alpha\beta}=-\frac{2}{3}k\delta_{\alpha\beta}+\nu_e\left(\frac{\partial\bar{v}_\alpha}{\partial x_\beta}+\frac{\partial\bar{v}_\beta}{\partial x_\alpha}\right)+\frac{1}{3}\left(\sum_m\tau_m S_{maa}\right)\delta_{\alpha\beta}+R'_{\alpha\beta}. \qquad (9)$$

上式で，

$$\tau_m=C_{\tau m}\frac{k^3}{\varepsilon^2}, \qquad S_{1\alpha\beta}=\frac{\partial\bar{v}_\alpha}{\partial x_a}\frac{\partial\bar{v}_\beta}{\partial x_a},$$

$$S_{2\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\bar{v}_\alpha}{\partial x_a}\frac{\partial\bar{v}_a}{\partial x_\beta}+\frac{\partial\bar{v}_\beta}{\partial x_a}\frac{\partial\bar{v}_a}{\partial x_\alpha}\right),$$

$$S_{3\alpha\beta}=\frac{\partial\bar{v}_a}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\bar{v}_a}{\partial x_\beta},$$

* 東京大学生産技術研究所　第1部

$$R'_{\alpha\beta}=-\sum_m \tau_m S_{m\alpha\beta}, \qquad (\text{ただし } m=1\sim 3) \qquad (10)$$

とし，(9)の右辺第3，4項を新しく加えた式を適用した．なお，定数 $C_{\tau 1}$，$C_{\tau 3}$ は，溝乱流の解析で最適化された

$$C_{\tau 1}=0.07, C_{\tau 3}=-0.015,$$

を用いた．しかし，$C_{\tau 2}$ は最適化がまだされていないので，$C_{\tau 2}=-0.1$ をとりあえず使用した．

モデル定数は，

$C_\nu\sim 0.094$，$C_k\sim 0.09$，$C_{\varepsilon 1}\sim 0.13$，$C_{\varepsilon 2}\sim 1.9$，$C_{\varepsilon 3}\sim 0.069$，

と選ばれている[3)~5)]．C_ν は k-ε モデルでは通常0.09とされているが，ここでは本方式で溝乱流を解析した場合に対数速度則等を良く再現するように最適化された値0.094を用いている．

4. 壁面上の滑りなし条件の適用

k-ε モデルでは(5)の渦粘性表現がモデルの重要な基礎となっているが，これは壁に近い粘性底層内においては成立しないと考えられている．そこで，(1)，(4)〜(7)，(9)〜(10)の渦粘性率に関係する各項すなわち k^2/ε，k^3/ε^2 を含む項へ粘性底層で減衰する，下の壁減衰関数 f_D を乗ずる．

$$f_D=(1-e^{-\frac{y^+}{5.2}})(1-e^{-\frac{z^+}{5.2}}), \qquad (11)$$

$$y^+=v_2^* x_2'/\nu,\quad v_2^*=\sqrt{\nu\left(\frac{d\bar{v}_1}{dx_2}\right)_{x_2=\pm D}},$$

$$z^+=v_3^* x_3'/\nu,\quad v_3^*=\sqrt{\nu\left(\frac{d\bar{v}_1}{dx_3}\right)_{x_3=\pm D}}. \qquad (12)$$

ただし，x_2'，x_3' は図1の $x_2=\pm D$，$x_3=\pm D$（壁）からの距離であり，(11)の指数の5.2は，溝乱流で最適化された値である．

特に，流れが定常状態のとき，壁上で(7)を検討してみる．$\bar{v}$，k が零である壁近くでは，右辺第2項を除く他のすべての項は有限であるのに対し，第2項は発散し等式が成立しない．それゆえ，(7)の右辺第2項にも壁減衰関数を乗ずる必要がある．しかも，壁近くで k が x' の2乗で小さくなることを考慮すれば，(7)の右辺第2項では f_D の2乗とする必要がある．

さらに，両壁の角の影響を的確に取り入れるために，次の関数を導入し，壁減衰関数に乗じた．

$$f_C=(1-e^{-\sqrt{y^{+2}+z^{+2}}/B}) \qquad (13)$$

ただし，まだ B が最適化されていないので，以後の結果は"$B=50$ で一番影響の深刻な(7)の右辺第2項のみに適用した"ものを示している．

5. 流れ函数の導入と正方形管への適用

図1のように座標をとり，次の流れ函数を導入する．

$$\omega=-\Delta_{yz}\psi=-\left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\psi, \qquad (14)$$

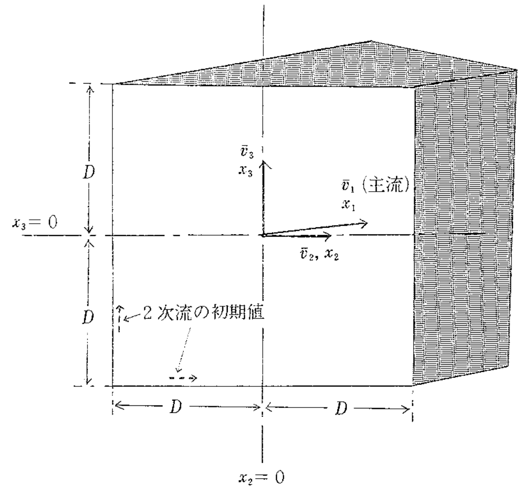

図1　座標

$$\bar{v}_2=\frac{\partial\psi}{\partial x_3},\quad \bar{v}_3=-\frac{\partial\psi}{\partial x_2}. \qquad (15)$$

下流方向には $\bar{v}$，k 等の各量が変化しない，つまり $df/dx_1=0$ を考慮し，速度を $\sqrt{-(dp/dx_1)D}$，距離を D で無次元化し，整理すると，

$$\begin{aligned}\frac{\partial\bar{v}_1}{\partial t}=&\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\frac{\partial\bar{v}_1}{\partial x_3}-\frac{\partial\psi}{\partial x_3}\frac{\partial\bar{v}_1}{\partial x_2}+1\\&+(\nu+\nu_e)\Delta_{yz}\bar{v}_1+\frac{\partial\nu_e}{\partial x_2}\frac{\partial\bar{v}_1}{\partial x_2}+\frac{\partial\nu_e}{\partial x_3}\frac{\partial\bar{v}_1}{\partial x_3}\\&-\frac{\partial}{\partial x_2}\left\{\left(C_{\tau_1}+\frac{C_{\tau_2}}{2}\right)\frac{\partial\bar{v}_1}{\partial x_2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2\partial x_3}+\frac{\partial\bar{v}_1}{\partial x_3}\left(C_{\tau_1}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_3^2}\right.\right.\\&\left.\left.-\frac{C_{\tau_2}}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2}\right)\right\}+\frac{\partial}{\partial x_3}\left\{\left(C_{\tau_1}+\frac{C_{\tau_2}}{2}\right)\frac{\partial\bar{v}_1}{\partial x_3}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2\partial x_3}\right.\\&\left.+\frac{\partial\bar{v}_1}{\partial x_2}\left(C_{\tau_1}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2}-\frac{C_{\tau_2}}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_3^2}\right)\right\},\end{aligned} \qquad (16)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\omega}{\partial t}=&\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\frac{\partial\omega}{\partial x_3}-\frac{\partial\psi}{\partial x_3}\frac{\partial\omega}{\partial x_2}+(\nu+\nu_e)\Delta_{yz}\omega+2\frac{\partial\nu_e}{\partial x_2}\frac{\partial\omega}{\partial x_2}\\&+2\frac{\partial\nu_e}{\partial x_3}\frac{\partial\omega}{\partial x_3}-\left(\frac{\partial^2\nu_e}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2\nu_e}{\partial x_3^2}\right)\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x_3^2}\right)\\&-4\frac{\partial^2\nu_e}{\partial x_2\partial x_3}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2\partial x_3}-\left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\\&\times\left\{(C_{\tau_1}-C_{\tau_2})\omega\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2\partial x_3}+C_{\tau_3}\frac{\partial\bar{v}_1}{\partial x_2}\frac{\partial\bar{v}_1}{\partial x_3}\right\}+\frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_3}\\&\times\left\{-(C_{\tau_1}-C_{\tau_3})\left(\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2}\right]^2-\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial x_3^2}\right]^2\right)\right.\\&\left.+C_{\tau_3}\left(\left[\frac{\partial\bar{v}_1}{\partial x_2}\right]^2-\left[\frac{\partial\bar{v}_1}{\partial x_3}\right]^2\right)\right\},\end{aligned} \qquad (17)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial k}{\partial t}=&\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\frac{\partial k}{\partial x_3}-\frac{\partial\psi}{\partial x_3}\frac{\partial k}{\partial x_2}+\nu_e\left\{\left(\frac{\partial\bar{v}_1}{\partial x_2}\right)^2\right.\\&\left.+\left(\frac{\partial\bar{v}_1}{\partial x_3}\right)^2+4\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2\partial x_3}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x_3^2}\right)^2\right\}\\&+C_{\tau_1}\left\{-\frac{\partial\bar{v}_1}{\partial x_2}\left(\frac{\partial\bar{v}_1}{\partial x_2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2\partial x_3}+\frac{\partial\bar{v}_1}{\partial x_3}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_3^2}\right)\right.\end{aligned}$$

研　究　速　報

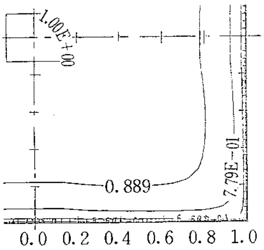

図2　$\bar{v}_1/\bar{v}_{1CL}$（$\bar{v}_{1CL}$＝中心点の $\bar{v}_1$，$0<x_2<D$，$-D<x_3<0$ の1/4面，以下同様）

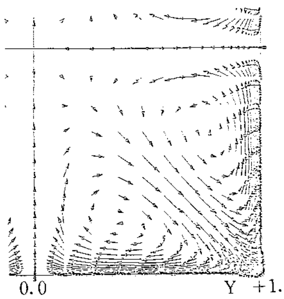

図3　2次流のベクトル図

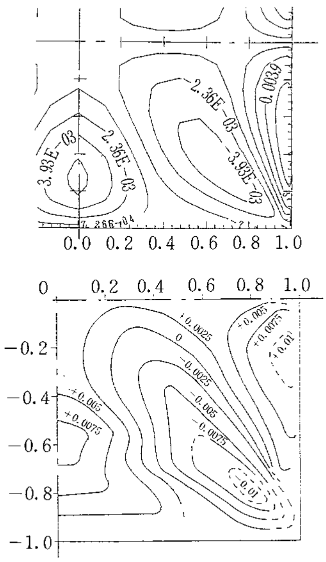

図4　$\bar{v}_3/\bar{v}_{1CL}$，上＝数値計算，下＝実験（x_1/D_h＝36.8，以下同様）

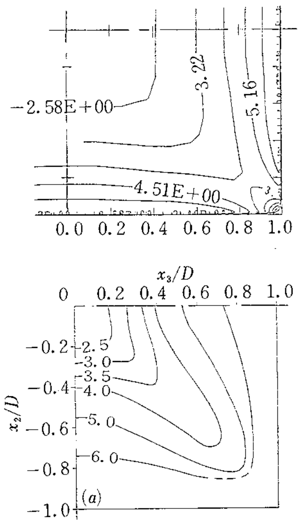

図5　$(k/\bar{v}_{1CL}^2)\times10^3$，上＝数値計算，下＝実験

$$
+\frac{\partial\bar{v}_1}{\partial x_3}\left(\frac{\partial\bar{v}_1}{\partial x_2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2}+\frac{\partial\bar{v}_1}{\partial x_3}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2\partial x_3}\right)+\frac{2}{3}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2\partial x_3}
$$

$$
\times\left(\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2}\right]^2-\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial x_3^2}\right]^2\right)
$$

$$
+\omega\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2\partial x_3}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x_3^2}\right)\Bigg\}
$$

$$
-\frac{C_{\tau 2}}{2}\left\{\frac{\partial\bar{v}_1}{\partial x_2}\left(\frac{\partial\bar{v}_1}{\partial x_2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2\partial x_3}-\frac{\partial\bar{v}_1}{\partial x_3}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2}\right)\right.
$$

$$
\left.+\frac{\partial\bar{v}_1}{\partial x_3}\left(\frac{\partial\bar{v}_1}{\partial x_2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_3^2}-\frac{\partial\bar{v}_1}{\partial x_3}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2\partial x_3}\right)\right\}
$$

$$
+C_{\tau 3}\left\{\frac{2}{3}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2\partial x_3}\left(-\left[\frac{\partial\bar{v}_1}{\partial x_2}\right]^2+\left[\frac{\partial\bar{v}_1}{\partial x_3}\right]^2-\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2}\right]^2\right.\right.
$$

$$
\left.+\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial x_3^2}\right]^2\right)+\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x_3^2}\right)\left(\frac{\partial\bar{v}_1}{\partial x_2}\frac{\partial\bar{v}_1}{\partial x_3}\right.
$$

$$
\left.\left.-\omega\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2\partial x_3}\right)\right\}-\varepsilon+C_k\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}\left(f_D\frac{k^2}{\varepsilon}\right)\frac{\partial k}{\partial x_2}+\frac{\partial}{\partial x_3}\right.
$$

$$
\left.\times\left(f_D\frac{k^2}{\varepsilon}\right)\frac{\partial k}{\partial x_3}+f_D\frac{k^2}{\varepsilon}\Delta_{yz}k\right\}+\nu\Delta_{yz}k, \tag{18}
$$

$$
\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}=\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_3}-\frac{\partial\psi}{\partial x_3}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_2}+C_{\varepsilon 1}k\left\{\left(\frac{\partial\bar{v}_1}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial\bar{v}_1}{\partial x_3}\right)^2\right.
$$

$$
\left.+4\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2\partial x_3}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x_3^2}\right)^2\right\}-C_{\varepsilon 2}f_cf_D^2\frac{\varepsilon^2}{k}
$$

$$
+C_{\varepsilon 3}\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}\left(f_D\frac{k^2}{\varepsilon}\right)\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_2}\right.
$$

$$
\left.+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(f_D\frac{k^2}{\varepsilon}\right)\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_3}+f_D\frac{k^2}{\varepsilon}\Delta_{yz}\varepsilon\right\}+\nu\Delta_{yz}\varepsilon, \tag{19}
$$

$$
\nu_e=C_\nu f_Dk^2/\varepsilon, \tag{20}
$$

$$
\tau_m=C_{\tau m}f_Dk^3/\varepsilon^2. \tag{21}
$$

(14)，(16)～(21)を連立させて解くための境界条件は，壁上で次のとおり適用した．

$$
\bar{v}=0,\quad k=0,\quad \psi=0,
$$

$$
\varepsilon=\nu\partial^2k/\partial x^2,\quad \omega=-\partial^2\psi/\partial x^2. \tag{22}
$$

なお，(22)の ε については(18)を壁上に適用してもとめ，さらに計算安定上から次のとおり1階微分におきかえた．壁からの距離を x' とすると，壁近くでは k は $k\sim x'^2$ となるため $(\partial^2k/\partial x^2)\sim2(\partial\sqrt{k}/\partial x)^2$ と書け，壁近くでは $\varepsilon\sim2\nu(\partial\sqrt{k}/\partial x)^2$ と近似できる[6),7)]．同様に，ω についても(15)を用い $\bar{v}_2$，$\bar{v}_3$ の1階微分で与えた．

差分方法は，空間については[8),9)]，

$$
\frac{df}{dx}=\frac{1}{x_{i+1}-x_{i-1}}\left\{\frac{x_i-x_{i-1}}{x_{i+1}-x_i}(f_{i+1}-f_i)\right.
$$

$$
\left.+\frac{x_{i+1}-x_i}{x_i-x_{i-1}}(f_i-f_{i-1})\right\}, \tag{23}
$$

$$
\frac{d^2f}{dx^2}=2\left\{\frac{f_{i-1}}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_i-x_{i-1})}\right.
$$

$$
\left.-\frac{f_i}{(x_i-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)}+\frac{f_{i+1}}{(x_{i+1}-x_i)(x_{i+1}-x_{i-1})}\right\}. \tag{24}
$$

また，時間差分に関しては，

$$
dv/dt=f,
$$

に対して

$$
v^{n+1}=v^n+\tau(3f^n-f^{n-1})/2, \tag{25}
$$

を用いた．ただし τ は時間刻み幅を，添え字 n，i はそれぞれ n 番目の時刻，i 番目の空間位置を表す．時間刻み幅は等間隔，空間刻みは $-D<x_2<+D$，$-D<x_3<+D$ を

$$
x=\tan h(y),\quad(-3.5<y<3.5)
$$

とし，y を等間隔に刻んで適用した．

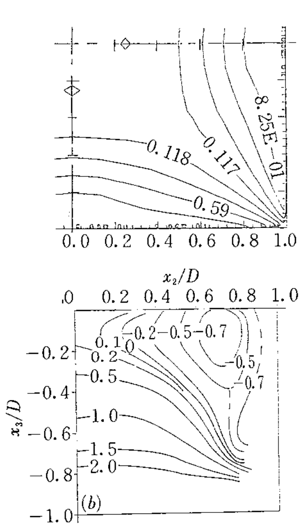

図6　$((\overline{v_2'^2}-\overline{v_3'^2})/\bar{v}_{1CL}^2)\times10^3$,
上＝数値計算，下＝実験

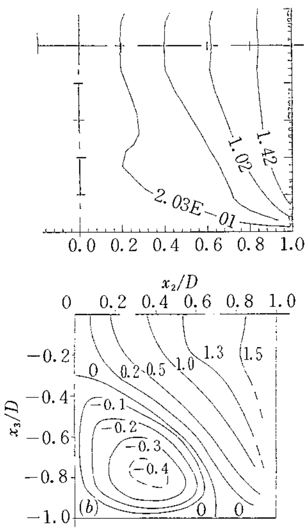

図7　$(-\langle v_1'v_2'\rangle/\bar{v}_{1CL}^2)\times10^3$,
上＝数値計算，下＝実験

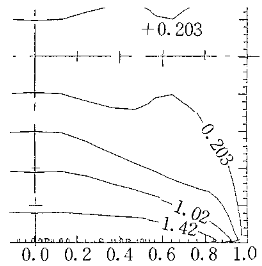

図8　$(-\langle v_1'v_3'\rangle/\bar{v}_{1CL}^2)\times10^3$

(14)は逐次過緩和法（SOR）を用いて解いた．

初期値は$k-\varepsilon$モデルで得られた（等方的）ものを使用し，かつ，2次流れについては図1の点線矢印に主流（最大流速）の約1%の大きさの流れを与えた．

本数値解析は正方形管内流であるから，対称性を考慮して1/4面($-D\leq x_2\leq 0$, $-D\leq x_3\leq 0$)のみ計算を行った．

壁間に61×61の格子点を配置し$R_e\sim71000$（bulk速度とhydraulic diameter$=D_h$に基づく），$x_1/D_h\fallingdotseq23$の結果を図2～図8に示す．

なお，(10)の$C_{\tau2}$，(13)のBの最適化が途中であり，ここでは$C_{\tau2}=-0.1$，$B=50$（(19)のみ適用）を用いているが，その結果は定性的にも定量的にも実験結果（$R_e=42{,}000$）[10),11)]や他の数値解析結果[12)]と良く一致している．

6．結　　論

本研究の非等方$k-\varepsilon$モデルによる乱流の数値解析は，前に行った溝乱流[4),5)]やクエット乱流の結果も合わせてみると，比較的短時間で，妥当な結果が得られることがわかった．

今後，(10)の$C_{\tau2}$，(13)のBの最適化とともに，温度差による浮力効果を伴う乱流，噴流等さまざまな乱流に適用できる方法と考えられる．

謝　　辞

この研究の数値計算と図の作成にあたっては，生産技術研究所電子計算機室各氏の多大な援助と協力があったことを報告するとともに，感謝の意を表明いたします．

本研究の一部は本所選定研究費によることを付記する．

（1985年10月11日受理）

参考文献

1) 吉澤徴：乱流のLarge-Eddy Simulation，生産研究 **36** (1984) 175
2) A. Yoshizawa: Statistical analysis of the deviation of the Reynolds stress from its eddy-viscosity representation, Phys. Fluids **27** (1984) 1377
3) 西島勝一，吉澤徴：$k-\varepsilon$モデルの有効性に関する一考察，ながれ **3** (1984) 245
4) 西島勝一，吉澤徴：滑り無し境界条件のもとでの$k-\varepsilon$モデルを用いた溝乱流の数値解析，生産研究 **37** (1985) 68
5) 西島勝一，吉澤徴：一般化された$k-\varepsilon$モデルによる溝乱流の数値解析，ながれ **4** (1985) 131
6) K. Hanjalic & B. E. Launder: Contribution towards a Reynolds-stress closure for low-Reynolds-Num ber turbulence, J. Fluid Mech **74** (1976) 593
7) S. Nakao: Contribution to the Reynolds stress model as applied to near-wall region, AIAA J. **22** (1984) 303
8) K. Horiuti: Study of Incompressible Turbulent Channel Flow by Large-Eddy Simulation, Theor. and Appl. Mech. **31** (1981) 407
9) K. Horiuti: Large Eddy Simulation of Turbulent Channel Flow by One-Equation Modeling, J. Phys. Soc. Jpn. **54** (1985) 2855
10) A. Melling & J. H. Whitelaw: Turbulent Flow in a Rectangular Duct, J. Fluid Mech. **78** (1976) 289
11) B. E. Launder & W. M. Ying: Secondary Flows in Duct of Square Cross-Section, J. Fluid Mech. **54** (1972) 289
12) A. O. Demuren & W. Rodi: Calculation of Turbulence-Driven Secondary Motion in Non-circular Ducts, J. Fluid Mech. **140** (1984) 189